3.2.3 Échantillonneur de Gibbs

Le résultat qui suit est très important en simulation : il exprime que si on sait simuler (la loi de) X et les lois conditionnelles de Y sachant X, on sait simuler le couple (X, Y).

Théorème 36. *Soient E et F deux espaces polonais, et μ une loi sur le produit $E \times F$. On note classiquement X, Y les projections sur les deux coordonnées. μ_X (resp. μ_Y) est la loi image de μ par la projection X (resp. Y). On note encore $\tilde{\mu}_x$ la loi (sous μ) de Y sachant $X = x$.*

On suppose maintenant qu'on a un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel vivent

- *une variable aléatoire X' à valeurs dans E avec $\mathbb{P}_{X'} = \mu_X$.*
- *une variable aléatoire U à valeurs dans un espace métrique G, indépendante de X'.*

On suppose enfin qu'on dispose d'une fonction mesurable $\varphi : E \times G \to F$ telle que pour tout $x \in E$, $\varphi(x, U)$ suit la loi $\tilde{\mu}_x$.

Alors, le couple $(X', \varphi(X', U))$ suit la loi μ. En particulier $\varphi(X', U)$ suit la loi μ_Y.

Démonstration. Soient A et B des boréliens de E et F On a

$$\mathbb{P}(X' \in A, \varphi(X', U) \in B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X')\mathbb{1}_B(\varphi(X', U))].$$

Comme X' et U sont indépendants, on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X')\mathbb{1}_B(\varphi(X', U))|X'] = \psi(X'),$$

avec

$$\psi(x) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(\varphi(x, U))] = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{P}(\varphi(x, U) \in B) = \mathbb{1}_A(x)\tilde{\mu}_x(B).$$

En réintégrant, on a maintenant

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X' \in A, \varphi(X', U) \in B) = \mathbb{E}[\psi(X')] &= \int_E \psi(x)\, d\mathbb{P}_{X'} \\ &= \int_E \psi(x)\, d\mu_X = \mu(A \times B) \end{aligned}$$

avec (3.4). ✓