Soit donc $\varepsilon > 0$. On note que

$$R_n \leq 2 \sup_{i \geq n} |X_n - X_i|.$$

~~On en déduit~~ $\cancel{\{R_n > \varepsilon\} \subset \cup_{i \geq n} \{|X_n - X_i| > \varepsilon/2\}}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(R_n > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\sup_{i \geq n} |X_n - X_i| > \varepsilon/2).$$

D'après le théorème de continuité séquentielle croissante, on a

$$\mathbb{P}(\sup_{i \geq n} |X_n - X_i| > \varepsilon/2) = \sup_{N \geq n} \mathbb{P}(\sup_{n \leq i \leq N} |X_n - X_i| > \varepsilon/2).$$

La suite $(X_n - X_i)_{i \geq n}$ est une martingale ; d'après le théorème 16, la suite $((X_n - X_i)^2)_{i \geq n}$ est une sous-martingale positive : l'inégalité de Kolmogorov nous donne

$$\mathbb{P}(\sup_{n \leq i \leq N} |X_n - X_i|^2 > \varepsilon^2/4) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(X_n - X_N)^2.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(R_n > \varepsilon) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sup_{N \geq n} \mathbb{E}(X_n - X_N)^2,$$

cette dernière suite tend bien vers 0, puisque $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en moyenne quadratique.

✓

Corollaire 3. *Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et de carré intégrable. On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_n^2) < +\infty$. Alors, la série de terme général Y_n converge presque sûrement et dans L^2.*

Démonstration. Si on pose $M_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, on a déjà noté que $(M_n)_{n \geq 1}$ était une martingale centrée. Elle est bornée dans L^2, car

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n^2) = \mathrm{Var}(M_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) \leq C = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k^2) < +\infty. \end{aligned}$$

C'est une martingale bornée dans L^2 : elle converge presque sûrement et dans L^2. ✓