3. En multipliant par p^i, on obtient
$$p^i\mathbb{E}^i(T^n) = p^i + p^{i+1}\mathbb{E}^{i+1}(T^n) + (p^i - p^{i+1})\mathbb{E}^0(T^n)$$
soit
$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(p^i\mathbb{E}^i(T^n) - p^{i+1}\mathbb{E}^{i+1}(T^n)\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(p^i - p^{i+1}\right)\mathbb{E}^0(T^n) + p^i$$
$$\mathbb{E}^0(T^n) - p^n\mathbb{E}^n(T^n) = \mathbb{E}^0(T^n)(1-p^n) + (1 + p + \cdots + p^{n-1}).$$
Comme $\mathbb{E}^n(T^n) = 0$, il vient
$$\mathbb{E}^0(T^n) = \frac{p + p^2 + \cdots + p^n}{p^n} = \frac{1-p^n}{(1-p)p^n}.$$

Solution 73 Comme on ne bouge que d'une unité à la fois, $S_k \geq -k$ pour tout k, d'où $T_{-n} \geq n$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} T_{-n} = +\infty$. On en déduit que $\{T_a < +\infty\} = \cup_{n\geq 1}\{T_a < T_{-n}\}$. Pour atteindre $-(n+1)$, il faut passer par $-n$: avec le théorème de continuité séquentielle croissante, on a
$$\mathbb{P}(T_a < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_a < T_{-n}).$$
Vu (6.14), si $p = q = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(T_a < T_{-n}) = \frac{n}{a+n}$, et donc $\mathbb{P}(T_a < +\infty) = 1$. Sinon, $\mathbb{P}(T_a < T_{-n}) = \frac{(\frac{q}{p})^n - 1}{(\frac{q}{p})^{a+n} - 1}$.

Si $p > q$, alors $(q/p)^n \to 0$, et donc $\mathbb{P}(T_a < +\infty) = 1$. Enfin, si $p < q$, $\frac{(\frac{q}{p})^n - 1}{(\frac{q}{p})^{a+n} - 1} \sim \frac{(\frac{q}{p})^n}{(\frac{q}{p})^{a+n}} = (\frac{p}{q})^a$: on a $\mathbb{P}(T_a < +\infty) = (\frac{p}{q})^a$.

Il peut être intéressant de noter que la méthode utilisée ici a déjà été employée dans l'exercice 70. Dans les deux cas, pour calculer la probabilité qu'un temps d'arrêt soit fini, on le compare à une suite de temps d'arrêts qui tend presque sûrement vers l'infini.

Solution 81 Quitte à échanger a et b, avec Bezout il existe u et v positifs avec $au - bv = 1$.
$$\frac{nu}{b} - \frac{nv}{a} = n\frac{au - bv}{ab} = \frac{n}{ab} \geq 1,$$
donc il existe p entier avec $\frac{nu}{b} \geq p \geq \frac{nv}{a}$. On a alors l'écriture
$$a(nu - bp) + b(ap - nv) = n.$$