La limite g est $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) - (E, \mathcal{B})$ mesurable comme limite simple d'applications $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) - (E, \mathcal{B})$ mesurables.[2]

Pour tout $\omega \in \Omega_1$, on a $f_n(X(\omega)) = \varphi_n(Y(\omega))$ qui converge vers $Y(\omega)$, donc $X(\omega) \in C$, et $g_n(X(\omega)) = f_n(X(\omega))$ converge vers $Y(\omega)$. Comme $g_n(X(\omega))$ converge vers $g(X(\omega))$, on a $Y(\omega) = g(X(\omega))$, ce qui est le résultat voulu. ✓

Théorème 28. *Un produit dénombrable d'espaces polonais est polonais.*

Démonstration. Soient (E_i, d_i) des espaces polonais. Vu le corollaire précédent, il suffit de montrer que $E = \prod_{i=1}^{+\infty} E_i$ a une partie dénombrable dense. Notons D_i une partie dénombrable dense dans E_i et x^* un élément quelconque de $\prod_{i=1}^{+\infty} E_i$. Posons $D = \cup_{n \geq 1} \mathcal{E}_n$, avec

$$\mathcal{E}_n = \prod_{i=1}^{n} D_i \times \prod_{i=n}^{+\infty} \{x_i^*\}.$$

$\mathcal{E}_n$ est dénombrable pour tout n, donc D est dénombrable. Montrons que D est dense dans $\prod_{i=1}^{+\infty} E_i$. Soit x dans E et $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $\pi 2^{-n} \leq \varepsilon$. Par densité, on peut trouver $y \in E_n$ tel que pour tout i entre 1 et n, $d(y_i, x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} \arctan d_i(x_i, y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \arctan d_i(x_i, y_i) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} 2^{-i} \arctan d_i(x_i, y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} 2^{-i} \pi/2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \varepsilon/2 + \sum_{i=n+1}^{+\infty} 2^{-i} \pi/2 \\
&\leq \varepsilon/2 + 2^{-n} \pi/2 \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

✓

2. Cette propriété est bien connue pour des variables aléatoires réelles. Le cas des variables à valeur dans un espace métrique sera traité en exercice.