$$\omega \mapsto (\mathbb{P}_\omega^{\sigma(X)})_Y,$$

où $\omega \mapsto \mathbb{P}_\omega^{\sigma(X)}$ est une version de la loi conditionnelle de $\mathbb{P}$ sachant $\sigma(X)$.[5]

On rappelle que la notation m_Y désigne la mesure image, de m par Y, en particulier, si f est mesurable bornée, avec le théorème de transfert

$$\int_F f\ d\left((\mathbb{P}_\omega^{\sigma(X)})_Y\right) = \int_\Omega f(Y)\ d\mathbb{P}_\omega^{\sigma(X)},$$

ainsi $\omega \mapsto \int f\ d\left((\mathbb{P}_\omega^{\sigma(X)})_Y\right)$ est une version de l'espérance conditionnelle de $f(Y)$ sachant X.

Malheureusement, cette définition semble un peu trop abstraite pour pouvoir être exploitée directement. On va essayer tout de même essayer d'utiliser le théorème 32, mais en s'appuyant sur l'étude d'un cas particulier plus précis.

Un cas particulier

Un cas particulier important est le cas où l'espace Ω est le produit $\Omega = E \times F$ de deux espaces polonais[6].On prend pour $\mathbb{P}$ une mesure μ quelconque sur $(E \times F, \mathcal{B}(E \times F))$[7].

Théorème 33. *Soient E et F des espaces polonais, μ une mesure de probabilité sur $E \times F$. On note X la projection sur la première coordonnée, Y la projection sur la deuxième coordonnée, et μ_X la mesure image de μ par X. Alors, il existe une famille $(\tilde{\mu}_x)_{x\in E}$ de mesures de probabilités telle que $x \mapsto \tilde{\mu}_x$ soit $(E, \mathcal{B}(E))$-$(M_1(F), \mathcal{T})$-mesurable, et telle que pour toute application f mesurable positive, on a*

$$\int_{E\times F} f\ d\mu = \int_E \left(\int_F f(x,y)\ d\tilde{\mu}_x(y)\right)\ d\mu_X(x).$$

5. A priori, cette application dépend de la version de la loi conditionnelle choisie. On verra plus tard, comme d'habitude, qu'il y a identité à un négligeable près.

6. Typiquement $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$

7. On préfère temporairement la lettre μ à la la lettre $\mathbb{P}$ car nous sommes sur un espace particulier.