

une chaîne de Galton-Watson de loi initiale $\mu_1 * \mu_2$ et de loi de reproduction ν avec immigration χ .

2. On note $\mathbb{Q}^k$ la loi d'un processus partant de k individus avec immigration, $\mathbb{P}^k$ la loi d'un processus partant de k individus sans immigration. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{Q}^0(Z_{n+1} = \alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \chi(k)(\mathbb{Q}_{Z_n}^0 * \mathbb{P}_{Z_n}^k)(\alpha).$$

7.7.2 Exercices non corrigés

Exercice 89. On considère une chaîne de Galton–Watson $(Y_n)_{n \geq 0}$ partant d'un unique individu, et dont la loi de reproduction ν admet un moment d'ordre 2. On note m l'espérance de ν et σ^2 sa variance. Montrer que

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}^2 | Y_n] = \sigma^2 Y_n + m^2 Y_n^2.$$

En déduire que la suite $v_n = \frac{1}{m^{2n}} \mathbb{E}Y_n^2$ vérifie la récurrence

$$v_{n+1} = \frac{\sigma^2}{m^{n+2}} + v_n. \quad (7.9)$$

Calculer la variance de Y_n .

Exercice 90. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et $X_1, \dots, X_N \dots$ une suite de variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , cette suite étant indépendante de N . À l'aide des résultats de l'exercice 86, montrer que la variable

$$S = X_1 + X_2 \cdots + X_N$$

suit la loi de Poisson de paramètre λp .

Exercice 91. *Pérennité d'altérations génétiques.*

Dans ce modèle, chaque gène particulier peut avec une certaine probabilité donner naissance à k descendants ($k \in \mathbb{N}$) qui sont des gènes de même espèce. Toutefois, il n'est pas impossible qu'un individu puisse donner naissance à un gène d'un autre type ou un gène mutant. Ce gène