Démontrons maintenant l'analogue du lemme 1.1 : si f est un élément positif de L^2, on a

$$\mathbb{E}(f\mathbb{1}_{\{Pf<0\}}) = \mathbb{E}(Pf\mathbb{1}_{\{Pf<0\}}).$$

Mais la classe de fonctions $f\mathbb{1}_{\{Pf<0\}}$ est une classe de fonctions positives, donc $\mathbb{E}(f\mathbb{1}_{\{Pf<0\}}) \geq 0$; de même $Pf\mathbb{1}_{\{Pf<0\}}$ est une classe de fonctions négatives, donc $\mathbb{E}(Pf\mathbb{1}_{\{Pf<0\}}) \leq 0$.

Finalement $Pf\mathbb{1}_{\{Pf<0\}} = 0$, soit $(Pf)^- = 0$, ce qui signifie que Pf est un élément positif.

Soit maintenant $f \in L^2$:

Par linéarité, on a $Pf = Pf^+ - Pf^-$, d'où

$$\|Pf\|_1 \leq \|Pf^+\|_1 + \|Pf^-\|_1.$$

Mais Pf^+ est positive, donc $\|Pf^+\|_1 = \mathbb{E}Pf^+$. En utilisant (1.3), il vient que $\|Pf^+\|_1 = \mathbb{E}f^+$. De la même manière $\|Pf^-\|_1 = \mathbb{E}f^-$. Finalement, on a

$$\|Pf\|_1 \leq \mathbb{E}f^+ + \mathbb{E}f^- = \mathbb{E}|f| = \|f\|_1.$$

Ainsi, P prend ses valeurs dans $H \cap V_1 \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et définit une application linéaire continue de $(V_2, \|.\|_1)$ dans $(L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \|.\|_1)$. Comme V_2 est une partie dense de V_1, l'application P admet un unique prolongement linéaire continu $\tilde{P}$ de $(V_1, \|.\|_1)$ dans $(L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \|.\|_1)$.

Ce prolongement a la même norme d'opérateur :

$$\forall f \in L^1 \quad \|\tilde{P}f\|_1 \leq \|f\|_1.$$

Par ailleurs, l'ensemble des (classes de) fonctions positives est fermé dans L^1, donc la propriété de positivité est conservée par $\tilde{P}$:

$$\begin{aligned} \forall f \in L_1 \quad & f \geq 0 \Longrightarrow \tilde{P}f \geq 0 \\ \text{et } \forall f, g \in L_1 \quad & f \geq g \Longrightarrow \tilde{P}f \geq \tilde{P}g. \end{aligned}$$