

Table des matières

Table des matières	i
Notations	ix
Avant-propos	xi
0 Variables de Bernoulli	1
0.1 La question de l'existence : de $[0, 1]$ à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$	1
0.2 De $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ à $[0, 1]$: où l'on a envie des processus	3
0.3 Inégalités ; lois des grands nombres	5
0.4 Variables de Rademacher et séries de Dirichlet	7
0.4.1 Une série de Dirichlet aléatoire	7
0.4.2 Comportement au bord	9
0.5 Exercices sur les variables de Bernoulli	11
0.5.1 Exercices corrigés	11
0.5.2 Exercices non corrigés	11
1 Espérance conditionnelle	13
1.1 Motivation	13
1.2 Construction de l'espérance conditionnelle	15
1.2.1 Propriétés	19
1.2.2 Inégalité de Jensen conditionnelle	23
1.2.3 Espérance conditionnelle sachant une variable (ou un vecteur) aléatoire	24
Le cauchemar des conventions d'écriture	24
Des techniques de calculs utiles	26

1.3	Exercices sur l'espérance conditionnelle	29
1.3.1	Exercices corrigés	29
1.3.2	Exercices non corrigés	33
2	Martingales	37
2.1	Définitions	37
2.1.1	Filtrations et martingales	37
2.1.2	Différences de martingales	38
2.1.3	Sous-martingales, sur-martingales	39
2.2	Premières inégalités	40
2.2.1	Martingales et fonctions convexes	40
2.2.2	Inégalité de Kolmogorov	41
2.3	Convergence des martingales de carré intégrable	42
2.4	Temps d'arrêts	44
2.5	Convergence des martingales bornées dans L^1	49
2.5.1	Théorème des traversées montantes	49
2.5.2	Le théorème de convergence de Doob	52
2.5.3	Martingales inverses	53
2.6	Approximation L^1 par des martingales	54
2.7	Décomposition de Doob (*)	57
2.8	Exercices sur les martingales	59
2.8.1	Exercices corrigés	59
2.8.2	Exercices non corrigés	66
3	Compléments de théorie de la mesure	69
3.1	Rappels de topologie	69
3.1.1	Topologie produit	69
3.1.2	Espaces polonais	70
3.2	Notion de loi conditionnelle	74
3.2.1	Le théorème général	74
3.2.2	Loi d'un vecteur sachant un autre	79
	Un cas particulier	80
	Retour au cas général, et caractérisation	83
	Calcul de la loi conditionnelle pour des vecteurs à densité	86
	Des lois conditionnelles vers les lois	88

TABLE DES MATIÈRES

3.2.3	Échantillonneur de Gibbs	91
3.2.4	Échantillonneur de Gibbs et chaînes de Markov (*)	93
3.3	Théorème de Radon–Nikodým	95
3.3.1	Le théorème	95
3.3.2	Martingales et densités	99
3.4	Exercices sur les compléments	102
3.4.1	Exercices corrigés	102
3.4.2	Exercices non corrigés	103
4	Inégalités	107
4.1	Inégalité d’Efron–Stein	107
4.2	L’inégalité de Hoeffding–Azuma	108
4.2.1	Le théorème	108
4.2.2	Principe de Maurey	112
	Étude d’un exemple	113
4.3	Inégalité de Harris	113
4.4	Exercices sur les inégalités	116
4.4.1	Exercices corrigés	116
4.4.2	Exercices non corrigés	118
5	Loi d’un processus	119
5.1	Loi d’un processus	119
5.2	Théorème d’existence de Kolmogorov	122
5.2.1	Loi produit infini ; variables indépendantes . . .	125
5.2.2	Loi markovienne	126
5.3	Processus réels stationnaires (temps discret)	127
5.4	Processus gaussiens	130
5.4.1	Caractérisation	130
5.4.2	Condition d’existence	131
5.4.3	Processus gaussiens stationnaires	131
5.4.4	Théorème d’Herglotz	132
5.5	Exercices sur les processus	137
5.5.1	Exercices corrigés	137
5.5.2	Exercices non corrigés	140

6	Chaînes de Markov	143
6.1	Définition et caractérisations	143
6.1.1	Définition	143
6.1.2	Caractérisation par l'espérance conditionnelle . .	143
6.1.3	Dynamique markovienne	144
6.2	La modélisation ou les mathématiques?	149
6.3	Matrice stochastique	150
6.3.1	Existence des chaînes de Markov	150
6.3.2	Puissances des matrices stochastiques	152
6.3.3	Chaînes de Markov indépendantes	152
6.3.4	Graphe associé à une matrice stochastique	153
6.3.5	Point de vue fonctionnel (*)	156
6.4	Propriété de Markov	158
6.4.1	Le théorème	159
6.4.2	Analyse au premier pas	160
6.5	L'analyse au premier pas en action (*)	163
6.5.1	Analyse au premier pas et fonction de répartition	163
6.5.2	Analyse au premier pas et probabilité des issues .	164
6.5.3	Analyse au premier pas et temps moyen d'atteinte	167
6.5.4	Passage aux fonctions génératrices	168
6.5.5	Quelques exemples	171
	Temps d'absorption et probabilités des issues :	
	calculs avec Sage	171
6.5.6	Un calcul de fonction génératrice	174
6.6	Exercices sur les chaînes de Markov	178
6.6.1	Exercices corrigés	178
6.6.2	Exercices non corrigés	186
7	Chaînes de Galton–Watson	193
7.1	Introduction	193
7.2	Chaînes de Galton-Walson	194
7.2.1	Calcul de la probabilité d'extinction	198
7.2.2	Vitesse d'extinction	200
	Le cas sous-critique ($m < 1$)	200
	Extinction dans le cas surcritique ($m > 1$)	200
	Le cas critique ($m = 1$)	203

TABLE DES MATIÈRES

7.2.3	Vitesse de croissance dans le cas surcritique . . .	206
7.3	Processus de Galton Watson multitype	208
7.4	Processus de Galton Watson avec immigration	216
7.5	Une preuve du théorème de Kesten–Stigum	219
7.5.1	Processus de Galton–Watson biaisé par la taille. . .	219
7.5.2	Théorème de Kesten–Stigum	220
7.6	Conclusion	221
7.7	Exercices sur les chaînes de Galton-Watson	223
7.7.1	Exercices corrigés	223
7.7.2	Exercices non corrigés	224
8	Réurrence et mesures invariantes	227
8.1	Temps d'arrêt et propriété de Markov forte	228
8.2	Classification des états	233
8.3	Mesures invariantes	237
8.4	Théorème de la probabilité stationnaire	241
8.5	Théorème ergodique des chaînes de Markov	246
8.5.1	Convergence p.s. des fréquences empiriques . . .	246
8.5.2	Fréquences empiriques et probabilités invariantes	248
8.5.3	Calcul d'une probabilité invariante à partir de la loi des trajectoires issues d'un point	251
8.6	Retour à la classification des états (*)	253
8.7	Algorithme de Propp et Wilson	256
8.7.1	Loi 0–1 pour l'algorithme de Propp et Wilson . .	258
8.7.2	Propp et Wilson pour des dynamiques monotones	259
8.8	Exercices sur la récurrence et les mesures invariantes . .	266
8.8.1	Exercices corrigés	266
8.8.2	Exercices non corrigés	274
9	Théorèmes ergodiques	279
9.1	Définitions	279
9.1.1	Mesures invariantes, fonctions invariantes	279
9.1.2	Ergodicité, mélange	280
9.1.3	Sous-additivité	283
9.2	Le théorème ergodique et le théorème ergodique sous- additif	284

TABLE DES MATIÈRES

9.2.1	Un lemme	284
9.2.2	Théorème de Birkhoff	287
9.2.3	Théorème de Kingman	289
9.3	Application aux chaînes de Markov	292
9.4	Facteur d'un système dynamique	296
9.5	Théorème du retour, système induit	298
9.5.1	Théorème du retour de Poincaré	298
9.5.2	Système induit	299
9.5.3	Théorème de Kac	301
9.6	Application à la percolation de premier passage	302
9.7	Une application à la théorie des nombres	309
9.7.1	Transformation de Gauss	309
9.7.2	Ergodicité de la transformation de Gauss	310
9.7.3	La constante de Khintchine	314
9.7.4	Un théorème de Paul Lévy	315
9.8	Exercices sur les théorèmes ergodiques	319
9.8.1	Exercices corrigés	319
9.8.2	Exercices non corrigés	321
A	Indications	323
A.1	Exercices sur les variables de Bernoulli	323
A.2	Exercices sur l'espérance conditionnelle	323
A.3	Exercices sur les martingales	326
A.4	Exercices sur les compléments	329
A.5	Exercices sur les inégalités	330
A.6	Exercices sur les processus	331
A.7	Exercices sur les chaînes de Markov	333
A.8	Exercices sur les chaînes de Galton-Watson	337
A.9	Exercices sur la récurrence	338
A.10	Exercices sur la théorie ergodique	343
B	Solutions des exercices corrigés	345
B.1	Exercices sur les Bernoulli	345
B.2	Exercices sur l'espérance conditionnelle	347
B.3	Exercices sur les martingales	359
B.4	Exercices sur les compléments	377

TABLE DES MATIÈRES

B.5 Exercices sur les inégalités	381
B.6 Exercices sur les processus	386
B.7 Exercices sur les chaînes de Markov	395
B.8 Exercices sur les chaînes de Galton-Watson	417
B.9 Exercices sur la récurrence	420
B.10 Solution des exercices sur la théorie ergodique	447
C Problèmes	451
C.1 Problème 1 : nombres de Stirling	451
C.2 Problème 2 : théorème d’Erdős, Feller et Pollard	453
C.3 Problème 3 : théorème de De Finetti–Hewitt–Savage	455
C.4 Problème 4 : TCL pour les martingales et les chaînes de Markov	458
D Solutions des problèmes	465
D.1 Solution du problème 1	465
D.2 Solution du problème 2	469
D.3 Solution du problème 3	476
D.4 Solution du problème 4	484
Bibliographie	499
Index	503