La forme plus abstraite (encore !) du corollaire 26 est plutôt utilisée pour calculer des moments, ou des moments exponentiels de sommes de temps d'arrêts.

## 8.2 Classification des états

**Définition:** Soit $P = (p_{i,j})_{(i,j)\in S\times S}$ une matrice stochastique.
Pour $i \in S$, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ partant de l'état $i$ et de matrice de passage $P$. On pose $T_i = \inf\{n \geq 1; X_n = i\}$.

— Si $\mathbb{P}^i(T_i < +\infty) = 1$, on dit que l'état $i$ est *récurrent*.
— Inversement, si $\mathbb{P}^i(T_i < +\infty) < 1$, on dit que l'état $i$ est *transient* ou *transitoire*.

**Théorème 77.** *Soit $P = (p_{i,j})_{(i,j)\in S\times S}$ une matrice stochastique.*

*Pour $i \in S$, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ partant de l'état $i$ et de matrice de passage $P$. On pose $T_i = \inf\{n \geq 1; X_n = i\}$ et $N_i = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_k)$. $N_i$ représente le nombre de passage de la chaîne en $i$ à partir de l'instant 1.*

— *Si $i$ est transient, alors $1 + N_i$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)$. En particulier $N_i$ est presque sûrement fini et intégrable.*
— *Si $i$ est récurrent, alors $N_i$ est presque sûrement infinie sous $\mathbb{P}^i$. En particulier $\mathbb{E}^i[N_i] = +\infty$.*

*Démonstration.* Si $T_i < +\infty$ (ou de manière équivalente si $N_i > 0$, on a

$$N_i = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_{T_i+k}).$$

Soit $k$ un entier positif ou nul. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^i(N_i \geq k+1) &= \mathbb{P}^i(N_i \geq k+1, T_i < +\infty) \\ &= \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)\mathbb{P}^i\left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_{T_i+\ell}) \geq k | T_i < +\infty\right).\end{aligned}$$

Or $T_i$ est un temps d'arrêt. Donc, d'après la propriété de Markov forte, sachant $T_i < +\infty$, $(X_{T+\ell})_{\ell \geq 0}$ a la loi d'une chaîne de Markov commençant en $i$ et de matrice de transition $P$, c'est à dire la même loi que $(X_\ell)_{\ell \geq 0}$. On en déduit

$$\mathbb{P}^i(N_i \geq k+1) = \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)\mathbb{P}^i(N_i \geq k),$$

puis

$$\mathbb{P}^i(N_i \geq k) = \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)^k.$$

D'après le théorème de continuité séquencielle décroissante, on a

$$\mathbb{P}(N_i = +\infty) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}^i(N_i \geq k).$$

Cette limite vaut donc $0$ si $i$ est transient, $1$ si $i$ est récurrent. Pour $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^i(1 + N_i = k) &= \mathbb{P}^i(1 + N_i \geq k) - P(N_i \geq k) \\ &= \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)^{k-1} - \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)^k \\ &= \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)^{k-1}(1 - \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)), \end{aligned}$$

ce qui montre que $1 + N_i$ suit bien une loi géométrique de paramètre $1 - \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)$. De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^i(N_i) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}^i(N_i \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)^k = \frac{\mathbb{P}^i(T_i < +\infty)}{1 - \mathbb{P}^i(T_i < +\infty)} < +\infty. \end{aligned}$$

✓

**Corollaire 27.** *Un état $i$ est transient si et seulement si*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}^i(X_k = i) < +\infty.$$