déduit que $\mathbb{E}(X_i|X_1+\dots+X_n)=\mathbb{E}(X_1|X_1+\dots+X_n)$. En sommant pour i de 1 à n, on obtient par linéarité de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}(X_1+\dots+X_n|X_1+\dots+X_n)=n\mathbb{E}(X_1|X_1+\dots+X_n)$$

Mais $\mathbb{E}(X_1+\dots+X_n|X_1+\dots+X_n)=X_1+\dots+X_n$, donc

$$\mathbb{E}(X_1|X_1+\dots+X_n)=\frac{X_1+\dots+X_n}{n}.$$

Solution 2 : Posons $\psi(x)=(x_1,x_1+\dots+x_i)$. On a

$$(X_i,X_1+\dots+X_n)=\psi\circ\theta_i\circ X.$$

La loi de $(X_i,X_1+\dots+X_n)$ est la loi image de $\mathbb{P}_{\theta_{1,i}\circ X}$ par ψ. D'un autre côté, la loi de $(X_1,X_1+\dots+X_n)$ est la loi image de $\mathbb{P}_X$. Comme $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_{\theta_{1,i}\circ X}$, $(X_i,X_1+\dots+X_n)$ et $(X_1,X_1+\dots+X_n)$ ont même loi. Soit g telle que $\mathbb{E}(X_1|X_1+\dots+X_n)=g(X_1+\dots+X_n)$. D'après ce qu'on vient de montrer, le théorème 15 nous donne $\mathbb{E}(X_i|X_1+\dots+X_n)=g(X_1+\dots+X_n)$. On conclut comme précédemment en faisant la somme.

Solution 11 La variable U est $\sigma(X_1,\dots X_n)$-mesurable, tandis que V est $\sigma(X_{n+1},\dots X_{2n})$-mesurable. D'après le théorème d'associativité de l'indépendance, U et V sont donc indépendantes. D'après l'exercice précédent, on a pour tout i $\mathbb{E}(X_i|S)=\frac{S}{2n}$. Par linéarité de l'espérance conditionnelle, on obtient $\mathbb{E}(U|S)=\frac{S}{2}=\mathbb{E}(V|S)$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Covar}(U',V')&=\mathrm{Covar}(U',U')=\mathrm{Var}(S/2)\\&=\frac{2n\,\mathrm{Var}\,X_1}{4}=\frac{np(1-p)}{2}\neq 0,\end{aligned}$$

donc les deux variables ne sont pas indépendantes.

Solution 12 1. Pour qu'une matrice soit la matrice de covariance d'un vecteur gaussien, il faut et il suffit qu'elle soit symétrique et de type positif. Elle est clairement symétrique. La forme quadratique associée à M est

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=2(x^2+y^2+z^2)-xy+xz+yz\\&=(x-y/2)^2+(x+z/2)^2+\frac{(y+z)^2}{2}+\frac{5(y^2+z^2)}{4}\geq 0\end{aligned}$$