Comme 1 est intégrable, il suffit de montrer que si $y_1 \dots, y_m$ sont des réels positifs de somme 1, la suite $(\sum_{k=1}^m y_k e^{iu_k/n})^n$ converge vers $\exp(\sum_{k=1}^m iy_k u_k)$ lorsque n tend vers l'infini. Le théorème de convergence dominée permettra alors de conclure.

Si je pose $z_n = \sum_{k=1}^m y_k e^{iu_k/n}$ et $z'_n = \exp(\sum_{k=1}^m iy_k u_k/n)$, on a $|z_n| \le 1$ et $|z'_n| \le 1$, donc $|z_n^n - z_n'^n| \le n|z_n - z'_n|$. Cependant, pour tout k, on a $e^{iu_k/n} = 1 + i\frac{u_k}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m y_k e^{iu_k/n} &= \sum_{k=1}^m y_k(1 + i\frac{u_k}{n}) + O(\frac{1}{n^2}) \\ &= 1 + \frac{i}{n}(\sum_{k=1}^m y_k u_k) + O(\frac{1}{n^2}) \quad = z'_n + O(\frac{1}{n^2}).\end{aligned}$$

Ainsi $|z_n^n - z_n'^n| \le n|z_n - z'_n| = O(1/n)$, ce qui donne la convergence voulue. Ceci achève la preuve analytique.

Alternativement, on peut considérer une suite (R_n) de variables aléatoires indépendantes de même loi $\sum_{k=1}^n y_k \delta_{u_k}$. D'après la loi faible des grands nombres, $(R_1 + \dots + R_n)/n$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(R_1) = \sum_{k=1}^n y_k u_k$.

Elle converge donc en loi vers $\sum_{k=1}^n y_k u_k$, donc la fonction caractéristique de $(R_1 + \dots + R_n)/n$ converge vers la fonction caractéristique de la variable constante $\sum_{k=1}^n y_k u_k$. En particulier, il y a convergence au point 1, et il est aisé de de constater que $\varphi_{(R_1+\dots+R_n)/n}(1) = (\sum_{k=1}^m y_k e^{iu_k/n})^n$, ce qui donne le résultat voulu.

On sait donc que $\frac{V_n - d}{Sn} \Longrightarrow Y$. Comme $d/(Sn)$ tend vers 0, le lemme de Slutsky entraîne que $\frac{V_n}{Sn} \Longrightarrow Y$. Comme $\frac{Sn}{Sn+d}$ tend vers 1, le lemme de Slutsky entraîne encore que $\frac{V_n}{Sn+d} \Longrightarrow Y$

(e) On sait $\frac{V_n}{Sn+d} \to W$ presque sûrement, et la convergence presque sûre entraîne la convergence en loi, donc $\frac{V_n}{Sn+d}$ converge en loi vers W. D'après la question précédente, W a la même loi que Y, à savoir la loi de Dirichlet de paramètre d/S.

Solution 26 1. Supposons que la série de terme général $(\frac{x_n}{\varphi(n)})_{n \ge 1}$

converge et posons $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x_n}{\varphi(n)}$. Pour $n \geq 1$, on a

$$x_n = \frac{x_n}{\varphi(n)}\varphi(n) = (R_n - R_{n+1})\varphi(n),$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} x_k &= \sum_{k=p}^{n}(R_k - R_{k+1})\varphi(k) \\
&= \sum_{k=p}^{n} R_k\varphi(k) - \sum_{k=p+1}^{n+1} R_k\varphi(k-1) \\
&= R_p\varphi(p) - R_{n+1}\varphi(n) + \sum_{k=p+1}^{n} R_k(\varphi(k) - \varphi(k-1)).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut choisir p tel que $k \geq p$ entraîne $|R_k| \leq \varepsilon$; alors pour $n \geq p$, on a

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=p}^{n} x_k| &\leq |R_p|\varphi(p) + |R_n|\varphi(n) + \sum_{k=p+1}^{n} |R_k|.|\varphi(k) - \varphi(k-1)| \\
&\leq 2\varepsilon\varphi(n) + \sum_{k=p+1}^{n} \varepsilon(\varphi(k) - \varphi(k-1) \\
&\leq 2\varepsilon\varphi(n) + \varepsilon(\varphi(n) - \varphi(p)) \leq 3\varepsilon\varphi(n).
\end{aligned}$$

Comme $\varphi(n) \to +\infty$, on a alors

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{|\sum_{k=1}^{n} x_k|}{\varphi(n)} &= \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{|\sum_{k=p}^{n} x_k|}{\varphi(n)} \\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{|\sum_{k=1}^{n} x_k|}{\varphi(n)} = 0,$$

ce qui donne le résultat voulu.

2. On pose $M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - \mathbb{E}(X_k))}{\varphi(k)}$. Il est facile de voir que (M_n) est une martingale centrée, avec
$$\operatorname{Var} M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Var} X_k}{\varphi(k)^2}.$$
Comme la série de terme général $\frac{\operatorname{Var} X_k}{\varphi(k)^2}$, la martingale est bornée dans L^2. Elle converge donc presque- sûrement et dans L^2. Si on pose $\tilde{\Omega} = \{M_n \text{ converge}\}$, on a $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$. Mais d'après le lemme de Kronecker $\tilde{\Omega} \subset \{(\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_k)))/\varphi(n) \to 0\}$, ce qui donne la convergence presque sûre. Comme le moment d'ordre deux de $\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_k)))/\varphi(n)$ vaut $\frac{1}{\varphi(n)^2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k)$, la convergence dans L^2 vers 0 découle immédiatement du lemme de Kronecker.
3. On a $\frac{n+1}{\log(n+1)} = \frac{n}{\log n}(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n})^{-1}$.
Comme $\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n} \sim \frac{1}{n \log n} = o(1/n)$, il vient
$$\frac{n+1}{\log(n+1)} = \frac{n}{\log n}(1 + \frac{1}{n})(1 + o(1/n)) = \frac{n}{\log n}(1 + \frac{1}{n} + o(1/n)),$$
d'où $\frac{n+1}{\log(n+1)} - \frac{n}{\log n} \sim \frac{1}{\log n}$. En faisant des sommes télescopiques et en utilisant le théorème sur les sommes partielles de séries positives divergentes, on obtient $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\log k} \sim \frac{n}{\log n}$. On prend alors $\varphi(n) = \mathbb{E}(S_n)$. La fonction φ est croissante ; comme $\frac{\operatorname{Var} X_k}{\varphi(k)^2} \sim \frac{\log k}{k^2}$, qui est le terme générale d'une série positive convergente, on peut bien appliquer la question précédente : $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\varphi(n)}$ tend presque sûrement vers 0, soit $\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ tend presque sûrement vers 1.
4. On prend $\varphi(n) = n^s$. φ est bien croissante On a $\operatorname{Var} \varepsilon_k = 1$. Le théorème de convergence donne la convergence de la série aléatoire du théorème 5, dont les sommes partielles sont M_n, et alors, le lemme de Kronecker donne la convergence du théorème 4.

Solution 27 1. Une famille de variables aléatoires équi-intégrable est toujours bornée dans L^1.