Exercice 125. *Encore une loi* 0–1.

1. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ une suite de tribus indépendantes. Montrer que la tribu $\mathcal{Q} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \sigma(\mathcal{A}_i; i \geq k)$ est triviale.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants. Soit A l'événement " une infinité de A_i se produisent". Montrer que $\mathbb{P}(A)$ ne peut valoir que 0 ou 1.

Exercice 126. La tradition veut que l'Épiphanie soit l'occasion de « tirer les rois » : une fève est cachée dans une galette, qui est elle-même découpée entre les convives et la personne qui obtient cette fève devient le roi de la journée. Lorsque le premier coup de couteau est porté sur la fève, c'est la consternation ! Quelle est la probabilité de cette malheureuse issue ?
Hypothèses et simplifications : on admet que la galette est circulaire, de rayon unité, et que la fève est aussi circulaire, le rayon r. Enfin, on suppose que

— la position du centre de la fève suit la loi uniforme sur le disque de rayon $1 - r$ ayant le même centre que la galette

— le coup de couteau est un rayon du disque représentant la galette

Application numérique avec une fève de 2,7 centimètres de diamètre dans une galette de 23 centimètres de diamètre achetée ce matin.

Exercice 127. *Première sonnerie.*
Soient $(X_1, \dots X_n)$ des variables aléatoires indépendantes telles que pour tout i compris entre 1 et n, X_i suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda_i)$.
On note $T = \inf(X_1, \dots, X_n)$ et $N = \inf\{i \geq 1; X_i = T\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\exists (i,j) \in \mathbb{N}^2 \quad 1 \leq i < j \leq n; X_i = X_j) = 0$.
2. Montrer que pour tout i compris entre 1 et n
$$\mathbb{P}(T > t, N = i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \{t < X_i < X_j\}\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{]t,+\infty[}(x_i) \prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \mathbb{1}_{]x_i,+\infty[}(x_j) \prod_{j=1}^{n} \lambda_j e^{-\lambda_j x_j} \, d\lambda^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n)$$
3. On pose $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$. Montrer que $\mathbb{P}(T > t, N = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda} \exp(-\lambda t)$.
4. Montrer que T et N sont indépendantes et préciser leurs lois.

Exercice 128. Soit n un entier naturel. On considère X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 et Y une binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Montrer que $Z = \frac{X}{Y+1}$ est une variable à densité et déterminer sa densité.