Posons $\sigma^2 = \text{Var}(R)$. Comme $R \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(X)|Y, Z) &= \mathbb{E}(\psi((Y, Z), R)|Y, Z) \\ &= g(y, z),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}g(y, z) &= \int_{\mathbb{R}} \psi((y, z), r) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{r^2}{2\sigma^2})\, d\lambda(r) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\alpha y + \beta z + r) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{r^2}{2\sigma^2})\, d\lambda(r) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(u - (\alpha y + \beta z))^2}{2\sigma^2}\right)\, d\lambda(r)\end{aligned}$$

Comme $R = X - V = X - (\alpha X + \beta Y) = \langle (X, Y, Z)', v' \rangle$, et que M est la matrice de covariance de (X, Y, Z), on a $\sigma^2 = \langle Mv, v \rangle$, ce qui donne le résultat voulu.

B.3 Solutions des exercices sur les martingales

Solution 21 1. Il faut montrer que que pour tout borélien A, l'ensemble $S^{-1}(A) = \{S \in A\}$ est dans la tribu $\mathcal{F}_\tau$. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$, n un entier naturel. On a

$$\{S \in A\} \cap \{\tau = n\} = \{S_n \in A\} \cap \{\tau = n\}, \text{ où } S_n = \sum_{k=1}^{n} f(X_k).$$

Par construction, S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, donc $\{S_n \in A\} \in \mathcal{F}_n$. Comme τ est un temps d'arrêt $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Par suite,

$$\{S \in A\} \cap \{\tau = n\} = \{S_n \in A\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Comme c'est vrai pour tout n, on a $\{S \in A\} \in \mathcal{F}_\tau$. Comme A est un borélien quelconque, cela donne la mesurabilité de S.

2. Si on prend $f = \mathbb{1}_A$, on a $\{T_A > \tau\} = \{S = 0\}$. Comme S est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et que le singleton $\{0\}$ est un borélien, $\{S = 0\} \in \mathcal{F}_\tau$.

3. Ici encore, il suffit de montrer que pour tout entier naturel n, $\{\tau_1 < \tau_2\} \cap \{\tau_1 = n\} \in \mathcal{F}_n$. Or

$$\begin{aligned}\{\tau_1 < \tau_2\} \cap \{\tau_1 = n\} &= \{\tau_2 > n\} \cap \{\tau_1 = n\} \\ &= \{\tau_1 = n\} \backslash \{\tau_2 \leq n\}.\end{aligned}$$

Comme τ_1 et τ_2 sont des temps d'arrêts, $\{\tau_1 = n\}$ et $\{\tau_2 \leq n\}$ sont dans $\mathcal{F}_n$, d'où $\{\tau_1 = n\} \backslash \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, ce qui donne le résultat voulu.

Solution 22 1. Posons $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \ldots, U_n)$. Par récurrence, on voit facilement que X_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n] + X_n^2\mathbb{E}[(1 - U_{n+1})|\mathcal{F}_n].$$

D'un autre côté, U_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}_n$. On en déduit que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U_{n+1}] + X_n^2\mathbb{E}[1 - U_{n+1}] = \frac{1 + X_n^2}{2} \geq X_n.$$

La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est bien une sous-martingale.

2. (a) X_{n+1} est une combinaison convexe de X_n^2 et 1. Ainsi, si X_n est dans $[0, 1]$, X_n^2 sera encore dans $[0, 1]$, et par combinaison convexe, X_{n+1} sera encore dans $[0, 1]$. Ainsi, pour $a \in [0, 1]$, la suite (X_n) sera à valeurs dans $[0, 1]$, donc bornée dans L^1. Comme $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale, le théorème de Doob assure que (X_n) converge presque sûrement vers une variable X^*.

   (b) $\mathbb{E}[X_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}\frac{1+X_n^2}{2}$. Par convergence dominée (par (a)), le membre de gauche converge vers $\mathbb{E}[X^*]$ tandis que le membre de droite converge vers $\mathbb{E}\frac{1+(X^*)^2}{2}$. On a donc
$$\mathbb{E}(X^*) = \mathbb{E}\left(\frac{1 + (X^*)^2}{2}\right).$$
   Mais comme $X^* \leq \frac{1+(X^*)^2}{2}$, on obtient que $X^* = \frac{1+(X^*)^2}{2}$ presque sûrement, d'où $X^* = 1$ presque sûrement.

Solution 23 1. Tout d'abord, remarquons que X_i étant borné par 1, S_n est une variable aléatoire bornée, de même que la variable $Y_n = S_n^2 - n$. Ainsi les variables considérées ont bien intégrables et admettent bien des espérances conditionnelles.

$$S_{n+1}^2 = (S_n+X_{n+1})^2 = S_n^2+X_{n+1}^2+2S_nX_{n+1} = S_n^2+1+2S_nX_{n+1},$$

car $X_{n+1} \in \{-1, 1\}$. Par suite

$$\forall n \geq 0 \quad Y_{n+1} = Y_n + 2S_nX_{n+1}.$$

S_n est la somme des X_i, pour $1 \leq i \leq n$, donc la variable S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, et par suite $S_n^2 - n = Y_n$ l'est aussi. Ainsi $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] = Y_n$. Comme S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on a également $\mathbb{E}[S_nX_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Cependant, par construction, X_{n+1} est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n$ (les X_i sont indépendants), donc $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$. Finalement, par linéarité $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. T est le temps d'entrée de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ dans le borélien $]-\infty, -R] \cup [R, +\infty[$. Comme $(S_n)_{n\geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ (on a vu que pour tout n, S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable), il s'ensuit que T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Mais $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Or, le théorème d'arrêt dit que lorsqu'on arrête une martingale adaptée à une filtration par un temps d'arrêt adapté à la même filtration, le processus obtenu est encore une martingale adaptée à cette filtration. Ainsi $(Y_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

   On va montrer que $|S_{T\wedge n}| \leq R$. On raisonne ici ω par ω, même si la dépendance en ω est laissée implicite pour ne pas surcharger les écritures.

   Par définition de T, on sait que $|S_n| < R$ pour $n < T$.

   Si $T = +\infty$, alors on a pour tout n, $n < T$ et $|S_{T\wedge n}| = |S_n| < R$. Supposons donc T fini. Comme $(|S_n|)$ est à valeurs entières, on a, pour $n < T$, $|S_n| \leq R-1$. Comme $S_T = S_{T-1} + X_T$, on a alors