Supposons (3.7). Comme F est polonais, il existe une famille dénombrable d'ouverts $(O_n)_{n\geq 1}$ telle que décrite dans le théorème 31. Soit $n \geq 1$. Par composition, l'application $\omega \mapsto \nu_{X(\omega)}(O_n)$ définit une variable aléatoire $\sigma(X)$-mesurable. Soit $A' \in \sigma(X)$. On a $A' = X^{-1}(A)$ pour un certain $A \in \mathcal{B}(E)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\nu_X(O_n)\mathbb{1}_{A'}) &= \mathbb{E}(\nu_X(O_n)\mathbb{1}_A(X)) \\ &= \int \nu_x(O_n)\mathbb{1}_A(x)\, d\mathbb{P}_X(x) \quad = \mathbb{P}((X,Y) \in A \times O_n) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\in A}\mathbb{1}_{\{Y\in O_n\}}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A'}\mathbb{1}_{\{Y\in O_n\}}].\end{aligned}$$

Ainsi $\nu_X(O_n)$ est une version de l'espérance conditionnelle de $\mathbb{1}_{\{Y\in O_n\}}$ sachant X. En particulier, d'après (3.4), $\tilde{\mu}_X(O_n)$ est une version de l'espérance conditionnelle de $\mathbb{1}_{\{Y\in O_n\}}$ sachant X.

Il existe donc un ensemble Ω_n de probabilité 1 sur lequel les applications $\omega \mapsto \nu_{X(\omega)}(O_n)$, et $\omega \mapsto \tilde{\mu}_{X(\omega)}(O_n)$ coïncident.

Avec le choix des O_n fait grâce au théorème 31, il est maintenant clair que pour $\omega \in \cap_{n\geq 1}\Omega_n$, les probabilités $\nu_{X(\omega)}$et $\tilde{\mu}_{X(\omega)}$ coïncident, ce qui donne le premier résultat.

Supposons maintenant que $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace mesuré polonais. À ω fixé, on a $(\mathbb{P}_\omega^{\sigma(X)})_Y(B) = \mathbb{P}_\omega^{\sigma(X)}(Y^{-1}(B))$.

Comme $Y^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega)$, la définition de la probabilité conditionnelle entraîne que l'application $\omega \mapsto \mathbb{P}_\omega^{\sigma(X)}(Y^{-1}(B))$ est $(\Omega, \sigma(X)) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et $\mathbb{P}_\omega^{\sigma(X)}(Y^{-1}(B))$ est une version de l'espérance conditionnelle de l'espérance conditionnelle de $\mathbb{1}_{Y^{-1}(O_n)} = \mathbb{1}_{\{Y\in O_n\}}$ sachant X. Prenant comme précédemment $A' \in \sigma(X)$, On a $A' = X^{-1}(A)$ pour un certain $A \in \mathcal{B}(E)$, et les propriétés classiques de l'espérance conditionnelle entraînent (3.7), ce qui permet de conclure vu le premier point.

✓