Ainsi $|\frac{\partial^n}{\partial^n z} f(x,z)| \leq \frac{n!}{r^n} g_{K+\overline{B}(0,r)}(x)$, ce qui donne le résultat voulu en prenant comme fonction majorante $g_{n,K} = n! r^{-n} g_{K+\overline{B}(0,r)}$.

Passons maintenant à la preuve de l'identité et de la formule pour $n = 1$. Soit $z_0 \in O$. Prenons r tel que la boule fermée de centre z_0 et de rayon r soit incluse dans O. On prend $K = \overline{B}(z_0, r)$.
Posons $F_{\theta,x}(r) = f(x, z_0 + re^{i\theta})$. On a, pour μ-presque tout x, l'égalité (vectorielle)

$$F_{\theta,x}(r) - F_{\theta,x}(0) = \int_0^r F'_{\theta,x}(u)\, du,$$

soit

$$\frac{f(x, z_0 + re^{i\theta}) - f(x, z_0)}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial}{\partial z} f(x, z_0 + ue^{i\theta})\, du.$$

Ainsi pour tout z tel que $|z - z_0| \leq r$, on a

$$\left| \frac{f(x,z) - f(x,z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sup_{z \in \overline{B}(z_0,r)} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(x,z) \right| \leq g_{1,\overline{B}(z_0,r)}(x)\ \mu - \text{p.p.}$$

On conclut alors comme précédemment avec le théorème de convergence dominée et une suite (z_n) quelconque de limite z_0 (à partir d'un certain rang, elle prend ses valeurs dans K). On peut remarquer que la fin de la preuve est presque identique à la preuve du théorème de dérivation sous le signe intégrale, à la différence près qu'on a redémontré "à la main" l'inégalité des accroissements dans le cadre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. □

Application à la fonction Gamma

Théorème 4.22. *La fonction* Γ

$$z \mapsto \int_{[0,+\infty[} t^{z-1} e^{-t}\, d\lambda(t)$$

définit une fonction holomorphe sur $\{a + ib; (a,b) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}\}$. *Ses dérivées sont données par*

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_{[0,+\infty[} (\log t)^n t^{z-1} e^{-t}\, d\lambda(t)$$

Elle vérifie la relation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$*, ce qui permet de la prolonger en une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C} \backslash \{-n; n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. On prend $O = \{a+ib; (a,b) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}\}$. Soit K un compact inclus dans O. On pose $a(K) = \inf\{\text{Re}\,(z); z \in K\}$. Comme $z \mapsto \text{Re}\,(z)$ est continue, l'infimum est atteint et on a $a(K) > 0$.
On pose maintenant $M(K) = \sup\{\text{Re}\,(z); z \in K\}$, puis on considère la fonction $g_K(x) = t^{a(K)-1} e^{-t} + t^{M(K)-1} e^{-t}$. On a déjà vu dans l'exercice sur la

fonction Gamma réelle que g_K était intégrable, et on a pour tout $z \in K$ et tout $t > 0$:

$$|t^{z-1}e^{-t}| \leq g_K(t).$$

Avec le théorème précédent, cela nous donne l'holomorphie de la fonction Gamma complexe. Pour $z \in O$, une intégration par parties donne

$$\int_0^M e^{-t}t^z\, dt = [-t^z e^{-t}]_0^M + z\int_0^M e^{-t}t^{z-1}\, dt,$$

d'où $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ en faisant tendre M vers l'infini.
Posons $\Gamma_0(z) = \Gamma(z)$, puis pour $k \geq 0$, $\Gamma_{k+1}(z) = \frac{\Gamma_k(z+1)}{z}$.
On montre aisément par récurrence que Γ_k définit une fonction holomorphe sur $H_k = \{a+ib; a > -k\}\backslash\{0; -1; -2; \dots; -k\}$. De manière explicite, on a sur H_k :

$$\Gamma_k(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{(z+k-1)(z+k-2)\dots z}.$$

Cependant pour z dans H_k, on a encore pour tout entier naturel non nul ℓ :

$$\begin{aligned}\Gamma_{k+\ell}(z) = \frac{\Gamma(z+k)(z+k)(z+1)\dots(z+k+\ell-1)}{(z+k+\ell-1)\dots z} &= \frac{\Gamma(z+k)}{(z+k-1)\dots z}\\ &= \Gamma_k(z).\end{aligned}$$

Finalement, les fonctions Γ_k coïncident et définissent une fonction holomorphe sur $\cup_{k\geq 1} H_k = \mathbb{C}\backslash\{-n; n \in \mathbb{N}\}$. □

Les conséquences sont aussi intéressantes dans le domaine réel : on en déduit directement que la restriction de Γ à $]0, +\infty[$ est C^∞, avec l'expression des dérivées. En particulier, pour tout $x > 0$

$$\Gamma''(x) = \int_{[0,+\infty[} (\log t)^2 t^{x-1}e^{-t}\, d\lambda(t) > 0,$$

et Γ est donc strictement convexe sur $]0, +\infty[$, et Γ' est strictement croissante. Comme $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, Γ' s'annule en un unique point c de $]1, 2[$: Γ est strictement décroissante sur $]0, c[$, et strictement croissante sur $]c, +\infty[$.

Comme $\Gamma(n+1) = n!$, on a $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
L'inégalité $\Gamma(x) \geq \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\, dt \geq \frac{1}{ex}$ donne $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

Exercice. Posons $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-x}}{x-z}\, d\lambda(x)$ et montrons que ϕ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$. Soit K un compact de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$: la fonction $z \mapsto d(z, \mathbb{R}_+)$ est continue sur K, donc y atteint son minimum, noté ε_K. Comme K ne rencontre pas $\mathbb{R}_+$, on a $\varepsilon_K > 0$. On peut donc appliquer le théorème avec $g_K(x) = \frac{e^{-x}}{\varepsilon_K}$. Il s'agit en fait de la transformée de Stieljès de la fonction e^{-x}.