

Comme  $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{N=n\}}] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{\{N=n\}}]$ , on a finalement  $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A]$ , ce qui donne le résultat voulu puisque  $Y$  est  $\sigma(N)$ -mesurable.

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U\mathbb{1}_{\{T=n\}}) &= \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)\mathbb{1}_{T=n}) \\ &= \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T=n})\end{aligned}$$

par indépendance. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U\mathbb{1}_{\{T=n\}}) &= n\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T=n}) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(n\mathbb{1}_{T=n}) \\ &= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T\mathbb{1}_{T=n}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_1)T\mathbb{1}_{T=n}].\end{aligned}$$

~~où la dernière égalité est encore obtenue par indépendance.~~  
Avec la première question, on en déduit  $\mathbb{E}(U|T) = \mathbb{E}(X_1)T = qT$ .

**Solution 5** On a vu que  $\mathbb{E}[U|T] = \mathbb{E}[X_1]T = qT$  ; on en déduit  $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[U|T]) = \mathbb{E}(qT) = q\mathbb{E}[T] = q(\frac{1}{p}-1)$ , car  $1+T$  suit un loi géométrique de paramètre  $p$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T|U = k] &= \frac{\mathbb{E}T\mathbb{1}_{\{U=k\}}}{\mathbb{P}(U = k)} = \frac{\sum_{n \geq k} n\mathbb{P}(U = k, T = n)}{\sum_{n \geq k} \mathbb{P}(U = k, T = n)} \\ &= \frac{\sum_{n \geq k} np(1-p)^n \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}}{\sum_{n \geq k} p(1-p)^n \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}} \\ &= \frac{\sum_{n \geq k} nx^n \binom{n}{k}}{\sum_{n \geq k} x^n \binom{n}{k}} \text{ avec } x = (1-p)(1-q) \\ &= \frac{\sum_{n \geq k} (n+1)x^n \binom{n}{k}}{\sum_{n \geq k} x^n \binom{n}{k}} - 1 = \frac{\sum_{n \geq k} (k+1) \binom{n+1}{k+1} x^n}{\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n} - 1 \\ &= (k+1) \frac{\sum_{n \geq k} \binom{n+1}{k+1} x^n}{\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n} - 1\end{aligned}$$