Calcul de la loi conditionnelle pour des vecteurs à densité

Théorème 35. *Si la loi $\mathbb{P}_{X,Y}$ admet une densité $f(x,y)$ par rapport à une mesure produit $\mu \otimes \nu$, alors la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est donnée par la mesure μ_x de densité*

$$y \mapsto \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_F f(x,y')\, d\nu(y')}$$

par rapport à ν.

Avant de procéder à la preuve, remarquons que ν peut être aussi bien la mesure de Lebesgue ou une mesure de comptage.

Démonstration. En effet, on sait que X admet par rapport à μ la densité $x \mapsto f_X(x) = \int_F f(x,y)\, d\nu(y)$. f_X est $\mathbb{P}_X$-presque partout strictement positif, donc μ_x est bien défini pour $\mathbb{P}_X$ presque tout x. Ainsi, pour $\mathbb{P}_X$ presque tout x, on peut écrire

$$\mu_x(B) = \frac{\int_F \mathbb{1}_B(y) f(x,y)\, d\nu(y)}{\int_F f(x,y)\, d\nu(y)} = \frac{\int_F \mathbb{1}_B(y) f(x,y)\, d\nu(y)}{f_X(x)}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&\int_E \mathbb{1}_A(x) \mu_x(B)\, d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_E \left(\mathbb{1}_A(x) \frac{\int_F \mathbb{1}_B(y) f(x,y)\, d\nu(y)}{f_X(x)} f_X(x) \right) d\mu(x) \\
&= \int_E \int_F \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(y) f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) \\
&= \int_{E\times F} \mathbb{1}_{A\times B}(x,y)\, d\mathbb{P}_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}((X,Y) \in A \times B),
\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat voulu. ✓

Exemple: supposons que (X,Y) est gaussien de centrage

$$(m_X, m_Y) = (\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y)$$