Ainsi, si deux configurations x et y diffèrent en plus d'un site, la probabilité de passage $p(x,y)$ de x à y vaut zéro. En revanche, si x et y diffèrent en un unique site k, on a

$$p(x,y) = \frac{1}{|\Lambda|} \frac{\mu(y)}{\sum\limits_{z \in S; z_{k^c} = x_{k^c}} \mu(z)}.$$

La chaîne est apériodique car

$$p(x,x) = \frac{\mu(x)}{|\Lambda|} \sum_{k \in \Lambda} \left(\sum_{z \in S; z_{k^c} = x_{k^c}} \mu(z) \right)^{-1} > 0.$$

Le seul point un peu critique qu'il faut vérifier pour pouvoir appliquer le théorème de convergence des chaînes de Markov est celui de l'irréductibilité : il n'est pas automatique qu'on puisse passer de n'importe quel état de S à n'importe quel autre en changeant un point à la fois.

Une condition suffisante est que les lois conditionnelles d'une coordonnées sachant tous les autres chargent tous les points de E : dans ce cas, on peut passer d'une configuration à l'autre en changeant une coordonnée à la fois – et $|\Lambda|$ étapes suffisent.

3.3 Théorème de Radon–Nikodým

Le théorème qui suit donne une caractérisation simple de l'existence d'une densité d'une probabilité ou d'une mesure par rapport à une autre. C'est un résultat important, dont Rudin [20] n'hésite pas à dire qu'il est peut-être le théorème le plus important de la théorie de la mesure. De fait, certains auteurs (Billingsley [6], Dudley [14], Durrett [15]) utilisent le théorème de Radon–Nikodým pour définir l'espérance conditionnelle.

3.3.1 Le théorème

Définition. *Soient μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On rappelle qu'on dit qu'une mesure μ est une mesure absolument continue par rapport à la* *mesure ν, ce qui est noté $\mu \ll \nu$, si pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a : $\nu(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$.*

Lemme 6. *Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Si $\mu \ll \nu$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\nu(A) \leq \eta \Longrightarrow \mu(A) \leq \varepsilon$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout n, il existe A_n avec $\nu(A_n) \leq \frac{1}{n^2}$ et $\mu(A_n) > \varepsilon$. Si on pose $A = \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$, le lemme de Borel-Cantelli nous dit que $\nu(A) = 0$. Cependant, d'après le lemme de Fatou, on a $\mu(A) \geq \overline{\lim}\mu(A_n) \geq \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse. ✓

Théorème 38 (Radon–Nikodým)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que $\mathcal{F} = \sigma(A_n, n \geq 1)$.*

Alors $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{Q}$ admet une densité φ par rapport à $\mathbb{P}$, c'est à dire qu'on a la représentation,

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \varphi(x)\, d\mathbb{P}(x).$$

Démonstration. Bien sûr, si $\mathbb{Q} = \varphi\mathbb{P}$, on a $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Voyons la réciproque. Notons $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les ensembles $A_1, \dots, A_n$. $\mathcal{F}_n$ est engendrée par une partition finie mesurable $\mathcal{P}_n$, et l'on peut définir

$$X_n = \sum_{A\in\mathcal{P}_n} \frac{\mathbb{Q}(A)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{1}_A.$$

Notons qu'une fonction f $\mathcal{F}_n$-mesurable s'écrit $f = \sum_{A\in\mathcal{P}_n} \mathbb{1}_A \alpha(A)$.

Ainsi, on a $fX_n = \sum_{A\in\mathcal{P}_n} \frac{\mathbb{Q}(A)}{\mathbb{P}(A)} \alpha(A) \mathbb{1}_A$ et

$$\mathbb{E}[fX_n] = \sum_{A\in\mathcal{P}_n} \mathbb{Q}(A)\alpha(A) \quad = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sum_{A\in\mathcal{P}_n} \alpha(A)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]. \tag{3.10}$$

Comme f est aussi $\mathcal{F}_{n+1}$-mesurable, on a $\mathbb{E}[fX_{n+1}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f)$, d'où $\mathbb{E}[fX_n] = \mathbb{E}[fX_{n+1}]$. Ainsi, on a $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale positive.

L'équation (3.10) nous sera encore utile par la suite. Elle exprime que X_n est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}_n$. Montrons que $(X_n)_{n\geq 1}$ est équi-intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 6, il existe η tel que $\mathbb{P}(B) \leq \eta \Longrightarrow \mathbb{Q}(B) \leq \varepsilon$. Soit $c > 1/\eta$. Comme $\mathbb{1}_{\{X_n > c\}}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on a

$$\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{X_n > c\}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{X_n > c\}}] = \mathbb{Q}(X_n > c).$$

Par définition de η, pour montrer que $\mathbb{Q}(X_n > c) \leq \varepsilon$, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(X_n > c) \leq \eta$. Or, l'inégalité de Markov nous donne

$$\mathbb{P}(X_n > c) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{c}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1] = \frac{1}{c} \leq \eta,$$

ce qui donne l'équi-intégrabilité de la suite (X_n). Comme (X_n) est une martingale positive, X_n converge presque sûrement vers une fonction positive φ, et on a $\mathbb{E}[\varphi] \leq \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1] = 1$. Soit $A \in \mathcal{F}_n$. Pour tout $p \geq n$, on a $A \in \mathcal{F}_p$, d'où

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}(X_p \mathbb{1}_A).$$

Comme $(X_p \mathbb{1}_A)_p$ est équi-intégrable, de limite $\mathbb{P}$-presque sûre $\varphi \mathbb{1}_A$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathbb{E}[X_p \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\varphi \mathbb{1}_A]$, soit $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[\varphi \mathbb{1}_A]$. Ainsi, les mesures $\mathbb{Q}$ et $\varphi\mathbb{P}$ coïncident sur $\bigcup\limits_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$. Comme ce π-système engendre la tribu $\mathcal{F}$, les deux mesures coïncident et φ est bien la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$. ✓

Le lemme suivant permet d'étendre de nombreux résultats des mesures de probabilité aux mesures σ-finies.

Lemme 7. *Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini, alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et une fonction μ-presque sûrement positive f tels que f est la densité de $\mathbb{P}$ par rapport à μ et $1/f$ la densité de μ par rapport à $\mathbb{P}$.*

Démonstration. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite avec $0 < \mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$ et $\Omega = \cup_{n\geq 1} A_n$. On pose

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} \mathbb{1}_{A_n}.$$

$\mathbb{P} = f\mu$ est une mesure. Avec le théorème de Tonelli, on a

$$\mathbb{P}(\Omega) = \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \mu(A)} \mathbb{1}_A \, d\mu$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \mu(A)} \mu(A) = 1.$$

$\mathbb{P}$ est donc bien une mesure de probabilité, de densité f par rapport à μ. Maintenant, pour g mesurable positive, on a

$$\int g \, d\mu = \int g \, \frac{1}{f} f \, d\mu = \int g \, \frac{1}{f} \, d\mathbb{P},$$

ce qui montre que $1/f$ est la densité de μ par rapport à $\mathbb{P}$. ✓

Corollaire 13 (Radon–Nikodým)**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable.* μ *et* ν *deux mesures* σ*-finies sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*. On suppose qu'il existe une suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *tels que* $\mathcal{F} = \sigma(A_n, n \geq 1)$*.*

Alors $\mu \ll \nu$ *si et seulement si* μ *admet une densité* φ *par rapport à* ν*, c'est à dire qu'on a la représentation,*

$$\mu(A) = \int_A \varphi(x) \, d\nu(x).$$

Démonstration. Là encore, la condition est nécessaire. Ensuite, construisons $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ telles que données par le lemme 7. On a $\mathbb{Q} \ll \mu$, $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mathbb{P}$, donc $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Avec le théorème, $\mathbb{Q}$ admet une densité par rapport à $\mathbb{P}$. Considérons les densités respectives $\frac{d\mu}{d\mathbb{Q}}$, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, $\frac{d\mathbb{P}}{d\nu}$ de μ par rapport à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ par rapport à ν. En appliquant 3 fois le théorème de transfert, on voit que

$$\frac{d\mu}{d\mathbb{Q}} \cdot \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \cdot \frac{d\mathbb{P}}{d\nu}$$

est une densité de μ par rapport à ν. ✓

Remarque: Dans les théorèmes de Radon–Nicodým, l'hypothèse d'existence d'une famille dénombrable engendrant la tribu est par exemple vérifiée dans le cas où $\mathcal{F}$ est la tribu borélienne d'un espace séparable. Toutefois, il faut noter que cette hypothèse n'est pas nécessaire, les théorèmes de Radon–Nicodým pouvant se démontrer directement par des techniques hilbertiennes [20].