Solution 65 Comme la chaîne est irréductible et que le complémentaire de A est non-vide, pour tout $x \in A$, il existe n_x tel que $\mathbb{P}_x(X_{n_x} \notin A) > 0$.

Ainsi $\alpha = \min\{\mathbb{P}_x(X_{n_x} \notin A); x \in A\} > 0$ et, comme A est fini, $n = \max\{n_x; x \in A\} < +\infty$. Pour tout $x \in A$, on a

$$\mathbb{P}^x(T \leq n) \geq \mathbb{P}^x(X_{n_x} \notin A) \geq \alpha.$$

Mais si $x \notin A$, on a $\mathbb{P}^x(T \leq n) \geq \mathbb{P}^x(T = 0) = 1 \geq \alpha$, donc finalement

$$\forall x \in S \quad \mathbb{P}^x(T \leq n) \geq \alpha.$$

Posons $u_k = \mathbb{P}^x(\forall i \leq nk, X_i \in A)$. Avec la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^x(\forall i \leq n(k+1), X_i \in A | X_{nk}) \\
&= \mathbb{P}^x(\forall i \leq nk, X_i \in A)\mathbb{P}^{X_{nk}}(\forall i \leq n, X_i \in A) \\
&\leq \mathbb{P}^x(\forall i \leq nk, X_i \in A)(1-\alpha),
\end{aligned}$$

d'où en réintégrant $u_{k+1} \leq (1-\alpha)u_k$, et, par récurrence $u_k \leq (1-\alpha)^k$. Ainsi $\mathbb{P}^x(\tau = +\infty) \leq \mathbb{P}^x(\tau > kn) \leq (1-\alpha)^k$, donc en faisant tendre k vers l'infini, $\mathbb{P}^x(\tau = +\infty) = 0$. Mais en fait, on a un peu plus,

$$\mathbb{P}^x(\tau > k) \leq \mathbb{P}^x(\tau > n\lfloor k/n \rfloor) \leq (1-\alpha)^{n\lfloor k/n \rfloor} \leq (1-\alpha)^{k-n},$$

donc la variable aléatoire τ a une queue sous-exponentielle.

Solution 66 De trois choses l'une :

— Si $X_0 = 0$, alors $(X_0, X_1, X_2) = (0, 2, 0)$ et $(Y_0, Y_1, Y_2) = (0, 1, 0)$

— Si $X_0 = 1$, alors $(X_0, X_1, X_2) = (1, 1, 1)$ et $(Y_0, Y_1, Y_2) = (0, 0, 0)$

— Si $X_0 = 2$, alors $(X_0, X_1, X_2) = (2, 0, 0)$ et $(Y_0, Y_1, Y_2) = (1, 0, 1)$

En particulier, de l'inégalité $\mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0) \geq \mathbb{P}(X_0 = 2) > 0$, on déduit que $\mathbb{P}(Y_1 = 0 | Y_0 = 1) > 0$.
De même, l'inégalité $\mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 0) \geq \mathbb{P}(X_0 = 1) > 0$ entraîne $\mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_1 = 0) > 0$.

Si $(Y_n)_{n \geq 0}$ était une chaîne de Markov, l'identité

$$\mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0)\mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_1 = 0)$$

nous donnerait $\mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = 0) > 0$. Or on sait que cette probabilité est nulle, donc $(Y_n)_{n \geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov.