où il arrive est perdu. On suppose A_n,B_n indépendants, les couples $(A_n, B_n)_{n\geq 1}$ indépendants, et

$$\mathbb{P}(A_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(A_n = 0) = 0,5,\ \mathbb{P}(B_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(B_n = 0) = 0,6.$$

Modéliser la situation par une chaîne de Markov , avec si possible un nombre d'états minimal. Quelle est la meilleure stratégie, quand on reçoit simultanément une offre de chaque type : donner la préférence à celle de type A ou à celle de type B ? On pourra faire appel au Théorème ergodique pour départager les deux politiques.

Exercice 109. *Chaîne de Markov réversible*.

1. Soit P une matrice de transition sur un espace d'états E dénombrable. On suppose qu'il existe une probabilité π telle que

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}.$$

   Montrer que π est stationnaire pour la dynamique de P.
2. Trouver rapidement la probabilité stationnaire de la marche aléatoire symétrique sur les sommets de l'hypercube de dimension d.

3. Marche aléatoire symétrique sur un échiquier (8×8). Calculer les temps de retours moyens des différents points de l'échiquier. (On trouvera 110 pour les coins, $220/3$ pour les autres points du bord, 55 pour les autres points.)

Exercice 110. *Loi de Pascal*.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p.

On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \text{ et } \tau_n = \inf\{k \geq 1; S_k \geq n\}.$$

La loi de S_n est appelée loi de Pascal (ou loi binomiale négative) de paramètres n et p.

1. Montrer que la suite $(\tau_i - \tau_{i-1})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes dont on précisera la loi.