$\mathcal{A}$. Si on pose $A'_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega\backslash\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right)$, on a $A'_n \in \mathcal{A}$ (on utilise la stabilité par intersection finie et par complémentation). Donc, comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est un λ-système, on a $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A'_n \in \mathcal{A}$, d'après le troisième axiome d'un λ-système.

Théorème 3.15 (Théorème $\lambda - \pi$). *Si $\mathcal{P}$ est un π-système et si $\mathcal{L}$ est un λ-système, alors $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ entraîne $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{L}'$ l'intersection de tous les λ-systèmes contenant $\mathcal{P}$. En s'inspirant de la preuve de l'existence de la tribu engendrée, on voit sans peine que $\mathcal{L}'$ est un λ-système, contenu dans tous les λ-systèmes contenant $\mathcal{P}$. Ainsi, pour montrer que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$, il suffit de montrer que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}'$. Pour cela, il suffit de prouver que $\mathcal{L}'$ est une tribu puisque $\mathcal{L}'$ contient $\mathcal{P}$ et que $\sigma(\mathcal{P})$ est la plus petite des tribus qui contiennent $\mathcal{P}$. D'après la remarque précédente, il suffit de montrer que $\mathcal{L}'$ est un π-système. Pour $E \in \mathcal{L}'$, notons $\mathcal{L}_E = \{A \in \mathcal{L}'; A \cap E \in \mathcal{L}'\}$. Montrons que pour tout $E \in \mathcal{L}'$, $\mathcal{L}_E$ est un λ-système. On a :

— $\Omega \in \mathcal{L}'$ et $\Omega \cap E = E \in \mathcal{L}'$, donc $\Omega \in \mathcal{L}_E$

— Si A, B sont dans $\mathcal{L}_E$ avec $A \subset B$, alors on a
$$(B\backslash A) \cap E = (B \cap E)\backslash(A \cap E) \in \mathcal{L}'$$
car $\mathcal{L}'$ est un λ-système, et $B\backslash A \in \mathcal{L}'$, donc $B\backslash A \in \mathcal{L}_E$.

— De même, si les A_i forment une suite croissante d'éléments de $\mathcal{L}_E$, alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{L}'$ et $\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \cap E = \left(\bigcup_{n\geq 1} (A_n \cap E)\right) \in \mathcal{L}'$ car $\mathcal{L}'$ est un λ-système, donc $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{L}_E$.

Lorsque $E \in \mathcal{P}$, $\mathcal{L}_E$ est un λ-système qui contient $\mathcal{P}$, donc par minimalité de $\mathcal{L}'$, on a $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}_E$, soit $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}'$. Maintenant, le même raisonnement que plus haut montre que l'ensemble des parties E de $\mathcal{L}'$ telles que $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}'$ est un λ-système. Comme il contient $\mathcal{P}$, par minimalité, il contient $\mathcal{L}'$, ce qui montre que $\mathcal{L}'$ est un π-système et achève donc la preuve. □

Démonstration du théorème 3.12. Soit $n \geq 1$. Considérons l'ensemble $\mathcal{L}$ des éléments A de la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par le π-système tels que
$$\mathbb{P}(A \cap \Omega_n) = \mathbb{Q}(A \cap \Omega_n).$$
Il n'est pas difficile (en utilisant notamment le théorème de continuité séquentielle croissante) de voir que $\mathcal{L}$ est un λ-système ; il suffit alors d'appliquer le théorème $\lambda - \pi$ de Dynkin, pour voir que pour tout A, on a l'identité $\mathbb{P}(A \cap \Omega_n) = \mathbb{Q}(A \cap \Omega_n)$. Le théorème de continuité séquentielle croissante permet alors de conclure. □