ρ. Mais à l'évidence, $\omega \mapsto 1+\mu(\Omega)$ est une densité de $\mu+\mathbb{P}$ par rapport à ρ. On a donc ρ-presque sûrement : $f+g=1+\mu(\Omega)$, et, de même, $f_n+g_n=1+\mu(\Omega)$. En particulier les suites (f_n) et (g_n) sont presque sûrement bornées, ρ-presque sûrement f_n tend vers f et g_n tend vers g. On a $\frac{d\mu_n}{d\rho}=\frac{d\mu_n}{d\mathbb{P}}\frac{d\mathbb{P}}{d\rho}$, soit $f_n=g_nM_n$ ρ-p.s. Sur l'ensemble $\{g>0\}$, on obtient donc ρ presque-sûrement.

$$\begin{aligned} f &= \lim_{n\to+\infty} f_n \\ &= \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty}(g_nM_n) \\ &= g\overline{\lim}_{n\to+\infty} M_n = gM. \end{aligned}$$

Comme $f+g=1+\mu(\Omega)$ presque sûrement, f et g ne peuvent être simultanément nuls : on a donc $\rho(\{M=+\infty\}\cap\{g>0\})=0$. De même, sur $\{M<+\infty\}\cap\{g=0\}$, on obtient ρ-presque sûrement $f=0$, ce qui est impossible : on a donc $\rho(\{M<+\infty\}\cap\{g=0\})=0$. Finalement $\rho(\{M<+\infty\}\Delta\{g>0\})=0$. Enfin

$$\begin{aligned} \mu(A\cap\{M<+\infty\}) &= \int_{A\cap\{M<+\infty\}} f \quad d\rho \\ &= \int_{A\cap\{M<+\infty\}} \frac{f}{g}g \quad d\rho \\ &= \int_{A\cap\{M<+\infty\}} Mg \quad d\rho \\ &= \int_{A\cap\{M<+\infty\}} M d\mathbb{P} = \int_A M d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

car le théorème de convergence des martingales entraîne

$$\mathbb{P}(M<+\infty)=1.$$

✓