3. *$\forall i \in S$, $i$ est récurrent.*
4. *$\forall i, j \in S$ $\mathbb{P}^j(N_i = +\infty) = 1$.*

*Démonstration.* — (1) $\Longrightarrow$ (2). Soit $l$ tel que $\mathbb{P}^i(X_l = j) > 0$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^i(N_i = +\infty) &\geq \mathbb{P}^i(X_l = j, \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_{k+l}=i\}} = +\infty) \\ &\geq \mathbb{P}^i(X_l = j)\mathbb{P}^j(N_i = +\infty) > 0,\end{aligned}$$

donc $i$ est récurrent.

— (2) $\Longrightarrow$ (3). C'est une conséquence du corollaire précédent.

— (3) $\Longrightarrow$ (4). Considérons $\mathbb{P}^i(T_j < +\infty, \forall k > T_j \quad X_k \neq i)$. Comme $i$ et $j$ communiquent, $\mathbb{P}^i(T_j < +\infty) > 0)$. D'après la propriété de Markov forte, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^i(T_j < +\infty, \forall k > T_j, X_k \neq i) &= \mathbb{P}^i(T_j < +\infty)\mathbb{P}^j(\forall k > 0 X_k \neq i) \\ &= \mathbb{P}^i(T_j < +\infty)\mathbb{P}^j(T_i = +\infty).\end{aligned}$$

Mais $\{T_j < +\infty, \forall k > T_j X_k \neq i\} \subset \{N_i < +\infty\}$ et, comme $i$ est récurrent, $\mathbb{P}^i(N_i < +\infty) = 0$, donc

$$\mathbb{P}^i(T_j < +\infty)\mathbb{P}^j(T_i = +\infty) = 0.$$

Comme $\mathbb{P}^i(T_j < +\infty) > 0$, on a finalement $\mathbb{P}^j(T_i = +\infty) = 0$. Mais

$$N_i = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_{k+T_i}),$$

Donc d'après la propriété de Markov forte

$$\mathbb{P}^j(N_i = +\infty) = \mathbb{P}^i(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_k) = +\infty) = \mathbb{P}^i(N_i = +\infty) = 1.$$

— (4) $\Longrightarrow$ (1). Évident.

✓

**Définition:** Si une chaîne de Markov irréductible vérifie une des 4 propriétés équivalentes ci-dessus, on dit que c'est une *chaîne récurrente*.