$\omega \in [0,1[$*, on a*

$$\omega = X_0(\omega) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A_i^g(\omega)}{g^{i+1}} \text{ avec } A_i^g \in \{0,1,\ldots,g-1\}.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$*, la suite* $(A_i^g(\omega))_{i\geq 0}$ *contient une infinité de termes différents de* $g-1$ *: c'est le développement* g*-adique de* ω*. La suite* $(A_i^g)_{i\geq 0}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur* $\{0,\ldots,g-1\}$*. En particulier, pour* $g=2$*,* $(A_i^g)_{i\geq 0}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre* $1/2$*.*

Démonstration. Par définition de la partie fractionnaire, il est immédiat que la suite des X_i^g prend ses valeurs dans $[0,1[$. Comme $0 \leq gX_i^g < g$, il est également clair que A_i^g prend ses valeurs dans $\{0,\ldots,g-1\}$. On a $gX_i = \lfloor gX_i \rfloor + \{gX_i\}$, soit $gX_i = A_i + X_{i+1}$, ou encore $\frac{X_i}{g^i} = \frac{A_i}{g^{i+1}} + \frac{X_{i+1}}{g^{i+1}}$. Ainsi

$$\sum_{i=j}^{n} \frac{A_i}{g^{i+1}} = \sum_{i=j}^{n} \left(\frac{X_i}{g^i} - \frac{X_{i+1}}{g^{i+1}} \right) = \frac{X_j}{g^j} - \frac{X_{n+1}}{g^{n+1}}.$$

Soit, en faisant tendre n vers l'infini : $\frac{X_j}{g^j} = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{A_i}{g^{i+1}}$. En particulier, pour $j=0$, on obtient l'écriture voulue. Reste à voir que A_i ne peut être constamment égal à $g-1$ à partir d'un certain rang. En effet, si on avait $A_i = g-1$ pour $i \geq j$, on aurait $X_j = g^j \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{g-1}{g^{i+1}} = 1$, ce qui est exclu, car $X_j \in [0,1[$.

On va montrer par récurrence que pour tout n, on a H_n :

— $(A_0,\ldots,A_n)$ et X_{n+1} sont indépendants

— $(A_0,\ldots,A_n)$ suit la loi uniforme sur $\{0,\ldots,g-1\}^{n+1}$

— X_{n+1} suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Notons d'abord que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\{A_{n-1} = b_{n-1}, X_n \in J\} &= \{\lfloor gX_{n-1} \rfloor = b_{n-1}, \{gX_{n-1}\} \in J\} \\ &= \{gX_{n-1} \in J + b_{n-1}\} = \left\{ X_{n-1} \in \frac{J + b_{n-1}}{g} \right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n=1$, on a

$$\mathbb{P}(A_0 = b_0, X_1 \in J) = \mathbb{P}(X_0 \in \frac{J+b_0}{g}) = \lambda(\frac{J+b_0}{g}) = \frac{1}{g}\lambda(J),$$