On en déduit

$$\begin{aligned}&\left|\varphi_{\frac{\zeta^*(1/2+h)}{\sqrt{\zeta(1+2h)}}}(t)-\exp(-\frac{t^2}{2})\right|\\&\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\cos\left(\frac{t\zeta(1+2h)^{-1/2}}{n^{1/2+h}}\right)-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\frac{\zeta(1+2h)^{-1}}{n^{1+2h}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Mais il existe $A$ tel que pour tout réel $x$ $|\cos(x)-\exp(-\frac{x^2}{2})|\leq Ax^4$. On en déduit pour $h\in]0,1]$ :

$$|\varphi_{\frac{\zeta^*(1/2+h)}{\sqrt{\zeta(1+2h)}}}(t)-\exp(-\frac{t^2}{2})|\leq\frac{At^4}{\zeta(2+2h)}\zeta(1+2h)^{-2}\leq\frac{At^4}{\zeta(4)}\zeta(1+2h)^{-2}.$$

Il est bien connu que $\zeta(1+h)\sim h^{-1}$ au voisinage de $0$ : on en déduit la convergence de $\varphi_{\frac{\zeta^*(1/2+h)}{\sqrt{\zeta(1+2h)}}}(t)$ vers $\exp(-\frac{t^2}{2})$, et donc, d'après le théorème de Lévy, la convergence en loi de $\frac{\zeta^*(1/2+h)}{\sqrt{\zeta(1+2h)}}$ vers $\mathcal{N}(0,1)$, puis, avec l'équivalent $\zeta(1+2h)\sim(2h)^{-1}$, la convergence en loi voulue.

Donnons une preuve courte de l'équivalent $\zeta(1+h)\sim h^{-1}$ au voisinage de $0$ : avec l'inégalité des accoissements finis, on a, pour $h>0$,

$$|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{1+h}}-\sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^{1+h}}\,dt|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2+h}}\leq\zeta(2),$$

d'où

$$\zeta(1+h)=\frac{1}{h}+O(1).$$

✓