B.2 Solutions des exercices sur l'espérance conditionnelle

Solution 3 On développe le produit. On a

$$(1+XY)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^k$$

À k fixé, comme X^k est $\sigma(X)$-mesurable, on a

$$\mathbb{E}(X^k Y^k | X) = X^k \mathbb{E}(Y^k | X).$$

Cependant, comme Y^k est indépendant de X, on a

$$\mathbb{E}(Y^k | X) = \mathbb{E}(Y^k).$$

Finalement, avec la linéarité de l'intégrale, on a

$$\mathbb{E}((1+XY)^n | X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{E}(Y^k) X^k,$$

d'où le résultat voulu avec $\alpha_k = \binom{n}{k}\mathbb{E}(Y^k)X^k$.

Solution 4 1. La condition est évidemment nécessaire d'après la définition de l'espérance conditionnelle car $\{N=n\}$ est $\sigma(N)$-mesurable Si A est $\sigma(N)$-mesurable, A s'écrit $A=\{N\in B\}$, où B est un borélien de $\mathbb{R}$. notons que comme N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a presque sûrement $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{\{N\in B\cap\mathbb{N}\}}$. On a

$$\begin{aligned} X\mathbb{1}_A &= X\mathbb{1}_{\{N\in B\cap\mathbb{N}\}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{n\in B} X\mathbb{1}_{\{N=n\}} \qquad = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{n\in B} X\mathbb{1}_{\{N=n\}} \end{aligned}$$

Comme $|\sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{n\in B} X\mathbb{1}_{\{N=n\}}| \le X$, avec le théorème de convergence dominée, on a $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{n\in B}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{N=n\}}]$. Les mêmes arguments donnent

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A] = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{n\in B}\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{\{N=n\}}].$$