On peut utiliser le théorème de Fubini, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I_T(a,b) &= \frac{1}{2\pi}\int\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\,dt\,d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\left(\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\,dt\right)\,d\mu(x). \end{aligned}$$

Or la formule de Moivre et la parité du cosinus donnent

$$\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\,dt = \int_{-T}^{T}\frac{\sin(t(x-a))-\sin(t(x-b))}{t}\,dt$$

d'où

$$I_T(a,b)$$
$$=\int\left(\frac{\text{sign}(x-a)}{2\pi}\int_{-|x-a|T}^{|x-a|T}\frac{\sin t}{t}\,dt-\frac{\text{sign}(x-b)}{2\pi}\int_{-|x-b|T}^{|x-b|T}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)\,d\mu(x).$$

De plus, l'application

$$y\mapsto\int_{-y}^{y}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

est une application continue qui admet comme limite π lorsque y tend vers l'infini. En particulier, sa norme est bornée par une constante M.

La quantité apparaissant sous l'intégrale est donc bornée par M/π. Lorsque T tend vers l'infini, elle converge vers la fonction

$$I_{a,b}=\begin{cases}0, & \text{si } x<a\\ 1/2, & \text{si } x=a\\ 1, & \text{si } x\in]a,b[\\ 1/2, & \text{si } x=b\\ 0, & \text{si } x>b.\end{cases}$$

Ainsi, $I_T(a,b)$ converge vers $\int I_{a,b}\,d\mu$, ce qui donne la convergence vers la limite annoncée. Si $\mu(a)=\mu(b)=0$, alors $I_{a,b}$ est $\mu-$presque sûrement l'indicatrice de $]a,b[$, ce qui donne $\int I_{a,b}\,d\mu=\int \mathbb{1}_{]a,b[}\,d\mu=\mu(]a,b[)$.

Ainsi, si deux mesures μ et ν ont la même fonction caractéristique, on a $\mu(]a,b[)=\nu(]a,b[)$ quels que soient a et b dans

$$\mathbb{R}\backslash\{x\in\mathbb{R};\mu(\{x\})>0 \text{ ou } \nu(\{x\})>0\}.$$

Mais ces ensembles forment un π-système qui engendre la tribu, donc les deux mesures coïncident. □

Donnons une conséquence frappante de ce théorème qui nous sera utile dans l'étude des vecteurs gaussiens.