

2.8 Exercices sur les martingales

2.8.1 Exercices corrigés

Exercice 21. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ une filtration à laquelle la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ et le temps d'arrêt τ sont adaptés. On suppose que τ est presque sûrement fini.

1. Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$S = \sum_{k=1}^{\tau} f(X_k).$$

Montrer que S est $\mathcal{F}_{\tau}$ -mesurable.

2. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. On note $T_A = \inf\{n \geq 1; X_n \in A\}$. À l'aide de la question précédente, montrer que $\{T_A > \tau\} \in \mathcal{F}_{\tau}$.
3. Plus généralement, montrer que si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêts adaptés à une filtration, alors $\{\tau_2 > \tau_1\} \in \mathcal{F}_{\tau_1}$.

Exercice 22. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit par récurrence une suite X_n par $X_0 = a$ et $X_{n+1} = U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n^2$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale.
2. On suppose maintenant que $a \in [0, 1]$.
 - (a) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X^* .
 - (b) Donner la valeur de X^* .

Exercice 23. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Sur cet espace, on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telles que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$