4. On pose $Z_n = Y_{n\wedge\tau}$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, puis, à l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que

$$\mathbb{P}^x(\tau_a < \tau_b) = \mathbb{P}^x(Y_\tau = \frac{1}{1+a}) = \frac{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+1}}.$$

5. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}^x$ presque sûrement.
6. En déduire que $\mathbb{P}^x(\tau_a < +\infty) = \frac{a+1}{x+1}$.
7. On pose
$$I = \inf\{X_n; n \geq 0\}.$$
Montrer que sous $\mathbb{P}^x$, I suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, x\}$.

Exercice 71. *Une marche aléatoire sur le groupe affine Aff*$(\mathbb{F}_5)$. [9]
Le groupe des affinités sur $\mathbb{F}_5$ est formé des bijections de $\mathbb{F}_5$ dans lui-même qui s'écrivent $f(z) = az + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{F}_5^\times \times \mathbb{F}_5$. C'est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbb{F}_5)$. On définit une suite d'affinités aléatoires par $r_0 = \mathrm{Id}(\mathbb{F}_5)$, puis $r_{n+1} = f_{n+1} \circ r_n$, où $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'affinités aléatoires indépendantes de même loi, avec

$$\mathbb{P}(f_1 = g) = \mathbb{P}(f_1 = h) = \frac{1}{2}, \text{avec } g(z) = 2z \text{ et } h(z) = 3z + 1.$$

1. Montrer que $(r_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Est-elle irréductible, apériodique ?
2. On cherche à calculer $\mathbb{P}(r_{2n} = \mathrm{Id})$ par une méthode matricielle.
   (a) On ordonne les états dans l'ordre

$$\begin{array}{llll} z \mapsto z, & z \mapsto z+1, & \dots, & z \mapsto z+4, \\ z \mapsto 2z, & z \mapsto 2z+1, & \dots, & z \mapsto 2z+4, \\ z \mapsto 3z, & z \mapsto 3z+1, & \dots, & z \mapsto 3z+4, \\ z \mapsto 4z, & z \mapsto 4z+1, & \dots, & \mapsto 4z+4. \end{array}$$

9. Pour d'autres résultats sur les marches aléatoires sur les groupes affines $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$, on pourra se rapporter à l'ouvrage de Diaconis [13], exemple 4 page 34. Cet ouvrage est librement téléchargeable à l'adresse https ://projecteuclid.org/euclid.lnms/1215467407

Vérifier que la matrice de la chaîne (r_n) est

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & A & B & 0 \\ B & 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 & B \\ 0 & B & A & 0 \end{bmatrix},$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'usage d'un outil numérique de calcul peut simplifier le travail.

(b) Montrer que (r_{2n}) est une chaîne de Markov. La représenter à l'aide de la matrice

$$N' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & A' \end{bmatrix},$$

où $A' = AB + BA$ et $B' = A^2 + B^2$.

(c) On admet que $N'^2 + N' = 2J_{10}$, où J_{10} est la matrice 10×10 dont toutes les entrées sont égales à 1. Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$N'^n = \lambda_n J_{10} - (-1)^n N'.$$

(d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(r_{2n} = \mathrm{Id})$

3. On cherche toujours à calculer $\mathbb{P}(r_{2n} = \mathrm{Id})$, mais cette fois, on va utiliser des outils d'algèbre plus sophistiqués. On note G le sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbb{F}_5)$ engendré par $t : z \mapsto z+1$ et $s : z \mapsto -z$. G est le groupe diédral d'ordre 10. On admet les résultats d'algèbre suivants que l'on ne demande pas de redémontrer [10] :

$$\forall g \in G \quad \delta_{Id}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(\rho) \mathrm{Tr}\, \rho(g), \tag{6.15}$$

10. Voir par exemple [32], corollaire 4.6 p 211 pour la formule (6.15) et la section 1.3 page 227 pour les résultats sur les groupes diédraux.