Solution 88 1. On fait comme dans le cas sans immigration. Comme $(X_n)_{n\ge 0}$ et $(Y_n)_{n\ge 0}$ sont des chaînes de Markov indépendantes, le lemme 11 nous dit que $((X_n,Y_n))_{n\ge 0}$ est une chaîne de Markov, de matrice de passage

$$p_{(x,a),(y,b)} = (\nu^{*x})(a)(\nu^{*y} * \chi)(b).$$

Notons $\mathbb{P}^{(x,y)}$ les lois des chaînes de Markov canoniquement associées. On doit montrer que si l'on pose $f(x,y) = x+y$, alors $(f(X_n,Y_n))_{n\ge 0}$ est une chaîne de Markov. Pour cela, avec le critère de Dynkin,, il suffit de montrer que si $x+y=n$, alors $\mathbb{P}^{(x,y)}(f(X_1,Y_1)=p)$ ne dépend que n et p. Or, sous $\mathbb{P}^{(x,y)}$, X_1 et Y_1 sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives ν^{*x} et $\nu^{*y}\chi$, donc la loi de $f(X_1,Y_1)$ est

$$\nu^{*x} * \nu^{*y} * \chi = \nu^{*(x+y)} * \chi = \nu^{*n} * \chi.$$

Ainsi, $\mathbb{P}^{(x,y)}(f(X_1,Y_1)=p) = (\nu^{*n} * \chi)(\{p\})$ et $(X_n+Y_n)_{n\ge 0}$ est bien une chaîne de Galton-Waltson de loi de reproduction ν avec immigration χ.
Comme la loi initiale est $\mathbb{P}_{X_0+Y_0} = \mathbb{P}_{X_0} * \mathbb{P}_{Y_0} = \mu_1 * \mu_2$, on a le résultat voulu.

2. On utilise l'analyse au premier pas :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}^0(Z_{n+1}=\alpha) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{Q}^0(Z_1=k, Z_{n+1}=\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \chi(k)\mathbb{Q}^k(Z_n=\alpha) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \chi(k)(\mathbb{Q}^0_{Z_n} * \mathbb{P}^k_{Z_n})(\alpha),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du lemme précédent.