— Toute fonction croissante admet une limite à gauche en tout point de l'intérieur de son ensemble de définition. On a

$$\begin{aligned} F_X(x) - \lim_{y \to x^-} F_X(y) &= \lim_{n \to +\infty} F_X(x) - F_X(x - 1/n) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \in]x - 1/n, x]) = \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

d'après le théorème de continuité séquentielle décroissante.

— D'après ce qui précède, les points de discontinuité de F_X sont les points x tels que $\mathbb{P}(X = x) > 0$: il y en a au plus un ensemble dénombrable d'après le théorème 3.3.

□

Remarque 5.4. *On parle de la fonction de répartition d'une variable aléatoire, mais il s'agit en fait de la fonction de répartition de la loi de la variable aléatoire.*

Retrouver la loi lorsque la fonction de répartition n'est pas continue

Théorème 5.5. *Soit F la fonction de répartition associée à la loi μ. On suppose que F est de classe C^1 par morceaux, avec les points de discontinuité $a_1, \dots, a_n$. Alors μ se décompose en la somme d'une partie à densité, f qui est la dérivée de F là où F est dérivable, et d'une partie discrète qui est $\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(a_i)\delta_{a_i}$.*

Démonstration. On doit montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_{]-\infty,t]} f(x)\, d\lambda(x) + \nu(]-\infty, t]).$$

Soient $T < t < a_1$. D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$F(t) - F(T) = \int_T^t f(x)\, dx = \int_{]T,t]} f(x)\, d\lambda(x).$$

En faisant tendre T vers $-\infty$, on obtient à gauche $F(t)$ et à droite $\int_{]-\infty,t]} f(x)\, d\lambda(x)$ avec le théorème de convergence monotone. (H_0) est donc vraie, où l'on note

$$(H_i) \quad \forall t < a_i, \quad F(t) = \int_{]-\infty,t]} f(x)\, d\lambda(x) + \sum_{j<i} \mu(a_j).$$

Il suffit alors de montrer que $(H_i) \Longrightarrow (H_{i+1})$ pour conclure. On a

$$F(a_i) = \mu(a_i) + \lim_{t \to a_i^-} F(t) = \int_{]-\infty,a_i]} f(x)\, d\lambda(x) + \sum_{j<i} \mu(a_j) + \mu(a_i)$$

Soient $a_i < T < t < a_{i+1}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$F(t) - F(T) = \int_T^t f(x)\, dx = \int_{]T,t]} f(x)\, d\lambda(x).$$