La preuve est un peu compliquée. On aurait envie de faire plus court, et de dire : d'après le Théorème 1, la loi image de $\text{ber}(1/2)^{\otimes\mathbb{N}}$ par

$$x \mapsto \psi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}$$

est $U[0,1]$. Or, la loi de $(Y_n)_{n\geq 0}$ est $\text{ber}(1/2)^{\otimes\mathbb{N}}$, donc $V = \psi((Y_n)_{n\geq 0}$ est $U[0,1]$. Ce genre de raisonnement sera facile avec la notion de loi d'un processus, que nous verrons au chapitre 5.

Cependant, nous pouvons déjà donner comme conséquence le résultat suivant :

Théorème 3. *Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda_{|[0,1[})$, on peut faire vivre une suite de variables indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.*

Démonstration. Il suffit de poser $Z_j = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^2_{(2j+1)2^i}}{2^{i+1}}$ et d'appliquer consécutivement les deux théorèmes précédents. ✓

0.3 Inégalités ; lois des grands nombres

Les variables de Bernoulli de paramètre $1/2$ ont leurs soeurs jumelles : les variables de Rademacher, qui valent 1 et -1 avec probabilité $1/2$. Ainsi X suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ si et seulement si $Y = 2X - 1$ est une variable de Rademacher.

Les sommes $B_n = X_1 + \dots X_n$ et $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ sont liées par $S_n = 2B_n - n$. Ainsi, les (S_n), qui forment une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, sont liées à la loi binomiale. On transfère ainsi couramment et facilement les résultats de l'un vers l'autre.

On sait par exemple que si les (Y_i) sont des Rademacher indépendantes, la loi des grands nombres dit que la suite $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ est telle que S_n/n tend vers 0 presque sûrement. Peut-on faire mieux ? Oui.

Théorème 4. *Soient $(Y_i)_{i\geq 1}$ des variables de Rademacher indépendantes. Pour tout $\alpha > 1/2$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n^\alpha} = 0.$$