où $C_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y,z) \in C\}$. On a $C_z = \frac{z}{h}A'$ pour $z \in [0,h]$, $C_z = \varnothing$ sinon. On en déduit

$$\begin{aligned}\lambda^3(C) &= \int_{[0,h]} \lambda^2(\frac{z}{h}A')\, d\lambda(z) = \int_{[0,h]} \lambda^2(A')\frac{z^2}{h^2}\, d\lambda(z) \\ &= \frac{h}{3}\lambda^2(A').\end{aligned}$$

On retrouve donc la formule bien connue : le volume du cône est égal au tiers du produit de la hauteur fois l'aire de la base.

4.12.2 Exercice : la fonction Bêta

Rappelons que la fonction *Gamma* $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$.

1. Montrer que quels que soient $x, y > 0$, on a
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} (G \circ T)(t_1,t_2)\, d(\lambda \otimes \lambda)(t_1,t_2),$$
où $G(t,s) = t^{x-1}(s-t)^{y-1}e^{-s}\, \mathbb{1}_{\{0 \le t \le s\}}$ et $T(t_1,t_2) = (t_1, t_1+t_2)$.
2. Montrer que
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t,s)\, d(\lambda \otimes \lambda)(s,t).$$
3. En déduire que
$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$
où la fonction *Bta* $\beta : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie pour tous $x > 0$, $y > 0$ par $\beta(x,y) = \int_0^1 \theta^{x-1}(1-\theta)^{y-1}\, d\theta$.

Solution

1. D'après le théorème de Tonelli, on a
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} t_1^{x-1}t_2^{y-1}e^{-(t_1+t_2)}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_1)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_2)\, d(\lambda \otimes \lambda)(t_1,t_2).$$
Il n'est pas difficile de vérifier que
$$t_1^{x-1}t_2^{y-1}e^{-(t_1+t_2)}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_1)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_2) = (G \circ T)(t_1,t_2),$$
ce qui donne le résultat voulu.
2. D'après le théorème de transfert pour les fonctions mesurables positives,
$$\int_{\mathbb{R}^2} G \circ T(t_1,t_2)\, d(\lambda \otimes \lambda)(t_1,t_2) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t,s)\, d\mu(s,t),$$