$\mathcal{M}(S)$ est un convexe stable par $\mu \mapsto \mu M$. Ainsi, si μ est une mesure quelconque sur S, la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu M^k$$

est à valeurs dans $\mathcal{M}(S)$. On a $\mu_n(I - M) = \frac{\mu(I-M^n)}{n}$. Comme la suite $(\mu I - M^n)_{n\geq 0}$, est bornée, il s'ensuit que toute valeur d'adhérence de $(\mu_n)_{n\geq 0}$ est laissée fixe par M. Comme $\mathcal{M}(S)$ est compacte, $(\mu_n)_{n\geq 0}$ a au moins une valeur d'adhérence, donc M admet au moins une probabilité invariante.

— On peut proposer également une preuve plus algébrique, basée sur le théorème 72 de Perron–Frobenius. Si A est une matrice stochastique de taille $n \times n$ et $x \in \mathbb{R}^d$, il est aisé de voir que $\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$. On en déduit $|||A|||_\infty \leq 1$, et, a fortiori, $\rho(A) \leq 1$. Cependant le vecteur colonne $(1, \dots, 1)^*$ est vecteur propre à droite pour la valeur 1. On a donc $\rho(A) = 1$. Mais A et A^* ont des spectres conjugués, donc $\rho(A^*) = 1$. En appliquant le théorème de Perron–Frobenius, on obtient un vecteur x avec $x \succ 0$ et $A^* x = x$. Quitte à le renormaliser, on peut supposer que la somme des coefficients de x fait 1. Maintenant, $x^* A = x^*$, ce qui nous fournit donc une mesure de probabilité invariante.

✓

Corollaire 30. *Une chaîne de Markov irréductible dont l'espace d'états est fini est récurrente.*

Démonstration. Il suffit d'empiler les théorèmes 79 et 80. Cependant, si on souhaite une preuve plus directe, on peut remarquer que c'est une conséquence de l'exercice 65. ✓

Remarque-exercice : S'il est vrai qu'une chaîne de Markov avec un espace d'état fini admet toujours une mesure invariante ; en revanche elle n'admet pas toujours de probabilité réversible. Voici un exemple simple.