Pour traiter le cas général, on a besoin d'une technique d'approximation : considérons une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E qui est dense dans E. On pose alors pour tout $y \in E$:

$$\varphi_n(y) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i<k} \mathbb{1}_{\{d(y,y_i)>d(y,y_k)\}} \prod_{k<i\leq n} \mathbb{1}_{\{d(y,y_i)\geq d(y,y_k)\}} y_k.$$

Comme les fonctions $y \mapsto d(y, y_i)$ sont continues, elles sont $(E, \mathcal{B}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Ainsi, les fonctions $y \mapsto d(y, y_i) - d(y, y_k)$ sont $(E, \mathcal{B}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables : on en déduit que les ensembles $\{d(y, y_i) > d(y, y_k)\}$ et $\{d(y, y_i) \geq d(y, y_k)\}$ sont dans $\mathcal{B}$, puis que φ_n est $(E, \mathcal{B}) - (E, \mathcal{B})$-mesurable. $\varphi_n(y)$ est l'élément le plus proche de y parmi $y_1, \dots, y_n$ (on prend celui de plus petit index en cas d'égalité). Comme la suite (y_n) est dense dans E, $\varphi_n(y)$ converge vers y quand n tend vers l'infini. [1]

Prenons maintenant Y générale. Si on pose $Y_n = \varphi_n(Y)$, Y_n est une fonction $(\Omega_1, \mathcal{F}_1) - (E, \mathcal{B})$ mesurable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs : on peut écrire $Y_n = f_n(X)$, où f_n est une application $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) - (E, \mathcal{B})$ mesurable.

Comme (E, d) est complet, si on pose

$$C = \{x \in \Omega_2; (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ converge } \},$$

on a

$$C = \cap_{k\geq 1} \cup_{N\geq 1} \cap_{n,p\geq N} \{d(f_n(x), f_p(x)) \leq 1/k\},$$

donc $C \in \mathcal{F}_2$. Soit $z_0 \in E$ quelconque. On pose

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in C \\ z_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est aisé de voir que g_n est encore $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) - (E, \mathcal{B})$ mesurable. Par construction, $g_n(x)$ converge pour tout x.

1. Si $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{R}^d$, on peut prendre plus simplement $\varphi_n(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}(\|x\|)$.