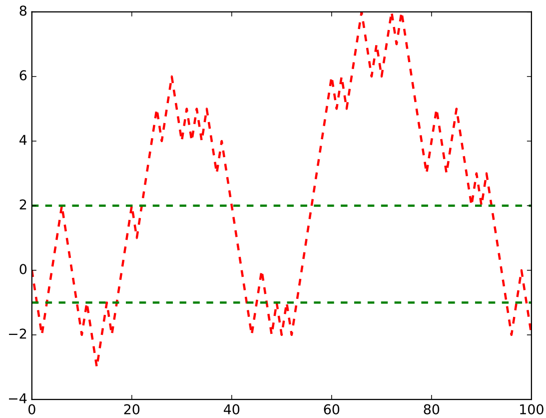

FIGURE 2.1 – Sur le graphe ci-dessous, une simulation de la marche aléatoire simple (ou marche de l'ivrogne) sur $\mathbb{Z}$ avec trois traversées montantes de l'intervalle $[-1, 2]$ entre les instants 0 et 100.

On a

$$U_n^{[a,b]} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\tau_k \le n\}}.$$

On a bien une description de $U_n^{[a,b]}$ à l'aide de temps d'arrêts. On va maintenant relier ces temps d'arrêts aux variations d'une martingale.

Posons pour $n \geq 1$: $Y_n = \frac{(X_n-a)^+}{b-a}$ et, par convention, $Y_0 = 0$.

Comme $|Y_n| \leq \frac{1}{b-a}(|X_n|+|a|)$, Y_n est bien intégrable. Comme $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale et que la fonction $\varphi(x) = \frac{(x-a)^+}{b-a}$ est croissante et convexe, $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale.

Montrons que $\mathbb{1}_{\{\tau_k \le n\}} \leq Y_{n\wedge\tau_k} - Y_{n\wedge\sigma_k}$: il y a trois cas possibles.

— si $\sigma_k > n$.

Alors $\tau_k > n$: on a

$$\mathbb{1}_{\{\tau_k \le n\}} = 0 = Y_n - Y_n = Y_{n\wedge\tau_k} - Y_{n\wedge\sigma_k}.$$