$\{1,\dots,m\}$ prenant a_i fois la valeur i. On a la formule du multinôme :

$$\left(\sum_{j=1}^{m} X_j\right)^n = \sum_{(a_1,\dots,a_m)} \binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_m} \prod_{k=1}^{m} X_k^{a_k},$$

où la sommation a lieu sur les m-uplets d'entiers naturels de somme n.

(c) On note $\varphi_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ la fonction caractéristique du vecteur $(V_n - d)/S$. Montrer que

$$\forall u \in \mathbb{R}^m \quad \varphi_n(u) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{m} Y_k e^{iu_k}\right)^n.$$

(d) Montrer que $V_n/(Sn+d)$ converge en loi vers Y.

(e) Identifier la loi de W.

Toute la preuve semble reposer sur l'identité miraculeuse (2.4). En réalité, l'équation (2.3) entraîne que les T_i sont échangeables, c'est à dire que leur loi est invariante par toute permutation d'un nombre fini de coordonnées. Dans ce cas, un théorème de De Finetti–Hewitt–Savage entraîne que conditionnellement à une certaine tribu $\mathcal{T}$, les T_i sont indépendants et de même loi. Ici, par exemple on peut démontrer que

$$\mathbb{P}(T_1 = t_1, \dots T_n = t_n | W) = \prod_{i=1}^{m} W_{t_i},$$

ce qui entraîne (2.4).

Exercice 26. *Loi forte des grands nombres de Kolmogorov*.

1. Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et φ une fonction croissante de $\mathbb{N} \to]0,+\infty[$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$. On suppose que la série de terme général $(\frac{x_n}{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\varphi(n)} = 0.$$

Ce résultat constitue le lemme de Kronecker.