Chapitre 5

Loi d'un processus

5.1 Loi d'un processus

Définition: Un processus stochastique est une famille infinie $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Le plus souvent, T est un ensemble ordonné qui joue le rôle du temps, par exemple $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$. Le cas $T = \mathbb{Z}^d$, qui évoque plutôt une structure spatiale est également intéressant.

Définition: On appelle trajectoire de X tout élément

$$X(\omega) = (X_n(\omega), n \in \mathbb{T}), \text{ pour un } \omega \in \Omega.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^T$ des trajectoires est appelé *espace canonique*.

Définition: On définit la tribu cylindrique sur $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}})$, comme étant la plus petite tribu qui rend mesurable les projections

$$\begin{aligned} \Pi_i : \mathbb{R}^{\mathbb{T}} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{T}} &\longmapsto \omega_i. \end{aligned}$$

On a vu au chapitre 3 que dans le cas où $\mathbb{T}$ est dénombrable, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}})$ coïncide avec la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$. Ce n'est plus vrai lorsque $\mathbb{T}$ est infini non-dénombrable. Néanmoins, comme seul le cas où $\mathbb{T}$ est dénombrable est étudié dans cet ouvrage, il n'y a pas de risque de contradiction entre les notations.