ISSN 0984-631X

1994

RAPPORTS DE JURYS DE CONCOURS

Agrégation mathématiques

concours externe

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

Direction des personnels enseignants des lycées et collèges

AGREGATION de MATHEMATIQUES

Concours externe

Rapport de Madame G.POURCIN
Professeur à l'Université d'ANGERS
Présidente du Jury

1994

CENTRE NATIONAL DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUE

"LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY"

COMPOSITION DU JURY

Mme Geneviève POURCIN	Professeur à l'Université d'ANGERS Présidente
M. Gilbert DEMENGEL	Inspecteur Général de l'Education Nationale Vice-Président
M. Jacques CAMUS	Professeur à l'Université Campus Beaulieu à RENNES Vice-Président
Mme Nicole DELEAU	Inspecteur Général de l'Education Nationale Vice-présidente
M. Jean Pierre ALLARD	Professeur agrégé au Lycée Cézanne à AIX EN PROVENCE
M. Pierre ARNOUX	Professeur à l'Université d'AIX-MARSEILLE II
Mme Nicole BERLINE	Maître de conférences à l'Ecole Polytechnique de PARIS
Mme Marie Thérèse BERMOND	Professeur agrégé au lycée Saint Louis à PARIS
Mme Christine BERNARDI	Directeur de Recherche au CNRS
M. Bernard BESANCON	Professeur agrégé au Lycée Schweitzer à MULHOUSE

.../...

M. Michel BOUTEMY	Professeur agrégé au Lycée Thuillier à AMIENS
M. Jean BRETAGNOLLE	Professeur à l'Université de PARIS XI
M. Robert CABANE	Professeur agrégé au Lycée Pasteur à PARIS
M. Pierre CARTIER	Professeur au CNRS
M. Bernard COUPET	Professeur à l'Université de MARSEILLE I
M. Jean COURSOL	Maître de conférences à l'Université de PARIS XI
M. Renaud DANSET	Professeur agrégé au Lycée Charlemagne à PARIS
M. Gérard DEBEAUMARCHE	Professeur agrégé au Lycée Clémenceau à REIMS
M. Makhlouf DERRIDJ	Professeur à l'Université de ROUEN
Mme Jacqueline DETRAZ	Professeur à l'Université d'AIX MARSEILLE I
M. Yves DUVAL	Professeur agrégé au lycée de ST MAURS
M. Jean Denis EIDEN	Professeur agrégé au Lycée Fabert à METZ
M. Philippe ESPERRET	Professeur agrégé au Lycée Henri IV à PARIS
M. Jean Yves ETESSE	Professeur à l'Université de RENNES I
M. Daniel FERRAND	Professeur à l'Université de RENNES I
M. Jean Pierre FRANCOISE	Professeur à l'Université de PARIS VI
M. Robert GERGONDEY	Assistant agrégé à l'Université de LILLE I
M. Paul GERARDIN	Professeur à l'Université de PARIS VII
Mme Edwige GODLEWSKI	Maître de conférences à l'Université de PARIS VI
M. Pierre JULG	Chargé de Recherche au CNRS
M. Christian KASSEL	Directeur de Recherche au CNRS
M. Gilles LACHAUD	Directeur de Recherche au CNRS

.../...

M. Eric LEBORGNE	Professeur agrégé au Lycée Paul Valéry à PARIS
M. Emile LE PAGE	Professeur à l'Université de TOURS
M. Roland LOUBOUTIN	Professeur agrégé au Lycée Berthelot à ANNECY
M. Pascal MASSART	Professeur à l'Université de PARIS XI
M. Jean Yves MERINDOL	Professeur à l'Université de STRASBOURG
M. Christian MAUDUIT	Professeur à l'Université d'AIX-MARSEILLE II
M. Jean Pierre MARCO	Maître de conférences à l'Université de PARIS VI
M. Jean Louis NICOLAS	Professeur à l'Université de LYON I
Mme Marie Aline PERY	Professeur agrégé au Lycée Saint Louis à PARIS
M. Alain POMMELET	Professeur agrégé au Lycée Louis le Grand à PARIS
M. Bernard RANDE	Professeur agrégé au Lycée Clémenceau à NANTES
Mme Anne RAOULT	Professeur agrégé au Lycée Condorcet à PARIS
M. Alain REMONDIERE	Professeur agrégé au Lycée La Pérouse à ALBI
M. Alain ROUAULT	Professeur à l'Université de VERSAILLES-SAINT-QUENTIN
M. Marc ROSSO	Professeur à l'Université de STRASBOURG I
M. Daniel ROUX	Professeur agrégé au Lycée Blaise Pascal à CLERMONT FERRAND
Mme Claudine RUGET	Inspecteur Général de l'Education Nationale
M. Xavier SAINT-RAYMOND	Professeur à l'Université de NANTES
M. Nicolas TOSEL	Professeur agrégé au Lycée Descartes à TOURS

.../...

M. Emmanuel RIO Chargé de Recherche au CNRS - Université PARIS-SUD

M. Jean Pierre VIAL Professeur agrégé au lycée Buffon à PARIS

M. Jean VOEDTS Professeur agrégé au Lycée Faidherbe à LILLE

M. Eric VAN DER OORD Professeur agrégé au Lycée Chateaubriand à RENNES

M. Hervé VAN de VEN Chargé de Recherche au CNRS

BILAN SOMMAIRE de la SESSION de 1994

La séssion de 1994 s'est déroulée suivant le calendrier ci-dessous .

ECRIT :

Mathématiques générales	19 avril de 9 heures à 15 heures
Analyse	20 avril de 9 heures à 15 heures
Mathématiques appliquées	21 avril de 9 heures à 15 heures.

La liste d'admissibilité a été affichée le 10 juin 1994 à la DPE,34 rue de Châteaudun , PARIS 9°et sur MINITEL.

ORAL:

L'oral a commencé le 25 juin et s'est terminé le 24 juillet .La liste d'admission a été affichée le 26 juillet à la DPE puis sur MINITEL.

Comme en 1993 , 484 postes étaient mis au concours cette année .Sur les 3242 inscrits, 1925 ont participé aux trois épreuves écrites .Le nombre d'admissibles a été de 716 dont 38 candidats à l'Agrégation marocaine ou à l'Agrégation tunisienne .Ces 38 canditats n'ont pas passé l'oral devant le jury de l'Agrégation française et ne figurent donc pas dans les statistiques d'admission .

Les admis se répartissent en 415 français, un ressortissant non français de la CEE et 4 étrangers hors CEE.Des statistiques détaillées se trouvent dans les pages suivantes .Le premier admissible avait une moyenne de 20 sur 20 ,le dernier une moyenne 6,62 sur 2O.Le premier admis atteint une moyenne de 20 sur 20 et les derniers admis une moyenne de 6,87 sur 20.

On constate avec plaisir la présence de 11 étudiants parmi les 50 premiers admis . Les 71 élèves des ENS admis se répartissent entre le premier et le 381ème rang .

Alors que seulement 213 certifiés se sont présentés au Concours ,le nombre d'étudiants présents est passé de 379 en 1991 à 959 cette année .Les candidats ayant reçu une formation d'ingénieurs, certains même ayant déjà exercé en entreprise ,sont de plus en plus nombreux: 48 inscrits en 1991 et 193 cette année; 14 présents en 1991 et 55 cette année ; 8 ingénieurs ont été admis(es).

En conclusion cette année a été marquée par un accroissement important du nombre de candidats confirmant ainsi l'attrait de ce Concours et du métier d'enseignant. L'importance du nombre d'étudiants dans cet effectif souligne le rôle des universités dans la formation des nouveaux agrégés ;les efforts consentis par celles-ci dans la mise en place des préparations au Concours portent leurs fruits et doivent être soutenus .

AGREGATION EXTERNE:MATHEMATIQUES 1994

les candidats étrangers sont comptés comme les autres dans les histogrammes

TOTAL	Inscrits: 3242	Présents : 1925	Admissibles: 716	Admis : 420
Nés après 1942:	Inscrits: 3231	Présents : 1920	Admissibles: 716	Admis : 420
FEMMES	Inscrites: 1043	Présentes: 661	Admissibles: 196	Admises: 121
FRANCAIS	Inscrits: 2969	Présents : 1811	Admissibles: 668	Admis : 416
ETRANGERS	Inscrits: 273	Présents : 114	Admissibles: 48	Admis : 4

CENTRES D'ECRIT AGREGATION EXTERNE:MATHEMATIQUES 1994

	insc.	pres.	admb.	reçus		insc.	pres.	admb.	reçus
DIVERS	90	35	5	2	AIX	157	106	25	9
AMIENS	54	19	3	1	BESANCON	57	33	14	6
BORDEAUX	117	83	31	22	BREST	53	32	12	7
CAEN	77	51	12	4	CLERMONT F	48	29	13	6
DIJON	55	30	14	7	GRENOBLE	117	70	31	19
LILLE	206	120	32	16	LIMOGES	17	7	2	1
LYON	150	108	65	45	METZ	36	21	4	1
MONTPELLIE	84	56	13	8	NANCY	67	40	12	7
NANTES	168	96	17	11	NICE	62	44	13	9
ORLEANS	48	29	8	6	PARIS	875	464	207	158
POITIERS	56	37	21	9	REIMS	54	30	12	9
RENNES	121	81	28	20	ROUEN	71	25	4	0
STRASBOURG	94	72	25	12	TOULOUSE	174	116	43	20
TOURS	29	23	10	4	SAINT DENI	22	11	1	1
RABAT	28	26	23	0	TUNIS	55	31	16	0

CATEGORIES AGREGATION EXTERNE:MATHEMATIQUES 1994

	Insc.	Pres.	Admb.	Reçus.	Suppl		Insc.	Pres.	Admb.	Reçus.	Suppl
DIVERS	300	139	64	19	0	ETUDIANT	1272	959	437	274	0
IUFM 1 ALL	68	48	18	12	0	IUFM 1 NON	94	61	12	8	0
ENS	87	74	74	71	0	IUFM 2	208	120	25	6	0
BIADM	31	22	9	1	0	CERTIFIE	507	213	22	5	0
PLP2	15	6	0	0	0	M.A	117	56	7	4	0
ENS.PRIVE	246	124	13	5	0	FONCT.DIVE	32	14	7	6	0
INGENIEUR	193	55	21	8	0	SECTEUR PR	24	9	0	0	0
CERT STAG	33	17	4	0	0	CONTRACT.P	15	8	3	1	0

ACADEMIES AGREGATION EXTERNE:MATHEMATIQUES 1994

	Insc.	Pres.	Admb.	Reçus.	Suppl		Insc.	Pres.	Admb.	Reçus.	Suppl
PARIS	875	464	207	158	0	AIX MARSE	167	112	25	9	0
BESANCON	57	33	14	6	0	BORDEAUX	156	96	33	23	0
CAEN	79	52	12	4	0	CLERMONT	48	29	13	6	0
DIJON	55	30	14	7	0	GRENOBLE	118	71	32	19	0
LILLE	206	120	32	16	0	LYON	150	108	65	45	0
MONTPELLI	88	58	14	9	0	NANCY MET	103	61	16	8	0
POITIERS	84	63	44	9	0	RENNES	174	113	40	27	0
STRASBOUR	94	72	25	12	0	TOULOUSE	174	116	43	20	0
NANTES	168	96	17	11	0	ORLEANS T	77	52	18	10	0
REIMS	54	30	12	9	0	AMIENS	54	19	3	1	0
ROUEN	71	25	4	0	0	LIMOGES	17	7	2	1	0
NICE	117	75	29	9	0	ANTILLE G	26	9	0	0	0
CORSE	6	1	0	0	0	REUNION	24	13	2	1	0

AGREGATION EXTERNE:MATHEMATIQUES 1994

Dans les statistiques qui suivent les moyennes et quartiles portent sur les notes non nulles

Écrit: épreuve 1 notes sur 20
Nombre de candidats présents: 2087
Nombre de copies blanches ou nulles: 41
Nombre de copies non nulles: 2046
Moyenne des copies non nulles: 5.4
Quartiles (arrondis à l'entier le plus proche) Q1:8 Q2:5 Q3:2

Écrit: épreuve 2 notes sur 20
Nombre de candidats présents: 1972
Nombre de copies blanches ou nulles: 8
Nombre de copies non nulles: 1964
Moyenne des copies non nulles: 6.4
Quartiles (arrondis à l'entier le plus proche) Q1:9 Q2:6 Q3:4

Écrit: épreuve 3 notes sur 20
Nombre de candidats présents: 1925
Nombre de copies blanches ou nulles: 19
Nombre de copies non nulles: 1906
Moyenne des copies non nulles: 6.4
Quartiles (arrondis à l'entier le plus proche) Q1:9 Q2:6 Q3:3

Quartiles par option d'écrit (arrondis)

INFORMATIQUE	198 candidats	Q1: 9	Q2: 6	Q3: 3
MECANIQUE	216 candidats	Q1: 9	Q2: 6	Q3: 3
ANALYSE NUMERIQU	822 candidats	Q1: 9	Q2: 6	Q3: 3
PROBABILITES	670 candidats	Q1: 9	Q2: 6	Q3: 3

Oral: épreuve 1 notes sur 20
Nombre de candidats présents: 651
Moyenne: 7.3
Quartiles (arrondis à l'entier le plus proche) Q1:11 Q2:7 Q3:4

Oral: épreuve 2 notes sur 20
Nombre de candidats présents: 653
Moyenne: 6.4
Quartiles (arrondis à l'entier le plus proche) Q1:9 Q2:6 Q3:3

Écrit: nombre de candidats ayant obtenu une moyenne supérieure ou égale à
16: 4 15: 15 14: 35 13: 58 12: 81 11: 106 10: 142
9: 203 8: 285 7: 400 6: 564 5: 786 4:1056 3:1355 2:1612 1:1779

nombre d'admissibles ayant obtenu une moyenne finale supérieure ou égale à
17: 5 16: 8 15: 16 14: 26 13: 45 12: 70 11: 95 10: 124
9: 161 8: 220 7: 322 6: 420 5: 542 4: 629 3: 650

CONCOURS : AGREGATION EXTERNE

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

LISTE PRINCIPALE DES CANDIDATES ET CANDIDATS
DECLARES ADMIS

SOUS RESERVE QUE LES INTERESSES REMPLISSENT LES CONDITIONS REQUISES PAR LES TEXTES LEGISLATIFS ET REGLEMENTAIRES REGISSANT LE CONCOURS.

77	MR	ABERGEL MEREDITH OLIVIER	PARIS
347	MR	ACHAB MAXIME	PARIS
114	MR	ADAMOWICZ OLIVIER CHARLES DANIEL	LYON
288	MLE	ADOBET CELINE HELENE	ORLEANS
3	MLE	AFTALION AMANDINE	PARIS
168	MR	AGNESE PATRICK	GRENOBLE
412	MR	AGULLO OLIVIER	MONTPELLIER
144	MR	ALBESPY EMMANUEL	TOULOUSE
269	MLE	ALBOUY PATRICIA	TOULOUSE
390	MR	ALBUGUES ALAIN VINCENT LEON	MONTPELLIER
303	MR	ALEXANDER DAVID	METZ
400	MLE	ALI CHERIF CELINE NATACHA	PARIS
412	MLE	ALIBERT ANGELIQUE VIOLAINE DELP	TOULOUSE
354	MR	ANSIAUX XAVIER PIERRE ARSENE	REIMS
373	MR	ARAB LAKHDAR	PARIS
321	MR	ARBEIT LAURENT	STRASBOURG
254	MR	ARPIN DANIEL JOSEPH	GRENOBLE
38	MR	AUDIGIE GILLES	TOULOUSE
153	MR	AUGUSTO FELANZINO	BORDEAUX
241	MR	AUVRAY BENOIT ALAIN RENE	LYON
65	MR	BAILLY MAITRE GILLES JEAN LUC	PARIS
188	MLE	BALESTA CELINE	PARIS
400	MR	BARDET JEAN-MARC	PARIS
400	MR	BARROIN HENRI	ORLEANS
301	MR	BAUMANN ALAIN ANDRE PIERRE	PARIS
2	MR	BAUMANN PIERRE	PARIS
138	MR	BEAU PATRICK	PARIS
297	MR	BECHOUCHE PHILIPPE	NICE
336	MR	BECK PASCAL ANDRE	BREST
279	MR	BELLIEUD MICHEL PHILIPPE ALAIN	NICE
342	MR	BERAUD THIERRY FRANCIS OLIVIER	GRENOBLE
303	MLE	BERGOUNHOU BETTINA	TOULOUSE
34	MR	BERNARD PATRICK	PARIS
39	MR	BERNARD PHILIPPE JEAN LAURENT	PARIS
120	MR	BERNET PIERRE-FRANCOIS	PARIS
378	MR	BERTOLINO DIDIER GILBERT	NICE
110	MME	BEVIN SOPHIE ANNE EPOUSE DIALLO	PARIS
37	MR	BIGORGNE CHRISTOPHE	LYON
65	MR	BLANCHARD EMMANUEL AUGUSTE MARIE	LYON
52	MR	BLANCHARD HUGUES ALEXANDRE	PARIS
269	MR	BLANCHET FRANCOIS JEAN PHILIPPE	GRENOBLE

111	MR	BONICI JEAN MARC	PARIS
226	MR	BONNAFOUX RENAUD	PARIS
263	MLE	BONNET MARIE-ADELINE	GRENOBLE
32	MR	BORNE NIELS	LYON
339	MLE	BORON KARINE LUCIE MARTHE	TOULOUSE
120	MR	BOSTEL NICOLAS ALAIN MARIE	LYON
297	MR	BOUDET JEAN-FRANCOIS JACKY PAT	LYON
275	MR	BOUHINEAU DENIS JEAN ROGER	GRENOBLE
50	MLE	BOULHOL VERONIQUE	PARIS
251	MR	BOURGEOIS PIERRE EUGENE ROBERT	RENNES
316	MLE	BOUVERET ANNE DOMINIQUE STEPHANE	GRENOBLE
236	MR	BRACCO OLIVIER	STRASBOURG
68	MR	BRIEND JEAN-YVES GERARD	LYON
362	MR	BRONNER ROLAND	TOULOUSE
71	MR	BRUGGER PATRICK DANIEL	LYON
90	MLE	BRULEBOIS CECILE ANNE	GRENOBLE
357	MR	BRULEY JEAN-MARC REGIS GERARD	GRENOBLE
307	MR	BRUYERE FRANCK GEORGES MARIE	PARIS
412	MR	BRUYERE GILLES CHRISTIAN	GRENOBLE
104	MR	CABAL MARC PATRICK GUY	PARIS
94	MR	CADET VINCENT BENOIT PIERRE	NICE
21	MLE	CALLENDREAU VALERIE MICHELLE	PARIS
190	MLE	CAMARASA MAGALI FLOR	AIX
133	MR	CARLIER THIERRY RENE MAURICE	PARIS
379	MR	CASTILLO SEBASTIEN OLIVIER	ORLEANS
107	MR	CAUSSE SHANE GERARD WILLIAM	PARIS
224	MLE	CENRAUD MARIE-SYLVIE	CLERMONT FERRAND
186	MLE	CHABANAS SYLVIE ANNE	GRENOBLE
160	MR	CHABANEL FRANCOIS PAUL TOUSSAINT	PARIS
70	MR	CHABOT NICOLAS EMILE ANTOINE	LYON
328	MR	CHANZY JEAN	PARIS
241	MR	CHAPRON SYLVAIN	CAEN
191	MLE	CHARLAT MURIELLE	PARIS
406	MME	CHASSERIAU ANNE EPOUSE LACOIN	BORDEAUX
30	MR	CHATELAIN THIERRY ANDRE PAUL	BESANCON
145	MLE	CHEVALIER ODILE CATHERINE	AIX
285	MLE	COLETTI ANNE	PARIS
75	MR	COLIN VINCENT MAURICE	PARIS
199	MR	COLLION STEPHANE MARC PHILIPPE	PARIS
60	MR	COMPARAT DANIEL PIERRE	PARIS
397	MLE	CONSTANT ALINE SYLVIE	REIMS

95	MR	CORBIN LAURENT GERARD ANDRE	PARIS
220	MLE	CORDON GWENAELLE MARIE	RENNES
387	MR	COREL EDUARDO	PARIS
290	MLE	CORPELET CECILE JACQUELINE	REIMS
67	MR	CORSO STEFAN REMY ETIENNE	PARIS
275	MR	COURET CHRISTOPHE GUY RENE	CLERMONT FERRAND
63	MR	COURNEDE BORIS SEBASTIEN	PARIS
61	MR	COUSTILLAS CHRISTIAN	LYON
248	MR	CRABEIL NOEL ANDRE MARIE-JOSEPH	NANTES
228	MR	CRESPIN GILLES NICOLAS	LYON
248	MLE	CULOT ANNE-CECILE	PARIS
54	MR	DAKHLI YASSINE	LYON
57	MR	DAMBREVILLE FREDERIC CLAUDE JOSE	PARIS
199	MLE	DAMIANI MARIE-ANGELE	PARIS
328	MR	DANIEL STEPHANE	BORDEAUX
381	MLE	DASINI CAROLINE SOPHIE	PARIS
334	MR	DAUMAS MARC PATRICE FRANCOIS	LYON
201	MR	DAUPLAIS MARC	PARIS
82	MR	DE GARIDEL-THORON THOMAS HENRI SYLVIE	PARIS
203	MR	DEBAT JOEL	PARIS
85	MR	DEBRABANT PATRICE MICHEL PIERRE	LYON
9	MR	DEHON MARC-HENRI	REIMS
16	MR	DEHORTER GUILLAUME BERTRAND	PARIS
352	MLE	DELAGE MARIE-PIERRE BERNADETTE	POITIERS
28	MR	DELANNAY PASCAL HENRI GEORGES	GRENOBLE
263	MR	DELENTE FABRICE ERIC JEAN	CAEN
230	MR	DELIGAND JEROME JEAN-FRANCOIS	PARIS
392	MR	DELPLACE DENIS SIMON CLEMENT	LILLE
140	MR	DENARIE JEAN-NICOLAS ALEXANDRE	LYON
393	MR	DEPERNET JEAN-PIERRE FRANCOIS	REIMS
156	MR	DEQUERO LAURENT PIERRE	PARIS
90	MR	DERRIEN JEAN-MARC	RENNES
168	MR	DESCHAMPS BRUNO BERNARD	PARIS
36	MR	DESTAINVILLE NICOLAS	PARIS
406	MR	DEUZET GUY	SAINT DENIS REUNION
375	MME	DEVANNE CLAIRE MARIE MARCELLE EPOUSE BARRE	NANTES
57	MR	DHOTE JEROME	PARIS
371	MR	DINI JAMAL	PARIS
33	MR	DOUMAL PHILIPPE ERIC	PARIS
325	MR	DRUILHET PIERRE	TOULOUSE
193	MR	DUCOS LIONEL LEON DENIS	POITIERS
104	MLE	DUCOULOUX ISABELLE MARGUERITE	STRASBOURG
313	MR	DUCROS JEROME	PARIS
390	MR	DUCROT BRUNO	REIMS
367	MR	DUMOUTET EMMANUEL	CLERMONT FERRAND
307	MME	DUPHIL ANNE-LAURENCE MARIE LUC EPOUSE KOEHL	PARIS
152	MR	DUPONT SERGE NICOLAS	PARIS
285	MLE	DUROT CECILE	PARIS
273	MLE	DURRA AGNES MARIE-GABRIELLE	MONTPELLIER
406	MR	DUVAL JULIEN	STRASBOURG
117	MLE	ECHEGUT GUILLEMETTE	PARIS
48	MLE	ELLIAUTOU LAURENCE	PARIS
215	MLE	ETIENNE ANNE	STRASBOURG
357	MR	EXERTIER WILLIAM JEAN PHILIPPE	LYON
248	MR	FACE CHRISTIAN	PARIS
313	MR	FADILI EL-HASSAN	TOULOUSE
23	MR	FARTOUKH STEPHANE DAVID	PARIS
41	MR	FAUCHEUX IVAN	PARIS
45	MR	FAUCONNET MICHEL PIERRE	LYON
55	MR	FEHRENBACH JEROME JUAN	PARIS
281	MR	FIAT OLIVIER THIERRY	LIMOGES
313	MLE	FIOL CLARISSE MARIE-JOSEE	NICE
373	MR	FOURLINNIE HERVE PATRICK JEAN	LILLE
412	MR	FRANCHE ALAIN	LILLE
192	MR	FRANCILLARD DENIS JEAN-YVES	GRENOBLE
400	MME	FREDERICH MARIE PIERRE ANNE EPOUSE MEYNARD	PARIS
350	MR	GAGNE SEBASTIEN CHRISTOPHE	ORLEANS
46	MR	GALLEZOT BENJAMIN	PARIS
184	MLE	GALMICHE FABIENNE GENEVIEVE	NANCY
114	MLE	GASC HELENE ROSE JOELLE	PARIS
106	MR	GAUCHEZ DAMIEN	PARIS
285	MR	GENTIL THIERRY	RENNES
24	MME	GERARD ANNE-ELISABETH EPOUSE MIQUEL	PARIS
89	MR	GERMA LAURENT SIMON MARC	PARIS
172	MR	GERMAIN DIDIER FRANCOIS ALBERT	LYON
146	MR	GIACOMONI JACQUES	PARIS
272	MR	GILBERT LAURENT BRUNO JEAN	AIX
156	MR	GIORGETTI ALAIN GEORGES MARCEL	ABIDJAN
412	MLE	GIRARDIN VALERIE	PARIS
367	MR	GLISIA JEAN	BORDEAUX

84	MME	GOBERT SOPHIE GISELE EPOUSE CASSAN	PARIS
236	MR	GODINEAU OLIVIER NICOLAS	RENNES
299	MR	GOJON ALAIN MICHEL	GRENOBLE
97	MR	GOULARD LAURENT FRANCOIS	TOULOUSE
216	MR	GOURLAY BORIS	TOULOUSE
275	MR	GRANDJEAN VINCENT JEAN HENRI	RENNES
362	MLE	GRAVOT FREDERIQUE ANNE LAURE	RENNES
86	MLE	GROS CATHERINE	TOULOUSE
18	MR	GRUNSPAN CYRIL JEAN PIERRE	PARIS
15	MR	GUEDJ VINCENT MICHEL	PARIS
284	MLE	GUEGAN ANNE HELENE	PARIS
380	MR	GUIDEZ YANN-MICHAEL	BORDEAUX
381	MLE	GUILLO BENEDICTE DENISE	PARIS
301	MLE	GUINARD ISABELLE MARIE-FRANCE P	RENNES
305	MR	HA DUONG MINH XAVIER	PARIS
61	MR	HACHE CHRISTOPHE	LYON
153	MR	HADJADJ PATRICK JOEL	LYON
98	MR	HALBERSTADT MARC MICHEL JACQUES	PARIS
47	MR	HALBOUT GILLES MICHEL CLAUDE	PARIS
103	MR	HALLOUIN EMMANUEL	POITIERS
153	MLE	HAMON CHRISTINE MYRIAM	BORDEAUX
76	MLE	HARDIN DELPHINE MICHELE	PARIS
316	MLE	HARDY ISABELLE NATACHA MARYLI	CAEN
92	MLE	HELME-GUIZON LAURE	PARIS
59	MR	HENRIO YANNICK	LYON
367	MLE	HENRY MARIE-CONSTANCE	PARIS
362	MR	HERAULT ALEXIS MICHEL	DJIBOUTI
268	MR	HEROULT FRANCOIS CLAUDE	PARIS
400	MR	HILDEVERT YUSUF	MONTPELLIER
142	MR	HIVERT FLORENT	PARIS
118	MR	HOANG PHILIPPE FERNAND XAVIER	NANCY
281	MR	HUART DAVID	CLERMONT FERRAND
212	MLE	HUGUENIN EMMANUELLE	NANCY
35	MR	HUVENT GERY JEAN JOCELYN	LILLE
111	MR	JACQUARD BENJAMIN EMILAND	PARIS
334	MR	JACQUOT BRUNO JACQUES MICHEL	DIJON
230	MR	JANVIER PHILIPPE	BORDEAUX
292	MME	JEANJEAN MARIE-PIERRE ANNE EPOUSE BOZON	AMIENS
211	MLE	JEANNEY LAURENCE MARIE-FRANCOIS	NANCY
93	MR	JOINEAU CHRISTOPHE	RENNES

251	MLE	JOUBERT CAROLINE MARCELLE SYLVI	POITIERS
43	MR	JUNCA STEPHANE	NICE
19	MR	KAPOUDJIAN CHRISTOPHE ANDRE	LYON
269	MLE	KERDELHUE MARIELLE KARINE	BREST
128	MR	KHUAT-DUY DAVID TAM	PARIS
279	MR	KONRADOWSKI NICOLAS	LILLE
350	MR	KRIKORIAN LAURENT	AIX
283	MLE	L'HOSPITAL LAURENCE	CLERMONT FERRAND
172	MR	LABBE CHRISTOPHE	LILLE
119	MR	LACRESSE HERVE	NANCY
236	MR	LADET JEAN-PIERRE MAX J-MICHE	TOULOUSE
1	MR	LAFFORGUE VINCENT	PARIS
324	MR	LALANDE FRANCK	PARIS
78	MR	LAMARI AHCENE	PARIS
7	MR	LAMBERT CHRISTOPHE GUY	LYON
342	MR	LAMBIN ERIC	LYON
135	MR	LANNUZEL ARTHUR VICTOR	BESANCON
27	MR	LANZMANN EMMANUEL DAVID	PARIS
225	MME	LAROCHE FRANCOISE EPOUSE GODEL	PARIS
258	MR	LARROUTUROU PIERRE	BORDEAUX
170	MLE	LASNIER KARINE MONIQUE MARIE	POITIERS
228	MR	LASVENES PHILIPPE ELIE PAUL	BORDEAUX
72	MR	LATREMOLIERE FRANCK THIERRY ERIC	PARIS
263	MR	LAURENCON BENOIT ALEXIS	PARIS
219	MLE	LAVEST FRANCOISE	CLERMONT FERRAND
4	MR	LAZARUS XAVIER SEBASTIEN	PARIS
174	MR	LE BELLEGO EMMANUEL MICHEL PIERRE	PARIS
161	MR	LE FRANC GUILLAUME MICHEL	PARIS
208	MR	LE GAL LA SALLE TUGDUAL LOUIS	GRENOBLE
213	MLE	LE GORREC BERNADETTE	BORDEAUX
186	MLE	LE GROGNEC ISABELLE ANNE MARIE	RENNES
362	MLE	LE MIGNANT SANDRINE MARIE FRANCE	NANTES
255	MR	LE MOUZER LILIAN	PARIS
55	MLE	LE PIERRES NOLWENN	RENNES
258	MR	LE TEXIER VINCENT	RENNES
12	MR	LEBEAU EDOUARD	LYON
233	MR	LEBUCHOUX JEROME	PARIS
43	MLE	LECAT ELISABETH LUCIE JACQUEL	BREST
306	MR	LECLERCQ ERIC	PARIS
226	MLE	LECOMTE MARIE JEANNE	PARIS
309	MLE	LEDUC BENEDICTE ANNE MICHEL	RENNES

107	MLE	LEFRANC SANDRINE CHRISTINE	PARIS
193	MR	LEJOLY STEPHANE DANY	NANTES
161	MR	LEMASSON FREDERIC	DIJON
31	MR	LENGLART FABRICE RENE PAUL	PARIS
326	MR	LEONETTI MICHEL AIME	PARIS
400	MLE	LETARE DOLORES ANNA	GRENOBLE
216	MR	LEVALLOIS SERGE GASTON	MONTPELLIER
245	MR	LEVASSEUR NICOLAS	RENNES
202	MLE	LISAI ADRIENNE	PARIS
318	MLE	LOYZANCE FLAVIE	BORDEAUX
263	MR	LUONG KHAI DONG	PARIS
397	MLE	MAHIEUX SYLVIE	GRENOBLE
311	MR	MALECOT BRUNO	RENNES
222	MR	MALINGREY PASCAL	STRASBOURG
69	MR	MARCO NICOLAS	TOULOUSE
331	MR	MARSAL FRANCK	PARIS
406	MR	MARTIN FREDERIC	NANCY
175	MME	MARTIN ISABELLE EPOUSE MARSONE	PARIS
384	MR	MARTIN JEAN ROCH	BORDEAUX
384	MLE	MARTIN MAGALI SOPHIE AGNES	TOURS
53	MR	MARTINEZ PATRICK ANGE RAYMOND	LYON
40	MLE	MARTY FLORENCE	LYON
239	MLE	MARTY SOPHIE MARIE HENRIETTE	TOULOUSE
406	MR	MARTY YANNICK BERNARD	BORDEAUX
109	MLE	MASSE CATHERINE JEANNE FRANCO	NANTES
64	MR	MATHIEU FREDERIC	STRASBOURG
240	MR	MAUME OLIVIER MARC BENOIT	LYON
48	MR	MAUREL FRANCOIS	PARIS
241	MR	MAUXION HERVE RENE PASCAL	RENNES
149	MR	MELLIEZ FRANCK LEO MICHEL	LILLE
331	MR	MERRHEIM XAVIER GEORGES FRANCOIS	LYON
131	MLE	MESTRAUD ANNE LYDIE MARGUERITE	NICE
406	MLE	METZLER LAURE MARIE	PARIS
295	MLE	MEYNET PASCALE ANNE-MARIE	LYON
218	MR	MICOUD LAURENT	BORDEAUX
73	MR	MIQUEL ALEXANDRE REGIS DANIEL	PARIS
20	MR	MOHAN SHALAY	PARIS
345	MLE	MONTEIL VALERIE CHRISTINE ANDRE	TOULOUSE
163	MME	MOREAU EVELYNE FRANCOISE	TOURS
13	MR	MOTCHANE EMMANUEL PIERRE-FRANCOI	PARIS
197	MLE	MOUGEY ISABELLE MARIE CLAUDE P	BESANCON
386	MR	MOUNDIB MOHAMMED ALI	PARIS
338	MR	MOUNIER ERIC	PARIS
125	MLE	MUNNIER ADELINE MARIE BRIGITTE	BESANCON
230	MLE	NADAL FABIENNE SYLVIE	PARIS
395	MR	NAHON FABRICE MARC	STRASBOURG
139	MR	NAIZONDARD HERVE PIERRE FERNAND	LYON
388	MR	NGUON DONARA	PARIS
311	MME	NGUYEN THI PHUONG EPOUSE NGUYEN PHI	PARIS
22	MR	OGET LAURENT	PARIS
129	MR	OLIVE MARC STEPHANE	LYON
195	MR	OUARIT AZEDDINE	POITIERS
198	MR	OUDOM JEAN MICHEL	MONTPELLIER
258	MR	PARDON PHILIPPE JEAN	NANCY
300	MR	PARENTHOEN MARC VINCENT OLIVIER	PARIS
99	MLE	PAROUX KATY CLAIRE	LYON
83	MR	PATE SAMUEL JEAN RENE	REIMS
354	MR	PEBAY PHILIPPE PIERRE EMILE	STRASBOURG
51	MR	PELGRIN XAVIER	RENNES
142	MME	PERI ISABELLE CHRISTINE EPOUSE BOULAY	PARIS
234	MLE	PERRIER FABIENNE ISABELLE	PARIS
96	MLE	PERY ANNE MARGUERITE	PARIS
393	MR	PETIT CLAUDE	LILLE
388	MR	PHAM PHUOC LUY	PARIS
349	MR	PHAM BA NIEN PHILIPPE	MONTPELLIER
203	MR	PHAN ANTHONY EDOUARD	LYON
10	MR	PHILIBERT BERTRAND BERNARD RAYMON	PARIS
244	MR	PICKEL ALAIN	ORLEANS
176	MR	PIEDNOIR STEPHANE CLAUDE CHRISTI	NANTES
141	MR	PIN PIERRE-HENRI FREDERIC	PARIS
125	MR	PINCON OLIVIER	BREST
328	MR	PLAUD DENYS	PARIS
245	MLE	POTELLET PASCALE CECILE MARCELLE	REIMS
188	MR	POULIQUEN JEAN-CHRISTOPHE	BREST
159	MR	PREUX PAUL OLIVIER	ORLEANS
100	MR	PRIGNET ALAIN JACQUES CHRISTIAN	PARIS
183	MR	PUERTO MICHEL	PARIS
111	MR	QUERUEL REGIS	DIJON
295	MR	RABHI BELAID	LILLE
381	MR	RAJAONA RANDRIAMASY ANDRY MASIARISON	PARIS
255	MLE	RASSINOUX ODILE	PARIS

339	MME	RATTET MICHELE HELENE EPOUSE DEPREZ	PARIS
258	MR	RAULT STEPHANE	BREST
207	MR	RAULT STEPHANE NICOLAS	BORDEAUX
182	MR	RAUTUREAU LAURENT MICHEL JOSEPH	NANTES
322	MR	RAVEL PATRICE	PARIS
133	MR	RAYNAUD NICOLAS RENE RAYMOND	LYON
319	MLE	REBINGUET NADJA KARINE KATIA	TOULOUSE
180	MLE	RECROSIO CATHERINE	PARIS
353	MR	REDOU PASCAL	RENNES
38	MR	REMOND GAEL EMMANUEL PASCAL	PARIS
203	MLE	REY ANNE NATHALIE FABIENNE	NANTES
331	MR	RICHARD ARNAUD PHILIPPE	BORDEAUX
263	MR	RISY DAVID JEAN	NANTES
81	MR	ROBIN EMMANUEL JEAN-LOUIS	NANTES
395	MR	ROBLET CHARLES	DIJON
151	MR	ROBLOT XAVIER	BORDEAUX
341	MLE	ROCHET SOPHIE	AIX
347	MR	ROIZES OLIVIER LOUIS MAURICE	MONTPELLIER
203	MR	ROMERO SCHMIDTKE MIGUEL	PARIS
184	MR	ROMOLI DAVID	BORDEAUX
11	MLE	RONDEAU SOPHIE MARIE-COLETTE	LYON
372	MME	ROULHAC DE ROCHEBRUNE MARIE-AUDE EPOUSE DU VAL	BORDEAUX
293	MR	ROUMEFORT RAVAN	PARIS
165	MLE	ROUSSEAU MARIE SOPHIE	BORDEAUX
342	MR	ROUSSEL CHRISTOPHE	LILLE
135	MR	ROUSSEL DAVID EUGENE HENRI	LILLE
135	MLE	ROUSSEL SANDRINE EVELYNE	TOULOUSE
195	MR	ROUX HERVE CLAUDE GILLES	AIX
255	MR	ROYER CHRISTOPHE	REIMS
234	MR	RUFFIER LANCHE THIERRY MARCEL	GRENOBLE
5	MR	RUSS EMMANUEL PHILIPPE	PARIS
17	MR	SAADE PHILIPPE NAGIB	LYON
86	MR	SADI BOUNAB	LILLE
8	MR	SAEZ EMMANUEL SANTIAGO	PARIS
323	MR	SAGEAUX THIERRY	BORDEAUX
397	MR	SAMIR MOHAMED	TOURS
146	MR	SANCHEZ XAVIER PAUL GABRIEL	PARIS
177	MLE	SANTONI MARIE-NOELLE ROSALIE	AIX
42	MR	SAUMON PASCAL	PARIS
326	MR	SAUZET ALAIN	PARIS
156	MLE	SAUZET ODILE	PARIS
24	MR	SAVIN MATHIEU JEAN	PARIS
354	MR	SCHUTZ PATRICK	STRASBOURG
360	MLE	SCHWALLER VERONIQUE	STRASBOURG
79	MR	SEGOUFIN LUC	PARIS
345	MR	SEMIRAT STEPHAN FELIX MAURICE	PARIS
247	MLE	SERRIE ANNE NOELE	BORDEAUX
73	MLE	SIBEUX CHRISTINE CECILE ANDREE	NANTES
275	MR	SICRE PIERRE EMILE HENRI	TOULOUSE
127	MR	SOCCORSI ERIC OLIVIER	PARIS
100	MLE	SOMA VALERIE DOMINIQUE PIERR	NICE
360	MR	SOUDANT CHRISTOPHE ROGER ARTHUR	LILLE
130	MME	SOUVETON AGNES MARIE FREDERIQUE EPOUSE VEYRON	PARIS
148	MR	STIVAL FRANCK	GRENOBLE
220	MR	TAMIM-EL-JARKAS SAMI	PARIS
179	MLE	TARDY ISABELLE MARIE	LYON
132	MR	THEVENOT LAURENT ALEXIS	BESANCON
310	MR	THOMASSIN XAVIER HENRI JEAN	DIJON
359	MR	TISSIER FRANCOIS	POITIERS
376	MR	TOUPANCE PIERRE-ALAIN	LYON
273	MR	TOUSSAINT RENAUD	LYON
123	MLE	TRAINEAU LAURENCE CELINE	POITIERS
178	MR	TRAMONI LAURENT MICHEL DOMINIQU	AIX
290	MR	TREVISAN THIERRY	DIJON
319	MR	TSANG KING SANG LAURENT	PARIS
336	MR	TUFEL ETIENNE ANDRE	BESANCON
208	MR	TURQUET BENOIT ACHILLE ROBERT	RENNES
208	MLE	UNGER VERONIQUE	LYON
150	MLE	VALENTIN CECILE ANNE	LYON
366	MR	VALENTIN FREDERIC EMMANUEL	LYON
376	MLE	VALETTE MARIE LAURE	RENNES
214	MR	VALLEE LUC VINCENT JOSEPH	CAEN
367	MLE	VANDEMBROUCQ LUCILE ARLETTE GUILAINE	LILLE
251	MR	VAYSSE JEAN-CLAUDE LEGER	PARIS
163	MR	VAZEILLES FREDERIC	PARIS
180	MR	VERDOUCQ LAURENT EMMANUEL	LILLE
124	MR	VERON BORIS	TOULOUSE
222	MLE	VICARIOT CAROLE	AIX
120	MR	VIDAL-MADJAR ALFRED	PARIS
6	MR	VILLANI CEDRIC	PARIS
29	MR	VINATIER STEPHANE	PARIS

293	MLE	VINCEROT FABIENNE SOPHIE	LYON
116	MLE	VIOLLET NATHALIE ALINE FRANCOIS	PARIS
26	MR	VIVIER LAURENT MICHEL	TOURS
79	MR	VOLKOV DARKO	PARIS
14	MR	VU NGOC SAN	PARIS
288	MLE	WACHTER CATHERINE FRANCINE EVA	PARIS
258	MR	WAGNER JEAN	STRASBOURG
165	MR	WEINBERG LEOPOLD	LILLE
170	MR	ZABBAN ERIC PASCAL LAURENT	NICE
167	MR	ZAKIC NICOLAS GEORGES DAMIEN	BREST
102	MR	ZAYANA KARIM ARMAND	PARIS

CANDIDATS A TITRE ETRANGER

ALKHOURY	PHILIPPE	PARIS	0140 bis
BOURHRARA	MOSTAFA	POITIERS	0163 bis
RAZAFIMANDIMBY	JEAN LUC HERIVO	DIJON	0354 bis
TEFY ANDRIANANT	MBOLATIANA	PARIS	0323 bis

fin de la liste d'admission

composition de mathématiques générales

Durée : 6 heures

Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Plusieurs définitions ou notations, imprimées en italiques, sont introduites au fur et à mesure dans l'énoncé du problème.

La lettre k désigne un corps commutatif **infini** et la lettre G un groupe. Les termes "espace vectoriel", "application linéaire" et "forme linéaire" signifient respectivement "k-espace vectoriel", "application k-linéaire" et "forme k-linéaire". Si V est un espace vectoriel, le groupe des automorphismes de V (c'est à dire des applications linéaires de V dans lui même qui sont des bijections) sera noté $GL(V)$.

Def 1- *Une action de G sur un espace vectoriel V est par convention la donnée d'un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$. On dit aussi que G agit sur V. On notera souvent, pour $g \in G$ et $v \in V$, $g.v$ au lieu de $\rho(g)(v)$. Il faut noter qu'avec cette convention une action est* **toujours linéaire** *: $g.(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 g.v_1 + \lambda_2 g.v_2$. Pour connaitre une action ρ de G sur V, il suffit donc de savoir, pour tout élément g de G, quelle est l'image par $\rho(g)$ des éléments d'une base de V.*

Def 2- *Un* **invariant** *pour l'action de G sur V est un élément v de V tel que, pour tout $g \in G$, on ait $g.v = v$. Les invariants forment un sous-espace vectoriel de V* **que l'on notera** V^G.

Def 3- *Si $S = k[X_1, \ldots, X_n]$ désigne l'algèbre des polynômes à n indéterminées, à coefficients dans k, on notera S_d le sous-espace vectoriel de S constitué du polynôme nul et des polynômes homogènes de degré d. Tout polynôme P de S permet de définir une fonction de k^n dans k que l'on appelle la fonction associée à P.*

0-1- *Soit E un ensemble. On note $F(E)$ l'ensemble des fonctions de E dans k. On peut additionner deux éléments f_1 et f_2 de $F(E)$ en posant, pour $e \in E, (f_1 + f_2)(e) = f_1(e) + f_2(e)$. On peut aussi multiplier f_1 par un scalaire $\lambda \in k$ en posant $(\lambda f_1)(e) = \lambda f_1(e)$. Muni de ces deux lois, $F(E)$ est un espace vectoriel.*

PARTIE I —PRÉLIMINAIRES—

Soit n un entier non nul.
1-1- Pour tout entier i entre 1 et n, on se donne une partie **infinie** A_i de k. Soit $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. On suppose que la restriction à $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ de la fonction associée à P est identiquement nulle. Montrer que P est le polynôme nul.

1-2- On suppose ici que $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit U un ouvert non vide de k^n (pour la topologie usuelle d'espace vectoriel de dimension finie) et $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. On suppose que la restriction à U de la fonction associée à P est identiquement nulle. Montrer que P est le polynôme nul.

1-3- On choisit une action d'un groupe G sur un espace vectoriel V. Soit $g \in G, f \in F(V)$ (cf 0-1) et $v \in V$. On définit $g.f \in F(V)$ par $(g.f)(v) = f(g^{-1}.v)$.

1-3-1- Montrer que l'on a bien défini ainsi une action de G sur l'espace vectoriel $F(V)$.

1-3-2- Soit $v \in V$ et $\mathcal{O}_v = \{g.v | g \in G\}$ sa G-orbite. Soit $h \in F(V)^G$ un invariant. Montrer que h est constant sur $\mathcal{O}_v$. Si une fonction $f \in F(V)$ est constante sur toutes les G-orbites, est-elle dans $F(V)^G$?

1-4- Soit r un entier strictement positif. On suppose que k est de caractéristique nulle ou de caractéristique ne divisant pas r. On suppose aussi que k contient une racine primitive r-ième de l'unité ω. On note $G = \mu_r$ le groupe des racines r-ièmes de l'unité dans k constitué des puissances de ω. On fait agir G sur $k[X]$ via $\rho(\omega)(X^n) = \omega^n X^n$.

1-4-1- Montrer que pour tout g dans G et pour tout P et Q dans $k[X]$, on a $\rho(g)(P.Q) = \rho(g)(P).\rho(g)(Q)$.

1-4-2- Montrer que $k[X]^G = k[X^r]$ où $k[X^r]$ est l'ensemble des polynômes de la forme $P(X^r)$ pour P un polynôme.

1-5- Soit $G = Gl_n(k)$. $Gl_n(k)$ désigne l'ensemble des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans k. Il agit sur k^n par multiplication d'une matrice A de G par un vecteur colonne v de k^n.

1-5-1- Soit $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. On notera aussi $P \in F(k^n)$ la fonction associée. Montrer que pour tout $g \in G, g.P$ est encore une fonction associée à un polynôme de $k[X_1, \ldots, X_n]$ (cf 1-3 pour la définition de $g.P$).

1-5-2- Soit v non nul dans k^n. Quelle est son orbite par $G = Gl_n(k)$?

1-5-3- Montrer que les seules fonctions de $F(k^n)$, associées à des polynômes et invariantes par $G = Gl_n(k)$, sont les constantes.

PARTIE II — POLYNÔMES ET ACTIONS SUR DES ALGÈBRES—

Def 4- *Une algèbre est un k-espace vectoriel A, muni d'une loi de composition interne, appelée le produit, qui à (a_1, a_2) dans A^2 associe a_1a_2 dans A et qui vérifie :*

a) $(A, +, .)$ est un anneau **commutatif et unitaire**. *L'élément neutre multiplicatif sera noté 1_A (ou simplement 1 si aucune confusion n'en résulte).*

b) Pour tout $(a_1, a_2) \in A^2$ et $\lambda \in k$, on a $\lambda(a_1a_2) = (\lambda a_1)a_2 = a_1(\lambda a_2)$.

Une sous-algèbre d'une algèbre est un sous ensemble qui est à la fois un sous espace vectoriel et un sous-anneau unitaire. Soit E un ensemble. L'espace vectoriel $F(E)$ des fonctions de E dans k est aussi une algèbre. Le produit y est défini par $(f_1f_2)(e) = f_1(e)f_2(e)$. L'unité est la fonction constante qui à tout élément de E associe $1 \in k$.

Def 5- *Un morphisme d'algèbres d'une algèbre A dans une algèbre B est une application α de A dans B qui est simultanément un morphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux unitaires. En particulier il envoie 1_A sur 1_B et satisfait, pour tout $(a_1, a_2) \in A^2$, à $\alpha(a_1a_2) = \alpha(a_1)\alpha(a_2)$. Un automorphisme de l'algèbre A est un morphisme d'algèbres de A dans A qui est bijectif. L'inverse est alors aussi un morphisme d'algèbres. L'ensemble des automorphismes d'algèbre de A forme un groupe pour la composition, appelé groupe des automorphismes de l'algèbre A.*

Def 6- *Une action d'un groupe G sur une algèbre A est la donnée d'un morphisme de groupes de G vers le groupe des automorphismes de l'algèbre A. Autrement dit, il s'agit d'un morphisme ρ de G vers le groupe des automorphismes de k-espace vectoriel de A, satisfaisant en outre à $\rho(g)(a_1a_2) = \rho(g)(a_1)\rho(g)(a_2)$ et $\rho(g)(1) = 1$ pour tout $g \in G, a_1 \in A$ et $a_2 \in A$. L'ensemble A^G des invariants (au sens de la définition 2) forme alors une sous-algèbre de A.*

Def 7- *Si A est une algèbre et $f_1, \ldots, f_n$ des éléments de A, on note $k[f_1, \ldots, f_n]$ l'image du morphisme d'algèbres $\pi : k[X_1, \ldots, X_n] \to A$ qui est défini par $\pi(X_i) = f_i$. On dit que $k[f_1, \ldots, f_n]$ est engendrée par les n éléments $f_1, \ldots, f_n$.*

Def 8- *Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V supposé ici de dimension finie. On notera $X_1^0, \ldots, X_n^0$ la base duale : $X_i^0(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_i$. Soit $F(V)$ l'algèbre de toutes les fonctions de V dans k. Les éléments X_i^0 engendrent une sous-algèbre de l'algèbre $F(V)$,* **que l'on notera** *$S(V)$. Les éléments de $S(V) = k[X_1^0, \ldots, X_n^0]$ sont appelés les* **fonctions polynômes** *de V.*

2-1- On reprend ici les notations de la définition 8. A priori, la sous-algèbre $S(V)$ de $F(V)$ introduite dans cette définition dépend du choix d'une base de V.

2-1-1 Montrer que la sous-algèbre $S(V)$ est indépendante du choix de la base de V.

2-1-2 Montrer que le morphisme d'algèbres qui à X_i associe X_i^0 est un isomorphisme de l'algèbre $S = k[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes à n indéterminées vers l'algèbre $S(V)$.

2-1-3-On note $S(V)_d$ l'image de S_d par l'isomorphisme de 2-1-2. Montrer que $S(V)_d$ ne dépend pas du choix de la base de V.

Dorénavant, dès qu'une base de V est choisie, on identifiera $S(V)$ et $S = k[X_1, \ldots, X_n]$ et on notera X_i pour X_i^0.

2-2- On se place dans la situation de 1-3.

2-2-1- Montrer que l'action ρ de G sur l'espace vectoriel $F(V)$, action définie en 1-3, est en fait aussi une action de G sur **l'algèbre** $F(V)$.

2-2-2- Montrer que, pour tout $d \geq 0$, $S(V)_d$ est stable pour cette action, c'est à dire que pour tout $g \in G$, $\rho(g)(S(V)_d)$ est inclus dans $S(V)_d$.

2-2-3- Prouver que

$$S(V)^G = \bigoplus_{d\geq 0}(S(V)^G \cap S(V)_d).$$

PARTIE III— EXEMPLES—

3—GROUPE SPÉCIAL LINÉAIRE—

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n et r un entier strictement positif. On suppose que k est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Le groupe des automorphismes de V est noté $GL(V)$.

Soit $G = SL(V) = \{g \in GL(V) \mid \det\ g = 1\}$.

Ce groupe agit sur V^r de la façon diagonale suivante :

$$g.(v_1, \ldots, v_r) = (g(v_1), \ldots, g(v_r)).$$

Soit U_r le sous ensemble suivant de V^r :

$$\{(v_1, \ldots, v_r) \in V^r \mid \text{ la famille } v_1, \ldots, v_r \text{ est linéairement indépendante dans } V\}.$$

3-1- Montrer que U_r est un ouvert de V^r.

3-2- Montrer que pour $r < n$, U_r est une orbite de G . En déduire que alors $S(V^r)^G = k$.

3-3- On suppose que $r = n$. On fixe une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de V. Soit $f(v_1, \ldots, v_n) = \det_e(v_1, \ldots, v_n)$, le déterminant des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ dans la base e.

3-3-1- Montrer que $f \in S(V^n)^G$.

3-3-2- Montrer que tout élément de U_n a dans son orbite sous G un élément unique de la forme $(e_1, \ldots, e_{n-1}, \alpha e_n)$ pour un élément $\alpha \in k$ que l'on calculera. En déduire que $S(V^n)^G = k[f]$.

4 — QUELQUES GROUPES FINIS—

Def 9- *Soit A une algèbre. On dit que A est une algèbre de polynômes s'il existe $n \in \mathbf{N}, f_1 \in A, \ldots, f_n \in A$, tels que le morphisme d'algèbres $\pi : k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A$ qui est défini par $\pi(X_i) = f_i$ soit un isomorphisme.*

4-1- Soit $G = \mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des bijections de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ des n premiers entiers non nuls. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\pi(X_i) = X_{\pi(i)}$, ce qui permet de définir une action de G sur l'algèbre $k[X_1, \ldots, X_n]$. Quelle est l'algèbre $k[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$? Est-ce que cette algèbre est une algèbre de polynômes ?

4-2- Soit $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On note 1 et ε les éléments de G et on suppose ici que la caractéristique de k est différente de 2. On fait agir G sur l'algèbre $k[X_1, \ldots, X_n]$ par $\varepsilon.X_j = -X_j$.

4-2-1- Montrer que $k[X_1, \ldots, X_n]^G = k[X_1^2, \ldots, X_iX_j, \ldots, X_n^2]$.

4-2-2- Montrer que pour $n \geq 2, k[X_1, \ldots, X_n]^G$ n'est pas un anneau factoriel. Pour quelles valeurs de n, $k[X_1, \ldots, X_n]^G$ est une algèbre de polynômes ?

4-2-3- Montrer que si P est un polynôme de $k[U, V, W]$ tel que $P(X^2, XY, Y^2)$ est nul dans $k[X, Y]$, alors P est divisible par $V^2 - UW$.

Indication : On pourra utiliser sans la prouver la version suivante de la division euclidienne : si D est un anneau commutatif unitaire et intègre, si A et B sont deux polynômes de $D[V]$, avec B non nul et **unitaire**, il existe Q et R dans $D[V]$ tels que $A = BQ+R$ et, soit $R = 0$, soit $degR < degB$.

4-2-4- Montrer que $k[X^2, XY, Y^2]$ est isomorphe à $k[U, V, W]/(V^2 - UW)$.

5 et 6—GROUPE ORTHOGONAL—-

Dans 5 et 6, le corps k est le corps des réels.

5- Soit V un espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire et $O(V)$ le groupe orthogonal correspondant. Il agit naturellement sur V. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de V. On en déduit une identification entre $S(V)$ et $k[X_1, \ldots, X_n]$.

5-1- Montrer que tout élément v de V a dans son orbite sous $O(V)$ un unique élément ae_1 où a est un réel positif ou nul que l'on déterminera.

5-2- En déduire que $S(V)^{O(V)} = \mathbf{R}[X_1^2 + \cdots + X_n^2]$.

6- Soit $E = \mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel : si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ sont deux éléments de E, $x.y = x_1x_2 + y_1y_2$. On note $e = (e_1, e_2)$ la base canonique (donc orthonormée) de E. Soit $V = E^2 = \mathbf{R}^4$,lui aussi muni de sa base canonique, et $G = O(2)$ le groupe orthogonal de E. On fait agir G sur V de façon diagonale par $g.(x, y) = (g(x), g(y))$. Soit $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = F(x, y)$ une fonction polynôme de V qui soit G-invariante.

6-1- Soit $H \in \mathbf{R}[X_1, X_2, X_3]$. Soit $L \in \mathbf{R}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ défini par $L(x_1, x_2, y_1, y_2) = H(x_1y_1 + x_2y_2, x_1^2 + x_2^2, y_1^2 + y_2^2) = H(x.y, x.x, y.y)$. Montrer que L est G-invariant.

6-2- On pose, pour tout $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3, K(a, b, c) = F(a, 0, b, c)$. Montrer que K est un polynôme en a^2, b^2, c^2, ab.

Indication : Utiliser des éléments convenables de G, notamment la symétrie orthogonale d'axe $\mathbf{R}e_1$ et 4-2-1.

6-3- Montrer que tout élément (x, y) de V a dans son orbite sous G un élément (u, v) où u est proportionnel à e_1. En déduire qu'il existe un polynôme $M \in \mathbf{R}[U, V, W]$ et un entier α positif ou nul tels que, si $x \neq 0$:

$$F(x, y) = \frac{M(x.y, x.x, y.y)}{(x.x)^\alpha}.$$

6-4- On se donne deux polynômes P et Q dans $\mathbf{R}[U, V, W]$. On suppose qu'il existe deux entiers positifs ou nuls p et q tels que pour tout x et y dans $E - \{0\}$ on ait :

$$(y.y)^p\ P(x.y, x.x, y.y) = (x.x)^q\ Q(x.y, x.x, y.y).$$

Montrer que les polynômes $W^p.P(U, V, W)$ et $V^q.Q(U, V, W)$ de $\mathbf{R}[U, V, W]$ sont égaux.

6-5- Montrer que :

$$\mathbf{R}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]^G = \mathbf{R}[X_1Y_1 + X_2Y_2, X_1^2 + X_2^2, Y_1^2 + Y_2^2].$$

7—CONJUGAISON—

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $V = End_{\mathbf{C}}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Soit $G = GL(E)$. On fait agir ce groupe sur V par :

$$g.a = g\,a\,g^{-1}.$$

7-1- Montrer que l'ensemble U des éléments de V dont les n valeurs propres sont distinctes est un ouvert de V. Soit u un élément de U. Décrire l'orbite de u sous G.

7-2- Soit $A \in V$ et $P_A(T) = \det(T.Id - A) \in k[T]$ son polynôme caractéristique. On définit n fonctions $\tau_1, \ldots, \tau_n$ de V dans k par :

$$P_A(T) = T^n - \tau_1(A)T^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\tau_{n-1}(A)T + (-1)^n\tau_n(A).$$

Vérifier que pour tout j entre 1 et n, $\tau_j \in S(V)^G$.

7-3- Montrer que $S(V)^G = k[\tau_1, \ldots, \tau_n]$.

PARTIE IV— LES FORMES BINAIRES—

Dans cette partie G est le groupe $SL_2(k)$ des matrices 2×2, de déterminant 1, à coefficients dans un corps k **algébriquement clos de caractéristique nulle**. Il agit naturellement sur k^2 et l'on obtient grâce à 1-3 et 2-2 une action ρ sur l'algèbre $k[X, Y]$. Explicitement,

$$\text{si } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(k),\ \rho(g)(X) = \delta X - \beta Y \text{ et } \rho(g)(Y) = -\gamma X + \alpha Y.$$

On note ρ_d l'action de G dans $R_d = k[X, Y]_d$, l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d. Ceci permet de définir une action π_d de G sur $S(R_d)$, l'algèbre des fonctions polynômes sur R_d (voir 1-3 et 2-2).

8— UN EXEMPLE (d=2) —

On suppose ici que $d = 2$ et l'on rappelle que k est algébriquement clos de caractéristique nulle. Tout élément de R_2 s'écrit $uX^2 + vXY + wY^2$ d'où une identification de $S(R_2)$ et de $k[u, v, w]$.

8-1-

$$\text{Si } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(k), \text{ montrer que } (\pi_2(g)P)(u, v, w) \text{ est la fonction :}$$

$$P(\alpha^2 u + \alpha\gamma v + \gamma^2 w, 2\alpha\beta u + (\alpha\delta + \beta\gamma)v + 2\gamma\delta w, \beta^2 u + \beta\delta v + \delta^2 w).$$

En déduire que le polynôme $\Delta(u, v, w) = v^2 - 4uw$ appartient à $S(R_2)^G$.

8-2- Montrer que pour tout choix de $(u, v, w) \in k^3$ tel que $u \neq 0$, il existe $g \in G$ tel que $\pi_2(g)(uX^2 + vXY + wY^2) = X^2 - \dfrac{\Delta(u, v, w)}{4}Y^2$. En déduire que $S(R_2)^G = k[\Delta]$.

9— CAS GÉNÉRAL—

L'action π_d de G sur $S(R_d)$ laisse stable chaque sous-espace vectoriel $S(R_d)_e$ ($e \geq 0$), et définit une action de G sur $S(R_d)_e$ que l'on notera $\pi_{d,e}$. **Soit $m(d, e)$ la dimension sur k de l'espace**

vectoriel des invariants de cette dernière action $\pi_{d,e}$. Le but de cette partie est de donner une formule permettant le calcul de $m(d,e)$. On rappelle que ρ_d est défini au début de la partie IV.

Soit $a \in k$. Si a est non nul, on note g_a l'élément $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ de $SL_2(k)$.

9-1- Ecrire la matrice de $\rho_d(g_a)$ dans la base $(X^d, X^{d-1}Y, \ldots, Y^d)$ de R_d et montrer que la trace de $\rho_d(g_a)$ vaut $\dfrac{a^{d+1} - a^{-(d+1)}}{a - a^{-1}}$.

9-2 Montrer que $(R_0)^G = k$ et que, pour $d > 0$, $(R_d)^G = 0$.

Def 11- *Soit H un groupe et $h \in H$. Soit I un ensemble fini d'indices et $(\pi_i)_{i\in I}$ une famille d'actions de H sur des espaces vectoriels de dimension finie V_i. La somme directe des π_i, notée $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i$, est l'action de H sur $\bigoplus_{i\in I} V_i$ définie par $\pi(h)((v_i)_{i\in I}) = (\pi_i(h)(v_i))_{i\in I}$.* En particulier, si ρ est une action de H sur V, on définit pour $k \in \mathbf{N}$ une action ρ^k de H sur V^k par $\rho^k(h)(v_1, \ldots, v_k) = (\rho(h)(v_1), \ldots, \rho(h)(v_k))$.

9-3- On utilise les notations de la définition 11. Montrer que la trace de $\pi(h)$ vaut la somme, sur l'ensemble I, des traces de $\pi_i(h)$.

9-4- On **admet** que pour toute action λ de $G = SL_2(k)$ dans un espace vectoriel V de dimension finie, il existe, pour tout entier $d \geq 0$, un entier $n(d)$ tel que :

a) $n(d)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de d.

b) il existe un isomorphisme θ entre $\bigoplus_{d\geq 0} R_d^{n(d)}$ et V.

et c) pour tout $g \in G$, $\bigoplus_{d\geq 0} \rho_d^{n(d)}(g) = \theta^{-1} \circ \lambda(g) \circ \theta$.

9-4-1- Montrer que la trace de $\lambda(g_a)$ vaut alors $\displaystyle\sum_{d\geq 0} n(d) \frac{a^{d+1} - a^{-(d+1)}}{a - a^{-1}}$.

9-4-2- En déduire que les entiers $n(d)$ sont uniquement déterminés par λ.

9-4-3- On rappelle qu'un polynôme de Laurent est un élément de $k[a, a^{-1}]$. Montrer que $\dim_k(V^G)$ est le coefficient de a dans le polynôme de Laurent $\left[(a - a^{-1})\,\mathrm{Trace}(\lambda(g_a))\right]$.

9-5- Soit $B = (b_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ une matrice inversible. On lui associe un automorphisme, toujours noté B, de l'algèbre $k[X_1, \ldots, X_n]$ défini par :

$$(B.P)(x_1, \ldots, x_n) = P(B^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}).$$

Soit $tr_e(B)$ la trace de la restriction de cet automorphisme à l'espace vectoriel $k[X_1, \ldots, X_n]_e$. On note $\mathbf{1_n}$ la matrice identité de taille $n \times n$. Enfin $k[[T]]$ représente l'algèbre des séries formelles en l'indéterminée T à coefficients dans k .

9-5-1- On considère le polynôme en T suivant : $\det(\mathbf{1}_n - B^{-1}T)$. Montrer que ce polynôme a un inverse dans l'algèbre des séries formelles $k[[T]]$. On notera dans la suite cet inverse $(\det(\mathbf{1}_n - B^{-1}T))^{-1}$.

9-5-2- Montrer que si B est triangulaire supérieure (c'est à dire $b_{i,j} = 0$ si $i > j$), les séries formelles, $\displaystyle\sum_{e\geq 0} tr_e(B)\, T^e$ et $(\det(\mathbf{1}_n - B^{-1}T))^{-1}$, sont égales dans $k[[T]]$.

9-5-3- Montrer que l'égalité de 9-5-2 est encore valable que B soit triangulaire ou pas.
Indication : On pourra utiliser la question 2-1.

9-6- Soit $\chi_{d,e}(a)$ la trace de $\pi_{d,e}(g_a)$. Montrer que :

$$\sum_{e\geq 0} \chi_{d,e}(a)\; T^e = \Big[(1-a^{-d}\;T)(1-a^{-d+2}\;T)\ldots(1-a^d\;T)\Big]^{-1}.$$

9-7- Soit $\mathbf{Z}[U][[W]]$ l'anneau des séries formelles en l'indéterminée W à coefficients dans $\mathbf{Z}[U]$. Soit $F_U(W)$ l'élément de cet anneau défini par

$$F_U(W) = (1-W)(1-U\;W)\ldots(1-U^dW).$$

Montrer qu'il existe des polynômes $M_{d,e}(U) \in \mathbf{Z}[U]$ tels que

$$[F_U(W)]^{-1} = \sum_{e\geq 0} M_{d,e}(U)\; W^e.$$

On définit les entiers $c(d,e,i)$ par $M_{d,e}(U) = \sum_{i\geq 0} c(d,e,i)U^i$.

9-8- Montrer que $\chi_{d,e}(a) = a^{-de}M_{d,e}(a^2)$.

9-9- On rappelle que, par définition, $m(d,e)$ est la dimension sur k de $S(R_d)^G_e$. Prouver que $m(d,e) = 0$ si de est impair et que si de est pair :

$$m(d,e) = c(d,e,de/2) - c(d,e,(de/2)-1).$$

PARTIE V—GROUPE SYMÉTRIQUE—

Dans toute la partie V, et donc jusqu'à la fin du problème, le corps k sera supposé de caractéristique nulle.

10—POLARISATION—

Soit B une algèbre. Soit $f(U_1,\ldots,U_n)$ un polynôme en les n indéterminées à coefficients dans B. On définit un polynôme $D_{U,Y}$ en les $2n$ indéterminées $(U_1,\ldots,U_n,Y_1,\ldots,Y_n)$ par

$$D_{U,Y}f(U_1,\ldots,U_n,Y_1,\ldots,Y_n) = Y_1\frac{\partial f}{\partial U_1} + \cdots + Y_n\frac{\partial f}{\partial U_n}.$$

Pour simplifier l'écriture on posera $U = (U_1,\ldots,U_n)$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_n)$ et on notera $B[U]$ pour $B[U_1,\ldots,U_n]$ et $B[U,Y]$ pour $B[U_1,\ldots,U_n,Y_1,\ldots,Y_n]$.

On rappelle qu'une application D de $B[U]$ vers $B[U,Y]$ est une dérivation si elle est B-linéaire (c'est à dire si $D(b_1P_1+b_2P_2) = b_1D(P_1)+b_2D(P_2)$ pour tout $(b_1,b_2)\in B^2$ et $(P_1,P_2)\in B[U]^2$) et si elle satisfait à $D(PQ) = PD(Q)+QD(P)$ pour tout P et Q dans $B[U]$.

10-1- On suppose ici que $k = \mathbf{R}$. On considère l'application λ de $\mathbf{R}$ dans $B[U,Y]$ donnée par

$$t \mapsto f(U_1+tY_1, U_2+tY_2,\ldots,U_n+tY_n) = \lambda(t)\,.$$

Montrer que $D_{U,Y}f = \lambda'(0)$. En déduire que l'application qui à f associe $D_{U,Y}f$ est une dérivation de $B[U]$ dans $B[U,Y]$.

On admet dans la suite que ce résultat est vrai pour tout corps k.

10-2- Montrer que si on se donne p éléments $h_1,\dots,h_p$ de $B[U]$ et si f appartient à $B[h_1,\dots,h_p]$, alors $D_{U,Y}f$ est un élément de $B[h_1,\dots,h_p,D_{U,Y}h_1,\dots,D_{U,Y}h_p]$.

10-3- On suppose qu'un groupe G agit sur $V = k^n$ donc aussi (cf 1-3 et 2-2) sur $S(V) = k[U]$. On le fait agir sur V^2 par

$$g.(u_1,\dots,u_n,y_1,\dots,y_n) = (g.(u_1,\dots,u_n),g.(y_1,\dots,y_n)).$$

Ceci permet de définir une action de G sur $k[U,Y]$. Montrer que si $f \in k[U]$ est invariant pour l'action de G sur $k[U]$, alors $D_{U,Y}f$ est invariant pour l'action de G sur $k[U,Y]$.

10-4- Soit f un polynôme non nul de $k[U]_r$, c'est à dire un polynôme homogène de degré r. Pour tout entier $p \geq 1$, on se donne n indéterminées $U_1^{[p]},\dots,U_n^{[p]}$. On pose $U^{[p]} = (U_1^{[p]},\dots,U_n^{[p]})$ et on identifie $U^{[1]}$ et U. Soit $N \geq 1$ un entier. On définit un polynôme $\widehat{f}_N$ en les $N.n$ indéterminées $(U_j^{[i]})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$ par :

$$\widehat{f}_N = f \text{ si } N = 1$$

$$\widehat{f}_N(U^{[1]},\dots,U^{[N]}) = D_{U,U^{[N]}}D_{U,U^{[N-1]}}\dots D_{U,U^{[2]}}f \text{ si } N \geq 2.$$

On notera l'ordre dans lequel les indéterminées sont écrites dans ces polynômes. Pour $N = r$, on dit que $\widehat{f}_N = \widehat{f}_r$ est la polarisation totale de f.

10-4-1- Soit $P(U^{[1]},\dots,U^{[N]})$ un polynôme en les nN indéterminées, à coefficients dans k, homogène de degré d en les indéterminées $U^{[1]} = (U_1^{[1]},\dots,U_n^{[1]})$.
Soit $Q(U^{[1]},\dots,U^{[N]},U^{[N+1]}) = (D_{U^{[1]},U^{[N+1]}}P)(U^{[1]},\dots,U^{[N]},U^{[N+1]})$. Montrer que :

$$Q(U^{[1]},\dots,U^{[N-1]},U^{[N]},U^{[1]}) = d\ P(U^{[1]},\dots,U^{[N]}).$$

10-4-2- Montrer que pour tout p entre 1 et N, il existe une suite de r entiers $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$, avec $1 \leq \alpha_i \leq N$, telle que le polynôme $\widehat{f}_p$ soit le produit d'un élément de k et du polynôme $\widehat{f}_r(U^{[\alpha_1]},\dots,U^{[\alpha_r]})$ où $\widehat{f}_r$ est la polarisation totale de f.

11—ACTION DIAGONALE DU GROUPE SYMÉTRIQUE—

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sera noté G dans cette partie. Il agit sur l'algèbre des polynômes en les $n.N$ indéterminées $A = k[U_j^{[i]}]_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$ par :

$$\pi.(U_j^{[i]}) = U_{\pi(j)}^{[i]}.$$

11-1- Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ les fonctions symétriques élémentaires en les variables $U_1,\dots,U_n$. Elles sont définies par :

$$\varphi_r(U_1,\dots,U_n) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_r\leq n} U_{i_1}U_{i_2}\cdots U_{i_r}.$$

Leurs polarisations totales sont notées $\widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_n$. Montrer que :

$$\widehat{\varphi}_r(U^{[1]}, \ldots, U^{[r]}) = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r) \text{ est une suite de} \\ r \text{ entiers distincts entre } 1 \text{ et } n}} U^{[1]}_{i_1} \cdots U^{[r]}_{i_r}.$$

11-2- Soit M **l'ensemble des** $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ **où** $1 \leq \alpha_i \leq N$ **et** $1 \leq r \leq n$. On définit, pour $\underline{\alpha} \in M$, $\psi_{\underline{\alpha}}$ dans A par :

$$\psi_{\underline{\alpha}}(U^{[1]}, \ldots, U^{[i]}, \ldots, U^{[N]}) = \frac{1}{r!}\,\widehat{\varphi}_r(U^{[\alpha_1]}, \ldots, U^{[\alpha_r]}).$$

Montrer que ces polynômes $\psi_{\underline{\alpha}}$ sont invariants par l'action de $G = \mathfrak{S}_n$ sur A.

11-3- Soient $a_1, \ldots, a_N$ des entiers positifs ou nuls et $\nu = a_1 + \cdots + a_N$. On définit un élément $P_{\underline{a}}$ de A par :

$$P_{\underline{a}}(U^{[1]}, \ldots, U^{[N]}) = \sum_{1 \leq j \leq n} (U^{[1]}_j)^{a_1} \cdots (U^{[N]}_j)^{a_N}.$$

Soit $\widehat{\sigma}_\nu$ la polarisation totale du polynôme de Newton σ_ν défini par :

$$\sigma_\nu(U) = \sum_{1 \leq j \leq n} (U_j)^\nu.$$

Montrer qu'il existe des entiers $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ entre 1 et N et λ dans k tels que :

$$P_{\underline{a}}(U^{[1]}, \ldots, U^{[N]}) = \lambda\,\widehat{\sigma}_\nu(U^{[\beta_1]}, \ldots, U^{[\beta_\nu]}).$$

En déduire que $P_{\underline{a}}$ peut s'exprimer comme un polynôme à coefficients dans k en les $\psi_{\underline{\alpha}}$ où les indices $\underline{\alpha}$ prennent toutes les valeurs possibles dans M.

11-4- On note $\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}$ les fonctions symétriques élémentaires en les $n-1$ variables $U_2, \ldots, U_n$. On pose $\overline{U} = (U_2, \ldots, U_n)$. Montrer que l'on a les relations suivantes entre les $\overline{\varphi}_r$ et les φ_r :

$$\overline{\varphi}_1(\overline{U}) = \varphi_1(U) - U_1, \text{ et pour } r \text{ entre } 2 \text{ et } n-1, \overline{\varphi}_r(\overline{U}) = \varphi_r(U) - U_1\overline{\varphi}_{r-1}(\overline{U}).$$

En déduire que les polarisations totales des $\overline{\varphi}_r$, que l'on notera $\widehat{\overline{\varphi}}_r$, s'expriment comme des polynômes en les $\psi_{\underline{\alpha}}$ (pour $\underline{\alpha} \in M$) avec des coefficients dans $k[U^{[1]}_1, \ldots, U^{[N]}_1]$.

11-5- Montrer, par récurrence sur n, que l'algèbre $A^{\mathfrak{S}_n}$ est la k-algèbre engendrée par les polynômes $\psi_{\underline{\alpha}}$ où $\underline{\alpha}$ prend toutes les valeurs possibles dans M.

12—APPLICATION—

Soit G un groupe fini ayant n éléments et π une action de G sur $k^N = V$. On notera $g_1, \ldots, g_n$ les éléments de G. Soit u un vecteur de $V = k^N$. On notera $(u^{[1]}_j, \ldots, u^{[N]}_j)$ les N coordonnées de $\pi(g_j)(u)$. Enfin si $J \in S(V) = k[U^{[1]}_1, \ldots, U^{[N]}_1]$, on définit $\widetilde{J}(U^{[1]}, \ldots, U^{[N]})$ dans $A = k[U^{[i]}_j]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq n}}$ par :

$$\widetilde{J}(U^{[1]}, \ldots, U^{[N]}) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} J(U^{[1]}_j, \ldots, U^{[N]}_j).$$

12-1- Montrer que si $J \in S(V)^G$ et si le vecteur u et les scalaires $u_j^{[i]}$ sont comme ci-dessus, alors :

$$\widetilde{J}(u_1^{[1]}, \ldots, u_j^{[i]}, \ldots, u_n^{[N]}) = J(u)\,.$$

12-2- Montrer que $\widetilde{J} \in A^{\mathfrak{S}_n}$ (l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur A est celle de la question 11).

12-3- Soit Σ l'ensemble des suites $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ telles que

$$1 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_r \leq N \text{ et } 1 \leq r \leq n.$$

Soit γ l'application de Σ vers l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n qui à $\underline{\alpha}$ associe $\gamma(\underline{\alpha}) = X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_r}$. Etudier γ et en déduire que le cardinal de Σ est $\frac{(N+1)\cdots(N+n)}{n!} - 1$.

12-4- Montrer, en utilisant 11-5, que $S(V)^G$ est une algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments de $S(V)$. Donner un majorant de ce nombre de générateurs en fonction de n et de N.

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Le problème aborde quelques exemples et résultats de la théorie classique des invariants. Il s'agit, étant donné un groupe G opérant linéairement sur un espace vectoriel V, de trouver tous les polynômes sur V invariants par G. L'algèbre de ces polynômes invariants peut être de structure compliquée. Nagata a pu donner en 1958 un exemple d'action d'un groupe sur $\mathbf{C}^{13}$ dont l'algèbre des invariants n'est pas engendrée par un nombre fini de générateurs.

Les mathématiciens du dix-neuvième siècle étaient très familiers avec l'essentiel de ce que l'on désigne dans l'enseignement comme "mathématiques modernes". Le programme actuel de l'agrégation est bien adapté à l'étude des invariants avec les méthodes des pionniers que furent notamment Cayley, Sylvester, Salmon, Mollien, Gordan, Schur, Capelli et bien d'autres.

Les deux résultats les plus consistants établis dans le problème de mathématiques générales sont d'une part la formule de Cayley-Sylvester pour les invariants des formes binaires (question 9-9) et d'autre part une description des invariants de l'action diagonale du groupe symétrique (question 11-5). On déduit facilement de ce dernier résultat que l'algèbre des invariants d'un groupe fini est en caractéristique zéro engendrée par un nombre fini de générateurs dont on peut limiter le nombre et le degré (dernière question). Les outils de l'algèbre commutative moderne, c'est à dire de la fin du 19ième siècle et du début du 20ième, ont permis de considérablement généraliser ces résultats. En particulier David Hilbert a donné en 1893 une démonstration remarquable du fait que l'algèbre des invariants d'un groupe compact est engendrée par un nombre fini de polynômes. Il lui a fallu prouver au passage que les idéaux des anneaux de polynômes sont de type fini, ce qui est fondamental mais à ne pas confondre avec la question posée plus haut. Ces méthodes reprises et améliorées par Emmy Noether ne permettent cependant pas facilement de trouver de façon constructive un système générateur. Ce problème n'aborde pas la question fondamentale des syzygies, c'est-à-dire des relations entre les générateurs puis des relations entre ces relations, etc, point de départ de l'algèbre homologique.

Questions et réponses

Une épreuve écrite consiste pour un candidat à rédiger un texte. Ceci nécessite un effort de communication. Il ne suffit pas d'avoir raison, il faut encore donner les moyens aux correcteurs de s'en convaincre. Ce qui demande rigueur, précision, limpidité. Les ambiguïtés dues à des formulations difficilement compréhensibles, à des quantifications molles, à des phrases sans sens ou à une écriture illisible ne peuvent profiter au candidat. La concision peut concourir à cette clarté.

1- La première partie est l'occasion de traiter quelques exemples très simples, action de racines de l'unité sur le corps k, action de $GL_n(k)$ sur k^n, et d'établir un minimum de résultats sur les rapports entre polynômes et fonctions polynômes. La première question a été assez déterminante. De très nombreux candidats semblent penser qu'une fonction polynôme non nulle en n variables ne peut s'annuler que sur un ensemble fini. Ce résultat, essentiel pour n=1, est inexact pour n plus grand. Le cas d'une forme linéaire non nulle ou de l'équation d'un cercle réel le montre clairement. Mais trop de candidats ont des polynômes à n variables une vision totalement formelle, reposant uniquement sur le maniement des multi-indices, très éloignée de tout objet compréhensible.

La seconde question a parfois été démontrée en faisant appel au théorème du prolongement analytique plutôt qu'à la première question. Mais il fallait savoir prouver qu'une fonction analytique identiquement nulle a tous ses coefficients de Taylor nuls. On devait alors évoquer la formule de Taylor et constater que le prolongement analytique était en fait inutile.

Une erreur surprenante a pourtant été assez fréquente. Pour beaucoup de candidats un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est toujours un produit d'ouverts de $\mathbf{R}$. La topologie de $\mathbf{R}^n$, bien qu'obtenue comme topologie produit, permet heureusement plus de libertés.

En 1-3-1, il fallait vérifier que g.f est linéaire, que l'application qui à f associe g.f est elle aussi linéaire, que l'application qui à g associe g.f est multiplicative (tout ceci,joint à la constatation que 1.f=f, permettant d'établir que l'application qui à f associe g.f est inversible si ceci n'avait pas été directement prouvé avant). Tout ceci demandait de comprendre l'énoncé et de procéder à des vérifications certes assez fastidieuses. Mais les candidats ont tout à gagner à prouver qu'ils sont capables de rédiger avec rigueur et précision, tout en restant concis.

2-La résolution de la deuxième partie nécessite essentiellement de remarquer que les formules de changements de bases sont homogènes de degré un. Une faute fréquente, et dénoncée de rapports en rapports, est de croire que des sous espaces vectoriels sont globalement en somme directe dès qu'ils le sont deux à deux.

3-Les questions du 3 sont facilement traitées par les candidats connaissant les outils de base d'algèbre linéaire et le minimum sur la réduction des endomorphismes, par exemple lorsque le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples. Le 3-1 se fait plus facilement quand on connaît les mineurs des matrices. La technique introduite en 3-3-2, à savoir trouver un élément remarquable dans chaque G-orbite, sera d'un usage constant dans la suite.

4-La question sur les polynômes symétriques est une pure question de cours. Elle fournit l'occasion de rappeler l'importance de l'unicité de l'écriture d'un polynôme symétrique comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires. L'expérience de l'oral du concours montre que ce point n'est pas souvent jugé à sa juste valeur. Il en est d'ailleurs de même avec beaucoup d'autres énoncés d'unicité (réductions, classifications, décompositions,....).

Les questions suivantes montrent qu'il n'est pas toujours vrai qu'une algèbre d'invariants, même engendrée par un nombre fini d'éléments, soit une algèbre de polynômes. La simple multiplication par -1 sur un plan en donne un exemple. On trouve au passage l'exemple le plus parlant d'un anneau intègre non factoriel, à savoir $A = k[X,Y,Z,T]/(XY-ZT)$. La relation $XY = ZT$ que l'on a posé dans A ruine tout espoir d'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.

5 et 6- Le début nécessite de savoir que les sphères sont les orbites du groupe orthogonal et de comprendre comment une sphère est coupée par une demi-droite issue de son centre. On en déduit que tout polynôme invariant est un polynôme en la norme. Un petit argument, très rarement évoqué, restait nécessaire pour passer en un polynôme en le carré de la norme.

La suite donnait une version algébrique de l'un des cas d'égalité des triangles. La démonstration demande quelque intuition autre que formelle des candidats. A noter que le produit scalaire est la moitié de la polarisation, au sens du 10, du carré de la norme. La polarisation est un procédé naturel pour, à partir des invariants d'une action donnée, trouver des invariants des actions diagonales. Ceci sera développé dans les questions du 10. A noter aussi que le résultat prouvé à la fin du 6 se généralise à un nombre quelconque de vecteurs mais que les démonstrations sont plus sérieuses.

7-Le tout début nécessite de connaitre un minimum sur la diagonalisation des endomorphismes complexes et sur le comportement de ceux-ci sous de petites perturbations. La fin du 7 demande un peu plus en obligeant à utiliser les polynômes symétriques puisque la conjugaison "restreinte" aux matrices diagonales revient à permuter les valeurs propres.

8 et 9-Les bonnes copies abordent le domaine des formes binaires. En 8-2 on reconnait la méthode usuelle de résolution des équations du second degré. Un peu de familiarité avec les formes quadratiques permet de résoudre sans calculs le 8-1. La difficulté est plutôt conceptuelle. Il faut accepter de travailler avec les polynômes définis sur un espace vectoriel qui est lui-même un espace de polynômes.

La formule de Cayley-Sylvester établie en 9-9 est d'un secours modéré pour bien comprendre la structure des invariants. Avec un peu de travail on peut certes grâce à cette formule établir que les invariants en degré trois sont engendrés par le discriminant des formes cubiques. Mais à partir du degré cinq les calculs deviennent très pénibles. Pour plus de détails on renvoie à l'article de synthèse de Dixmier. Le résultat admis en 9-4 dit d'une part que les représentations de dimension finie de $SL_2(k)$ sont complètement réductibles et d'autre part que l'on en a une liste complète avec les formes binaires. Les démonstrations ne sont pas difficiles mais auraient alourdies le problème. On renvoie au livre de T.A.Springer pour une preuve de ce résultat démontré au siècle dernier.

10-11 et 12. Seules les toutes meilleures copies arrivent en ces questions. Un candidat a su traiter parfaitement la totalité du problème. Après avoir introduit la notion de polarisation, qui généralise la polarisation des formes quadratiques, et avoir établi quelques propriétés fonctorielles, on montre en une suite de questions que les polarisations des polynômes symétriques élémentaires engendrent les invariants de l'action diagonale du groupe symétrique. Il peut être amusant de constater que si on est assez soigneux cette preuve montre au passage, mais en caractéristique zéro, le résultat classique d'existence du 4-1. L'application qui en est faite aux groupes finis permet de contrôler dans ce cas le nombre et le degré des générateurs, ce qui est le point de départ pour construire des algorithmes permettant de les obtenir.

Bibliographie:

Mémoires originaux :

A. Cayley. A second memoir upon quantics (1859). Collected Mathematical Papers II (1889) 250-275.

D. Hilbert. Über die vollen Invariantensyteme. Math. Annalen 42. p (1893) 313-373.

E. Jordan. Mémoire sur les covariants des formes binaires (1876).

J.T. Sylvester. Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants (1878). Collected Mathematical Papers III.

Ouvrage de base :

H. Weyl. The classical groups. Their invariants and representations. Princeton University Press (1946).

Références plus récentes :
J. Dieudonné- Carrel. Invariant theory: Old and New. Academic press (1966).
J. Dixmier. La théorie des invariants. Gazette des mathématiciens 43 (1990).
T.A. Springer. Invariant theory. Lecture notes in mathematics 585 (1970).

composition d'analyse

Durée : 6 heures

Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

Avertissement

Les opérations analytiques sur les matrices telles que limite, sommation, dérivation,... sont effectuées sur chaque élément. Par exemple, la matrice $A(n)$ d'éléments $a_{ij}(n)$ tend vers la matrice B d'éléments b_{ij} lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si l'on a $b_{ij} = \lim_{n \to \infty} a_{ij}(n)$ quels que soient i et j ; si $U(t)$ est la matrice d'éléments $u_{ij}(t)$, l'intégrale $\int_a^b U(t)\,dt$ est la matrice d'éléments $\int_a^b u_{ij}(t)\,dt$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Soit donnée une famille de nombres complexes $a(m, n)$ pour $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ entiers. On suppose qu'il existe une suite de nombres réels positifs c_n avec les propriétés :

$$\text{(1)} \qquad \text{pour tout } m \quad |a(m, n)| \leqslant c_n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n < +\infty .$$

On suppose que, pour tout $n \geqslant 0$, la limite suivante existe :

$$\text{(2)} \qquad \lim_{m \to +\infty} a(m, n) = b_n .$$

Montrer que les deux séries $a_m = \sum_{n=0}^{+\infty} a(m, n)$ et $b = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergent et que l'on a $\lim_{m \to +\infty} a_m = b$, soit explicitement

$$\text{(3)} \qquad \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a(m, n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{m \to +\infty} a(m, n) .$$

2. On suppose donnée une suite de polynômes $P_m(z)$ (pour $m \geqslant 0$) et une série entière $\Phi(z)$ de rayon de convergence R. On pose

$$\text{(4)} \qquad P_m(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(m, n)\, z^n, \qquad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

et l'on suppose la relation (2) satisfaite. On introduit la série majorante $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$ avec la définition

$$\text{(5)} \qquad \gamma_n = \sup_{m \geqslant 0} |a(m, n)| ;$$

on suppose que cette série a un rayon de convergence $R' > 0$.

a. Prouver la relation $R \geqslant R'$, d'où $R > 0$.

b. Soit c un nombre réel tel que $0 < c < R'$, et soit D_c l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| \leqslant c$. Montrer que l'on a

$$\text{(6)} \qquad \lim_{m \to +\infty} P_m(z) = \Phi(z) .$$

uniformément pour z parcourant D_c .

c. Examiner le cas des polynômes

$$\text{(7)} \qquad P_m(z) = \frac{1}{m+1}(1 + z + \cdots + z^m) .$$

On déterminera les séries entières $\Phi(z)$ et $F(z)$, leurs rayons de convergence R et R'. La relation (6) est vraie pour tout nombre complexe z tel que $|z| < R'$; on examinera le cas des nombres z tels que $R' \leqslant |z| < R$.

3. On rappelle la définition de la série exponentielle : $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Déduire de ce qui précède la formule bien connue :

(8) $$\exp z = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m .$$

4. Pour tout entier $d \geqslant 1$, on note $\Phi_d(q)$ le *polynôme cyclotomique* d'ordre d. On rappelle que $\Phi_d(q)$ est donné par

(9) $$\Phi_d(q) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant d \\ k \wedge d = 1}} \left(q - \exp \frac{2 i k \pi}{d}\right)$$

et que l'on a la formule :

$$q^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(q),$$

où le produit est étendu aux diviseurs d de n. On introduit aussi une suite de polynômes $\Pi_n(q)$ par

(10) $$\begin{cases} \Pi_0(q) = 1 \\ \Pi_n(q) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{q^i - 1}{q - 1} \qquad \text{pour } n \geqslant 1 . \end{cases}$$

a. Établir la formule :

(11) $$\text{pour } n \geqslant 2 \qquad \Pi_n(q) = \prod_{d=2}^{n} \Phi_d(q)^{[n/d]},$$

où $[x]$ désigne la partie entière d'un nombre réel $x \geqslant 0$.

b. Soient n et i deux entiers tels que $0 \leqslant i \leqslant n$. On introduit la fraction rationnelle

(12) $$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \frac{\Pi_n(q)}{\Pi_i(q)\,\Pi_{n-i}(q)} .$$

Par application de *a.*, prouver que $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$ est un *polynôme* en q. Montrer que ses racines sont des racines de l'unité et qu'elles sont simples.

c. Établir la relation de récurrence :

(13) $$\begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q + q^{n-i+1} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix}_q \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) .$$

On définit $(z; q)_n$ par la règle

(14) $$\begin{cases} (z; q)_0 = 1 \\ (z; q)_n = \prod_{i=1}^{n} (1 + q^{i-1} z) \qquad \text{pour } n \geqslant 1 . \end{cases}$$

Établir la relation

(15) $$(z; q)_n = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q q^{i(i-1)/2} z^i \qquad \text{pour } n \geqslant 0 .$$

d. Calculer la valeur de $\Pi_n(q)$ et de $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$ pour $q = 1$; spécialiser au cas $q = 1$ les résultats du *c.*

5. Soit q un nombre complexe de module différent de 1. On introduit la série entière (en la variable z) :

(16)
$$e_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{\Pi_n(q)} z^n .$$

a. Déterminer selon les valeurs de q le rayon de convergence R_q de la série précédente.

b. Les polynômes $P_{m,q}(z)$ sont définis comme suit :

(17)
$$P_{m,q}(z) = \prod_{i=1}^{m} (1 - (q-1)\, q^{i-1} z) .$$

On suppose qu'on a $|q| < 1$. Par application de la question 2, établir la relation

(18)
$$e_q(z) = \lim_{m \to +\infty} P_{m,q}(z)$$

avec convergence uniforme sur toute partie compacte de $\mathbb{C}$.

c. On suppose q réel et $0 < q < 1$. Établir la formule

(19)
$$\lim_{q \to 1} e_q(z) = \exp z$$

avec convergence uniforme sur toute partie compacte de $\mathbb{C}$.

d. On suppose donnés $\varepsilon > 0$ et $c > 0$. Montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'on ait :

(20)
$$|\exp z - P_{m,q}(z)| < \varepsilon$$

si les nombres z, m, q satisfont aux relations suivantes :

$$1 - \delta < q < 1 , \qquad q^m < \delta , \qquad |z| \leqslant c .$$

DEUXIÈME PARTIE

1. Soient $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ deux entiers. On note $M_{p,q}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices rectangulaires à p lignes et q colonnes, à éléments complexes.

   a. Montrer qu'on définit sur cet espace une norme par la formule

(1) $$\| A \|_{p,q} = \sup_{1 \leqslant j \leqslant q} \sum_{i=1}^{p} | a_{ij} |,$$

   où A est la matrice d'éléments a_{ij}.

   b. Établir la relation

(2) $$\| {}^tA \|_{q,p} \leqslant q \cdot \| A \|_{p,q}$$

   pour A dans $M_{p,q}(\mathbb{C})$; on a noté ${}^tA$ la matrice transposée de A. Peut-on améliorer cette inégalité ?

   c. Établir la formule

(3) $$\| AB \|_{p,r} \leqslant \| A \|_{p,q} \cdot \| B \|_{q,r}$$

   où A appartient à $M_{p,q}(\mathbb{C})$ et B à $M_{q,r}(\mathbb{C})$.

   Dans la suite, on ne considère plus que des matrices *carrées*, et l'on écrit simplement $\| A \|$ pour $\| A \|_{N,N}$ lorsque A appartient à $M_N(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire à $M_{N,N}(\mathbb{C})$).

2. *a.* Démontrer que la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} \| A(n) \| < +\infty$ suffit à établir la convergence de la série de matrices $\sum_{n=0}^{+\infty} A(n)$.

   b. Soit $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R. Soit A une matrice carrée d'ordre N telle que $\| A \| < R$. Démontrer que la série de matrices $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n A^n$ converge; la somme est notée $\Phi(A)$.

   c. Soit donnée une suite de polynômes $(P_m(z))_{m \geqslant 0}$. On suppose que, pour chaque entier $n \geqslant 0$, le coefficient de z^n dans $P_m(z)$ a pour limite le coefficient correspondant dans $\Phi(z)$ (lorsque m tend vers l'infini). Par analogie avec la question I.2., donner des conditions de validité de la formule

(4) $$\lim_{m \to +\infty} P_m(A) = \Phi(A).$$

   d. L'exponentielle d'une matrice A dans $M_N(\mathbb{C})$ est définie par la série

(5) $$\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

   dont on établira la convergence. Démontrer que l'on a :

(6) $$\exp A = \lim_{m \to +\infty} \left(I + \frac{A}{m} \right)^m,$$

   où I est la matrice unité d'ordre N.

e. On reprend les notations de I.5. Soit A une matrice dans $M_N(\mathbb{C})$. Démontrer que, pour tout nombre complexe q tel que $|q| < 1$, on a :

$$e_q(A) = \lim_{m \to +\infty} \prod_{i=0}^{m-1} (I - (q-1)q^i A). \tag{7}$$

Établir ensuite la formule

$$\exp A = \lim_{q \to 1} e_q(A), \tag{8}$$

où la limite est prise sur les nombres réels q tels que $0 < q < 1$. A-t-on une relation de double limite comme dans la formule (20) de I.5.*d.* ?

f. On suppose que la matrice A est *diagonalisable* sous la forme $A = S \Lambda S^{-1}$, où S est inversible dans $M_N(\mathbb{C})$, et où Λ est diagonale d'éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Déterminer la matrice $\Phi(A)$ et en particulier exp A et $e_q(A)$. Commenter les résultats des sections *c.*, *d.* et *e.* dans ce cas.

3. On introduit une suite de polynômes de la forme

$$P_m(z) = (1 + \varepsilon_{m,1} z) \ldots (1 + \varepsilon_{m,p_m} z) \qquad (m \geqslant 1) \tag{9}$$

et l'on fait les hypothèses suivantes :

α. il existe une suite $(\alpha_m)_{m \geqslant 1}$ de nombres positifs tendant vers 0 et telle que $|\varepsilon_{m,i}| \leqslant \alpha_m$ pour $1 \leqslant i \leqslant p_m$;

β. il existe un nombre $C > 0$ tel que l'on ait :

$$|\varepsilon_{m,1}| + \ldots + |\varepsilon_{m,p_m}| \leqslant C$$

pour tout $m \geqslant 1$;

γ. la limite suivante existe :

$$c = \lim_{m \to +\infty} (\varepsilon_{m,1} + \ldots + \varepsilon_{m,p_m}).$$

a. Démontrer que dans le polynôme $P(z) = (1 + a_1 z) \ldots (1 + a_p z)$, le module du coefficient de z^n est majoré par $\frac{1}{n!}(|a_1| + \ldots + |a_p|)^n$.

b. Pour tout entier n avec $n \geqslant 0$, on note $s_n(m)$ le coefficient de z^n dans le polynôme $P_m(z)$. Calculer la limite de $s_1(m)$ et de $s_2(m)$ pour m tendant vers $+\infty$.

c. Établir la formule

$$\exp cz = \lim_{m \to +\infty} P_m(z) \tag{10}$$

pour tout nombre complexe z. (On pourra former $s_1(m)\, s_n(m) - (n+1)\, s_{n+1}(m)$.)

d. Établir la relation

$$\exp cA = \lim_{m \to +\infty} (I + \varepsilon_{m,1} A) \ldots (I + \varepsilon_{m,p_m} A) \tag{11}$$

pour toute matrice A dans $M_N(\mathbb{C})$. Examiner le cas des matrices diagonalisables.

e. Montrer comment retrouver la formule (6) en spécialisant convenablement les nombres $\varepsilon_{m,i}$.

TROISIÈME PARTIE

On note $J =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $t \mapsto A(t)$ une application continue de J dans l'espace $M_N(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre N à coefficients complexes.

1. Soient t_0 et t_1 deux points de J tels que $t_0 \leqslant t_1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Δ_n l'ensemble des points $(s_1, \ldots, s_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$t_0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots s_n \leqslant t_1 .$$

On définit aussi l'intégrale matricielle

(1) $$U_n(t_1, t_0) = \int_{\Delta_n} A(s_n) \ldots A(s_1) \, ds_1 \ldots ds_n,$$

et l'on pose :

(2) $$U_0(t_1, t_0) = I \qquad \text{(matrice unité d'ordre N).}$$

a. Montrer que la série matricielle

(3) $$U(t_1, t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(t_1, t_0) \qquad (t_0 \leqslant t_1)$$

converge. En particulier, on a $U(t_0, t_0) = I$.

b. Soient t_0, t_1, t_2 trois points de J tels que $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$. Établir la relation

(4) $$U_n(t_2, t_0) = \sum_{p=0}^{n} U_p(t_2, t_1) \, U_{n-p}(t_1, t_0) \qquad (n \geqslant 0)$$

et en déduire qu'on a :

(5) $$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1) \, U(t_1, t_0) .$$

c. Établir l'inégalité

(6) $$\| U(t_1, t_0) - I \| \leqslant \left\{ \exp \int_{t_0}^{t_1} \| A(s) \| \, ds \right\} - 1$$

pour $t_0 \leqslant t_1$.

d. Soit B une matrice telle que $\| B \| < 1$. Montrer que la matrice $I + B$ est inversible.

e. Montrer que la matrice $U(t_1, t_0)$ est inversible (on pourra d'abord supposer $t_1 - t_0$ assez petit, puis raisonner par compacité).

2. Soient t_0, t_1 deux points de J. On a défini $U(t_1, t_0)$ lorsque $t_0 \leqslant t_1$; lorsque l'on a $t_0 > t_1$, on note $U(t_1, t_0)$ l'inverse de $U(t_0, t_1)$.

a. Montrer que la formule (5) reste valable quels que soient t_0, t_1, t_2 dans J.

b. Montrer que l'application $(t_0, t_1) \mapsto U(t_1, t_0)$ de $J \times J$ dans $M_N(\mathbb{C})$ est *continue.* (On pourra utiliser les formules (5) et (6).)

3. *a.* Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit une application continue A_n de $J^n = J \times \ldots \times J$ (n facteurs) dans $M_N(\mathbb{C})$ par la formule

(7) $$A_n(s_1, \ldots, s_n) = A(s'_n) \ldots A(s'_1)$$

où $s'_1, \ldots, s'_n$ est le réarrangement en ordre croissant de la suite $s_1, \ldots, s_n$. Montrer que l'on a :

(8) $$U_n(t_1, t_0) = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t_1} \ldots \int_{t_0}^{t_1} A_n(s_1, \ldots, s_n)\, ds_1 \ldots ds_n$$

lorsque $t_0 \leqslant t_1$.

b. On suppose que les matrices $A(t)$ commutent deux à deux. Déduire de la formule (8) la relation

(9) $$U(t_1, t_0) = \exp \int_{t_0}^{t_1} A(t)\, dt.$$

Interpréter la formule (5) dans ce cas.

c. Étudier les deux cas particuliers suivants :

– $A(t)$ est une matrice diagonale;

– $A(t) = A$ est indépendante de t.

4. On suppose qu'on a $t_0 \leqslant t_1$. Calculer explicitement la matrice $U(t_1, t_0)$ dans les cas suivants :

a. $N = 2$ et la matrice $A(t)$ est triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & c(t) \end{pmatrix};$$

b. $N = 3$ et la matrice $A(t)$ est triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a(t) & b(t) \\ 0 & 0 & c(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Soient t_0 et t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$. Pour chaque entier $p \geqslant 1$, on suppose donnée une subdivision de l'intervalle $[t_0, t_1]$ en p intervalles au moyen des points de subdivision $s_1^{(p)}, \cdots, s_{p-1}^{(p)}$ tels que

$$t_0 < s_1^{(p)} < s_2^{(p)} < \ldots < s_{p-2}^{(p)} < s_{p-1}^{(p)} < t_1 .$$

On pose $s_0^{(p)} = t_0$, $s_p^{(p)} = t_1$ et $\Delta s_i^{(p)} = s_{i+1}^{(p)} - s_i^{(p)}$. On pose :

$$\varepsilon_p = \max (\Delta s_0^{(p)}, \ldots, \Delta s_{p-1}^{(p)}) .$$

Montrer que sous l'hypothèse $\lim_{p \to +\infty} \varepsilon_p = 0$, on a

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{U}(t_1, t_0) = \lim_{p \to +\infty} (\mathrm{I} + \mathrm{A}(s_{p-1}^{(p)})\, \Delta s_{p-1}^{(p)}) \ldots (\mathrm{I} + \mathrm{A}(s_0^{(p)})\, \Delta s_0^{(p)}) .$$

Cas particulier : $\mathrm{A}(t) = \mathrm{A}$ est indépendante de t.

6. On considère deux familles de produits de matrices

$$\mathrm{U}_p = (\mathrm{I} + \mathrm{A}_{p,1}) \ldots (\mathrm{I} + \mathrm{A}_{p,p}) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_p = (\mathrm{I} + \mathrm{B}_{p,1}) \ldots (\mathrm{I} + \mathrm{B}_{p,p}).$$

On suppose qu'il existe une suite de nombres $\varepsilon_p > 0$ tendant vers 0 et tels que l'on ait

$$\text{(11)} \qquad \| \mathrm{B}_{p,i} - \mathrm{A}_{p,i} \| \leqslant \varepsilon_p \| \mathrm{A}_{p,i} \| \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant i \leqslant p .$$

On suppose aussi que la suite des nombres $\sum_{i=1}^{p} \| \mathrm{A}_{p,i} \| = \mathrm{C}_p$ est bornée. Montrer que la suite $(\mathrm{U}_p)_{p \geqslant 1}$ converge si et seulement si la suite $(\mathrm{V}_p)_{p \geqslant 1}$ converge, et que les deux limites sont égales.

7. De ce qui précède, déduire la formule

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} \exp(\mathrm{A} + \mathrm{B})\, t &= \lim_{p \to +\infty} \left[\left(\mathrm{I} + \frac{\mathrm{A}t}{p} \right) \left(\mathrm{I} + \frac{\mathrm{B}t}{p} \right) \right]^p \\ &= \lim_{p \to +\infty} \left[\exp\left(\frac{\mathrm{A}t}{p} \right) \cdot \exp\left(\frac{\mathrm{B}t}{p} \right) \right]^p . \end{aligned}$$

Que peut-on dire lorsque les matrices A et B commutent ?

QUATRIÈME PARTIE

On conserve les notations et les hypothèses de la troisième partie, mais les résultats qu'on va établir ne dépendent que des questions III.1 *et* III.2.

1. *a.* Établir la formule

(1) $$\mathrm{A}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{U}(t+h, t) - \mathrm{I}]$$

pour t dans J.

b. En déduire les deux relations différentielles

(2) $$\frac{\partial}{\partial t_1} \mathrm{U}(t_1, t_0) = \mathrm{A}(t_1)\,\mathrm{U}(t_1, t_0)$$

(3) $$\frac{\partial}{\partial t_0} \mathrm{U}(t_1, t_0) = -\,\mathrm{U}(t_1, t_0)\,\mathrm{A}(t_0)$$

pour t_0, t_1 dans J.

c. Soient t_0 dans J et $\boldsymbol{x}_0$ dans $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$. Montrer que l'équation différentielle

(E) $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}(t)\,\boldsymbol{x}(t) \qquad (t \in \mathrm{J}),$$

où $\boldsymbol{x}(t)$ est un vecteur dans $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ dépendant de t, avec la condition initiale $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, admet pour unique solution

(4) $$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{U}(t, t_0)\,\boldsymbol{x}_0 .$$

Autrement dit, $\mathrm{U}(t_1, t_0)$ est la *résolvante* de l'équation différentielle (E).

d. Commenter le rapport entre la question III.5. et la méthode d'Euler pour résoudre les équations différentielles.

2. On suppose que l'on a $\mathrm{A}(t) = \mathrm{B}(t) + \mathrm{C}(t)$, où $\mathrm{B}(t)$ et $\mathrm{C}(t)$ sont des matrices dépendant continûment de t. On fixe t_0 dans J et l'on écrit $\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(t, t_0)$ pour $\mathrm{U}(t, t_0)$ et $\mathrm{U}_{\mathrm{B}}(t, t_0)$ pour l'expression analogue où l'on remplace $\mathrm{A}(t)$ par $\mathrm{B}(t)$.

Montrer qu'on a

(5) $$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(t, t_0) = \mathrm{U}_{\mathrm{B}}(t, t_0)\,\mathrm{H}(t),$$

où la matrice $\mathrm{H}(t)$ satisfait à l'équation différentielle

(6) $$\frac{d}{\mathrm{d}t}\mathrm{H}(t) = \mathrm{D}(t)\,\mathrm{H}(t)$$

avec la définition

(7) $$\mathrm{D}(t) = \mathrm{U}_{\mathrm{B}}(t_0, t)\,\mathrm{C}(t)\,\mathrm{U}_{\mathrm{B}}(t, t_0).$$

La condition initiale est $\mathrm{H}(t_0) = \mathrm{I}$. Déduire de là (lorsque $t \geqslant t_0$) une représentation de $\mathrm{H}(t)$ sous forme d'une série comme en III.

3. Soient B et C deux matrices dans $M_N(\mathbb{C})$, et soit $t \geqslant 0$. De ce qui précède, déduire la relation

(8) $$\exp(-\mathrm{B}t)\cdot\exp(\mathrm{B}+\mathrm{C})\,t = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathrm{E}_n} \mathrm{V}(s_n)\ldots\mathrm{V}(s_1)\,\mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_n\,,$$

où l'on a posé

(9) $$\mathrm{V}(t) = (\exp - \mathrm{B}t)\,\mathrm{C}\,(\exp \mathrm{B}t)\,.$$

On précisera le domaine d'intégration E_n.

4. Montrer que $\mathrm{V}(t)$ satisfait à l'équation différentielle

(10) $$\frac{d}{\mathrm{d}t}\mathrm{V}(t) = [\mathrm{V}(t), \mathrm{B}]\,,$$

(avec l'abréviation $[\mathrm{L}, \mathrm{M}] = \mathrm{LM} - \mathrm{ML}$) et qu'elle est donnée par la formule de Lie :

(11) $$\begin{aligned}\mathrm{V}(t) &= \mathrm{C} + t[\mathrm{C}, \mathrm{B}] + \frac{t^2}{2}[[\mathrm{C}, \mathrm{B}], \mathrm{B}] + \ldots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}[\ldots[[\mathrm{C}, \underbrace{\mathrm{B}], \mathrm{B}]\ldots, \mathrm{B}}_{m}]\,.\end{aligned}$$

AGRÉGATION EXTERNE DE MATHÉMATIQUES :

Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse (session 1994)

Le thème du problème est l'étude des approximations de l'exponentielle dans divers contextes de l'Analyse. De manière approximative, on calcule l'exponentielle d'un nombre z en le décomposant en somme $z = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_N$ d'un "grand" nombre N de "petits" nombres ε_i et l'on a:

$$\exp(z) \simeq (1+\varepsilon_1)\ldots(1+\varepsilon_N). \tag{1}$$

Une formulation précise de ce résultat suppose la manipulation de sommes ou de produits dont le nombre de termes augmente indéfiniment; le même problème se rencontre dans les théorèmes limites du calcul des Probabilités. Dans la première partie, on étudie deux types de décomposition:

$$z = \frac{z}{N} + \cdots + \frac{z}{N} \tag{2}$$

$$z = (1-q)z + q(1-q)z + \cdots + q^{N-1}(1-q)z + q^N z \text{ , pour } q \text{ proche de } 1. \tag{3}$$

Le cas où on remplace un nombre z par une matrice carrée n'introduit pas de difficulté supplémentaire. La deuxième partie est consacrée à cette extension, après les préliminaires classiques sur les normes matricielles.

La troisième et la quatrième partie sont une application de ces techniques à la résolution des équations différentielles linéaires. Le résultat principal est la formule suivante pour la résolvante $U(t_1, t_0)$ d'une équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{4}$$

à savoir:

$$U(t_1, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \cdots \int A(s_n) \cdots A(s_1) \, ds_1 \cdots ds_n \tag{5}$$

l'intégrale portant sur le domaine défini par les inégalités:

$$t_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t_1. \tag{6}$$

Cette formule a été découverte par Lappo-Danilewski dans le cas des équations différentielles holomorphes (vers 1920); elle joue un rôle important dans l'étude de la monodromie des équations différentielles [1], [2]. Dans le domaine réel, elle a servi de modèle au physicien Freeman Dyson (vers 1950) pour l'étude de la théorie quantique des champs [3]. Evidemment, il s'agit là d'équations aux dérivées partielles, du type de l'équation de Schrödinger:

$$i \, \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + V \psi, \tag{7}$$

mais les méthodes se transposent dans ce cas.

Un corollaire facile est la formule de Lie-Trotter-Kato:

$$\exp \, (A + B) \, t = \lim_{n \to +\infty} \left(\exp \frac{At}{n} \, \exp \frac{Bt}{n} \right)^n . \tag{8}$$

On peut par exemple avoir $A = -i\Delta$ et $B = -iV$ avec les notations de l'exemple précédent. De la même manière qu'une intégrale de Riemann se définit comme la limite, pour n tendant vers l'infini, d'une somme de n termes, dans des formules telles que la précédente, on a la limite d'un produit de n facteurs. C'est le point de départ d'une théorie des intégrales multiplicatives, inventée par Volterra et exposée par exemple dans le livre de Dollard [4].

Toutes ces formules correspondent à diverses méthodes de résolution des équations différentielles (ou aux dérivées partielles):

Méthode d'Euler - Méthode de Picard - Méthodes à pas multiples.

Le parti pris adopté dans le problème a été d'étudier *a priori* des séries telles que (5) dans la troisième partie, le raccord avec les équations différentielles n'intervenant que dans la quatrième partie.

Bibliographie

[1] P. Cartier, Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées, *Astérisque* **161/2** (1988), 31-52.

[2] P. Cartier, Développements récents sur les groupes de tresses; applications à la topologie et à l'algèbre, *Astérisque* **189/190** (1990), 17-68.

[3] J. Schwinger (éditeur), *Selected papers in Quantum Electrodynamics*, Dover (1958).

[4] J. Dollard et Ch. Freedman, Product integration, Addison-Wesley (1979).

Remarques des correcteurs

Avant de commenter les différentes parties du texte, quelques remarques générales s'imposent. Le problème comportait de nombreuses questions théoriquement à la portée de la plupart des candidats, car basées sur des résultats et des méthodes très classiques en Analyse.

Le soin apporté à la rédaction de ces questions par les candidats n'est pas un luxe inutile. Le début du devoir doit, en particulier, être l'occasion d'impressionner favorablement les correcteurs par la précision et la clarté des arguments utilisés. Il ne faut cependant pas confondre ce soin indispensable avec un délayage indigeste des questions les plus élémentaires. Là encore, clarté et précision de la rédaction permettent d'éviter cet écueil. Signalons, pour finir, que les tentatives de bluff, ou la mauvaise foi visible de certains candidats, ont toutes les chances d'échouer, et rendent généralement les correcteurs, originellement bienveillants, d'une humeur détestable.

Première partie.

1) Cette question abordait l'un des problèmes les plus courants en Analyse: l'échange de deux limites, plus précisément ici, l'échange d'une limite et d'une somme de série. Elle pouvait être traitée de nombreuses façons. Regrettons tout d'abord qu'un grand nombre de candidats pensent que cet échange est toujours licite. D'autre part, l'invocation quasi-magique du "théorème de la double limite" ou du "théorème de convergence dominée de Lebesgue" ne peut convaincre les correcteurs que si les hypothèses de ces théorèmes sont comprises et vérifiées. Par exemple, le théorème de la double limite était ici une conséquence de la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n} a(m,n)$ de fonctions de la variable m. Cette convergence uniforme résulte de la convergence normale. Ce terme de convergence normale est d'ailleurs à l'origine de graves confusions avec la convergence absolue. La convergence normale signifie que $\sum\limits_{n} \sup\limits_{m} |a(m,n)|$ converge, la convergence absolue signifie que $\sum\limits_{n} |a(m,n)|$ converge pour tout m. Pour en finir avec ces rappels élémentaires, constatons que, pour beaucoup de candidats, montrer qu'une série $\sum a_n$ converge absolument consiste à montrer que les quantités $\left|\sum\limits_{0}^{N} a_n\right|$ sont majorées, ou même que $\left|\sum\limits_{0}^{\infty} a_n\right| < +\infty$!

2)a) et 5)a) Les questions relatives aux rayons de convergence ont posé des problèmes inattendus. La formule d'Hadamard n'est pas la seule méthode permettant d'étudier le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$! On peut également utiliser par exemple des inégalités vérifiées par les $|a_n|$ ou encore la règle de d'Alembert.

2)b) Il y a eu dans cette question de nombreuses confusions entre l'uniformité par rapport à z et l'uniformité par rapport à m. Il suffisait en fait de majorer, pour tout z de D_c, $|\phi(z) - P_m(z)|$ par $\sum\limits_{0}^{\infty} |b_n - a(m,n)|\, c^n$ pour se ramener très facilement à la question 1).

2)c) Cet exemple a été très mal compris par de nombreux candidats. Il était destiné à insister sur l'importance de la détermination de R'. Signalons également qu'ici, γ_n valait $1/(n+1)$ et non pas 1.

3) Il fallait dans cette question clairement établir que $a(m,n)$ était majoré par $\frac{1}{n!}$ et tendait vers $\frac{1}{n!}$ quand m tendait vers l'infini.

4)a) On constatait que $[n/d]$ correspondait au nombre de multiples de d compris entre 2 et n.

4)b) Il suffisait, pour traiter cette question, de montrer que $[n/d] - [i/d] - [(n-i)/d]$ valait soit 0 soit 1. Rappelons de plus que pour prouver qu'une fraction rationnelle est un polynôme, il ne suffit pas d'établir que le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur!

4)c) Une relation de récurrence ne se démontre pas nécessairement par récurrence! De plus, la démonstration du développement de $(z;q)_n$ était grandement facilitée par la connaissance de la démonstration de la très classique formule du binôme.

5)b) On développait les polynômes $P_{m,q}(z)$ à l'aide de la formule (15). Il restait alors à étudier la limite de $a(m,n)$ et surtout à majorer correctement $|a(m,n)|$ afin de démontrer que R' valait $+\infty$.

5)c) et 5)d) Ces questions n'ont été que très rarement abordées avec succès, en particulier le 5)d) dont la difficulté provenait des deux conditions, apparemment contradictoires, imposées à q : $1 - \delta < q < 1$ et $q^m < \delta$.

Deuxième partie.

1) Ces questions portant sur une norme sur l'espace $M_{p,q}(\mathbb{C})$, pourtant faciles, ont gêné de nombreux candidats. Rappelons que si A est la matrice $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$ alors sa transposée n'est pas $(a_{ji})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$!

2) Cette question étendait aux matrices les résultats démontrés dans la première partie pour les nombres complexes. Les démonstrations étaient tout à fait identiques, en remplaçant z par A, $|z|$ par $\|A\|$ et en utilisant $\|A^n\| \le \|A\|^n$. Signalons cependant que la matrice $P(A)$ (avec P dans $\mathbb{C}[X]$), n'est en général pas la matrice de coefficients $P(a_{ij})$!

3) Le fin de la deuxième partie n'a été que rarement traitée. La plupart des candidats ne savent pas exprimer le coefficient de z^n dans le polynôme $(1+a_1 z)\cdots(1+a_p z)$ en fonction des a_j.

Troisième partie.

1)a) La convergence absolue de la série était par exemple une conséquence du calcul de la mesure de Δ_n : $(t_1 - t_0)^n/n!$.

1)b) La formule demandée provenait du découpage du domaine d'intégration $t_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t_2$ selon la position de t_1. Le théorème de Fubini pouvait alors être utilisé "coefficient par coefficient" dans les produits $(A(s_n) \cdots A(s_{p+1}))\,(A(s_p) \cdots A(s_1))$. Il fallait enfin prendre garde de ne pas commuter les différentes matrices en présence.

1)c) Dans cette question, la majoration de la norme de chaque intégrale par l'intégrale de la norme, puis la norme du produit par le produit des normes permettait justement de se ramener à un cas où la commutation était légitime.

1)d) Question très classique que l'on pouvait traiter, soit à l'aide de la série $\sum(-1)^n B^n$, soit en montrant que -1 ne pouvait être valeur propre de B.

1)e) L'inversibilité de $U(t_1, t_0)$ résultait des questions b), c) et d): il suffisait de découper $[t_0, t_1]$ en morceaux suffisamment petits $t_0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t_1$ de telle manière que, pour tous les j, $\|U(s_{j+1}, s_j) - I\| < 1$.

2)b) Il fallait prendre garde au fait que la formule (6) ne permettait de prouver $U(t_1, t_0) \to I$ que lorsque $t_1 \to t_0$ à droite ou lorsque $t_0 \to t_1$ à gauche.

3) On étudiait dans cette question le cas simple où les matrices $A(t)$ commutent deux à deux pour lequel $U(t_1, t_0)$ s'exprime à l'aide d'une exponentielle.

La fin de la troisième partie comportait des questions sensiblement plus difficiles qui n'ont été abordées de manière substantielle que dans les meilleures copies.

Quatrième partie.

Cette partie, très peu abordée, davantage par manque de temps que par la difficulté des questions posées, permettait de faire le lien avec la notion de résolvante des équations différentielles linéaires.

composition de mathématiques appliquées

Durée : 6 heures

Tout document est interdit.

Calculatrice électronique — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Les candidats doivent obligatoirement traiter l'option qu'ils ont choisie au moment de leur inscription.

Ils composeront sur du papier de composition quadrillé 5 x 5.

ANALYSE NUMÉRIQUE
MÉCANIQUE GÉNÉRALE
PROBABILITÉS ET STATISTIQUES
MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

ANALYSE NUMÉRIQUE

On désigne par Λ l'intervalle ouvert $]-1,1[$. On note $L^2(\Lambda)$ l'espace des (classes de) fonctions à valeurs réelles de carré intégrable sur Λ. On le munit du produit scalaire

$$(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,dx,$$

et de la norme $\|.\|_{L^2(\Lambda)}$ associée à ce produit scalaire. On note $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Λ, on *admettra* que $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ est dense dans $L^2(\Lambda)$.

Le but de ce problème est d'étudier la discrétisation par des polynômes de haut degré du problème suivant: trouver une fonction u continue sur $\overline{\Lambda}$ vérifiant

$$-u'' + a\,u = f \quad \text{presque partout dans } \Lambda, \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(-1) = u(1) = 0, \tag{2}$$

lorsque a est une fonction réelle continue ≥ 0 sur $\overline{\Lambda}$ et f une fonction donnée dans $L^2(\Lambda)$.

A. Le problème continu

1. Montrer que toute fonction v de $L^2(\Lambda)$ est intégrable sur Λ et vérifie

$$\int_{-1}^{1} |v(x)|\,dx \leq \sqrt{2}\,\|v\|_{L^2(\Lambda)}.$$

2. On désigne par $H^1(\Lambda)$ l'espace des (classes de) fonctions v de $L^2(\Lambda)$ pour lesquelles il existe un réel μ et une fonction w de $L^2(\Lambda)$ tels que

$$v(x) = \mu + \int_{-1}^{x} w(t)\,dt \quad \text{pour presque tout } x \in \Lambda.$$

Montrer que le couple (w,μ) associé à la fonction v est unique.

La fonction w est alors appelée dérivée première (au sens généralisé) de v et notée v'. On munit l'espace $H^1(\Lambda)$ de la norme

$$\|v\|_{H^1(\Lambda)} = \left(\|v\|^2_{L^2(\Lambda)} + \|v'\|^2_{L^2(\Lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Montrer que l'espace $H^1(\Lambda)$ est un espace de Hilbert. Vérifier également que l'espace $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ est dense dans $H^1(\Lambda)$. À partir de la formule

$$v(x) = v(y) + \int_{y}^{x} v'(t)\,dt,$$

prouver que toute fonction v de $H^1(\Lambda)$ admet un représentant continu sur $\overline{\Lambda}$ vérifiant

$$\sup_{-1\leq x\leq 1} |v(x)| \leq 2\,\|v\|_{H^1(\Lambda)}. \tag{3}$$

4. On note $H_0^1(\Lambda)$ l'adhérence dans $H^1(\Lambda)$ de l'espace des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ à support compact dans Λ. Montrer que toute fonction de $H_0^1(\Lambda)$ s'annule aux deux extrémités ± 1 de Λ. Vérifier que l'espace $H_0^1(\Lambda)$ est un espace de Hilbert. Montrer que la semi-norme

$$|v|_{H^1(\Lambda)} = \|v'\|_{L^2(\Lambda)},$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Lambda)$, équivalente à la norme $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$.

5. On définit la forme bilinéaire $\alpha(.,.)$ sur $H^1(\Lambda) \times H^1(\Lambda)$ par la formule

$$\alpha(u,v) = \int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\,dx + \int_{-1}^{1} a(x)\,u(x)v(x)\,dx.$$

Montrer que la forme $\alpha(.,.)$ est continue sur $H^1(\Lambda) \times H^1(\Lambda)$ et que, pour toute fonction v de $H^1(\Lambda)$,

$$\alpha(v,v) \geq |v|^2_{H^1(\Lambda)}.$$

6. On *admettra* que $H_0^1(\Lambda)$ est exactement l'espace des fonctions de $H^1(\Lambda)$ qui s'annulent en ± 1. Montrer que toute fonction u deux fois continuement dérivable sur $\overline{\Lambda}$ est solution du problème (1)(2) si et seulement si elle est solution du problème: trouver u dans $H_0^1(\Lambda)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Lambda), \quad \alpha(u,v) = \int_{-1}^{1} f(x)v(x)\,dx. \tag{4}$$

On considérera désormais uniquement le problème (4).

7. On rappelle le théorème de Riesz: étant donné un espace de Hilbert H pour le produit scalaire $(.,.)_H$, pour toute forme linéaire ℓ continue sur H, il existe un élément u de H tel que

$$\forall v \in H, \quad \ell(v) = (u,v)_H.$$

Montrer en appliquant ce théorème que le problème (4) a une solution unique u dans $H_0^1(\Lambda)$.

B. Le premier problème discret

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ l'espace des restrictions à Λ des polynômes à une variable de degré $\leq n$. On note $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ qui s'annulent aux deux extrémités de Λ.

Soit N un entier ≥ 3 fixé. Le premier problème discret consiste à trouver u_N dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ tel que

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad \alpha(u_N, v_N) = \int_{-1}^{1} f(x) v_N(x)\, dx. \tag{5}$$

8. Indiquer la dimension des espaces $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. Montrer que le problème (5) admet une solution unique u_N dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$.

9. Pour un polynôme v_N quelconque de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, calculer la quantité

$$\int_{-1}^{1} (u' - u_N')(x) v_N'(x)\, dx + \int_{-1}^{1} a(x)\, (u - u_N)(x) v_N(x)\, dx,$$

où u et u_N sont respectivement les solutions des problèmes (4) et (5). En déduire l'existence d'une constante c positive indépendante de N telle qu'on ait la relation suivante entre la solution u du problème (4) et la solution u_N du problème (5):

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq c \inf_{v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda)} \|u - v_N\|_{H^1(\Lambda)}.$$

On rappelle qu'il existe une unique famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes, appelés *polynômes de Legendre*, qui sont deux à deux orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$ pour le produit scalaire $(.,.)$ et tels que chaque polynôme L_n soit de degré n et vérifie $L_n(1) = 1$.

10. Montrer que l'équation différentielle suivante est satisfaite par tout polynôme L_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$\big((1 - x^2)\, L_n'\big)'(x) + n(n+1)\, L_n(x) = 0 \tag{6}$$

(on pourra vérifier que $\big((1 - x^2)\, L_n'\big)'$ est orthogonal dans $L^2(\Lambda)$ à tous les polynômes de degré $\leq n-1$). Puis, pour tous entiers positifs m et n, calculer $\int_{-1}^{1} L_m'(x) L_n'(x)\, (1-x^2)\, dx$ en fonction de $\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2$.

11. Montrer que les polynômes L_n, $n \in \mathbb{N}$, forment une famille totale de $L^2(\Lambda)$. On note π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ pour le produit scalaire $(.,.)$. Étant donnée une fonction v de $L^2(\Lambda)$, écrire le développement de $\pi_N v$ dans la base $\{L_n,\ 0 \leq n \leq N\}$ en fonction de v.

12. On note A l'opérateur

$$Av = -\big((1 - x^2)\, v'\big)'.$$

Montrer que, pour toutes fonctions u et v deux fois continuement dérivables sur $\overline{\Lambda}$, on a

$$\int_{-1}^{1} (Au)(x) v(x)\, dx = \int_{-1}^{1} u(x)(Av)(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} (Au)(x) u(x)\, dx \geq 0.$$

13. À partir de l'espace $H^1(\Lambda)$, on définit les espaces $H^m(\Lambda)$ pour tout entier $m \geq 2$ par la formule de récurrence

$$H^m(\Lambda) = \{v \in H^{m-1}(\Lambda);\ v' \in H^{m-1}(\Lambda)\}.$$

On note aussi $H^0(\Lambda)$ l'espace $L^2(\Lambda)$. On introduit la notation d^m pour la dérivée (au sens généralisé) d'ordre m pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$:

$$d^0 v = v \quad \text{et} \quad d^m v = (d^{m-1}v)' \ \text{ si } m \geq 1.$$

On munit l'espace $H^m(\Lambda)$ de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Lambda)} = \Big(\sum_{\ell=0}^{m} \|d^\ell v\|^2_{L^2(\Lambda)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, l'opérateur A est continu de $H^{k+2}(\Lambda)$ dans $H^k(\Lambda)$. On munit également l'espace $H^m(\Lambda)$ de la norme (A^0 désigne l'opérateur identité)

$$\|v\|_{D^m(\Lambda)} = \begin{cases} \Big(\|v\|^2_{L^2(\Lambda)} + \|A^k v\|^2_{L^2(\Lambda)}\Big)^{\frac{1}{2}} & \text{si } m \text{ est un entier pair égal à } 2k, \\ \Big(\|v\|^2_{L^2(\Lambda)} + \int_{-1}^{1} (A^k v)'^2(x)\,(1-x^2)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} & \\ & \text{si } m \text{ est un entier impair égal à } 2k+1. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$,

$$\|v\|_{D^m(\Lambda)} \leq c\,\|v\|_{H^m(\Lambda)}.$$

14. Démontrer la majoration suivante: pour tout entier $m \geq 1$ et pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$,

$$\|v - \pi_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-m}\,\|v\|_{D^m(\Lambda)}.$$

On traitera séparément les cas où m est pair et impair:
- dans le cas où m est pair égal à $2k$, on calculera les coefficients de $A^k v$ dans la famille des L_n, $n \in \mathbb{N}$, en fonction de ceux de v, à partir de l'équation (6);
- dans le cas où m est impair égal à $2k+1$, on calculera les coefficients de $(A^k v)'$ dans la famille des L'_n, $n \geq 1$, dont on montrera qu'elle est une base orthogonale de l'espace des (classes de) fonctions de carré intégrable pour la mesure $(1-x^2)\,dx$ sur Λ.

15. On définit l'opérateur π^1_N sur les fonctions de $H^1_0(\Lambda)$ par la formule

$$(\pi^1_N v)(x) = \int_{-1}^{x} (\pi_{N-1} v')(t)\,dt.$$

Démontrer que l'opérateur π^1_N envoie $H^1_0(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}^0_N(\Lambda)$. Établir la majoration suivante: pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive indépendante de N telle que, pour toute fonction v de $H^1_0(\Lambda) \cap H^m(\Lambda)$,

$$\|v - \pi^1_N v\|_{H^1(\Lambda)} \leq c\,N^{1-m}\,\|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}. \tag{7}$$

16. Établir également la majoration suivante: pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive indépendante de N telle que, pour toute fonction v de $H_0^1(\Lambda) \cap H^m(\Lambda)$,

$$\|v - \pi_N^1 v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c N^{-m} \|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}. \tag{8}$$

On pourra introduire la fonction w de $H_0^1(\Lambda)$ dont la dérivée seconde est égale à $v - \pi_N^1 v$ et montrer que

$$\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^1 v)^2(x)\,dx \leq \|v' - (\pi_N^1 v)'\|_{L^2(\Lambda)} \|w' - (\pi_N^1 w)'\|_{L^2(\Lambda)}.$$

17. Étant donnée une fonction v de $H^1(\Lambda)$, on pose

$$v_0(x) = v(x) - \frac{1-x}{2}\, v(-1) - \frac{1+x}{2}\, v(1),$$

et on étend l'opérateur π_N^1 à $H^1(\Lambda)$ par la formule

$$\pi_N^1 v = \pi_N^1 v_0 + \frac{1-x}{2}\, v(-1) + \frac{1+x}{2}\, v(1).$$

Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, l'application: $v \mapsto v_0$ est continue de $H^m(\Lambda)$ dans $H_0^1(\Lambda) \cap H^m(\Lambda)$. Démontrer un analogue des majorations (7) et (8) qui soit vrai pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$, $m \geq 1$.

18. On suppose la solution u du problème (4) dans $H^m(\Lambda)$, pour un entier $m \geq 1$ donné. Établir la majoration d'erreur suivante entre les solutions des problèmes (4) et (5): il existe une constante c positive indépendante de N telle que

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq c N^{1-m} \|u'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}.$$

C. Le second problème discret

19. Montrer que le polynôme L_N a N zéros réels, distincts, dans Λ et que le polynôme L_N' a $N-1$ zéros réels, distincts, dans Λ. On note ξ_j, $0 \leq j \leq N$, les zéros du polynôme $(1-x^2)\, L_N'(x)$ rangés par ordre croissant. Prouver qu'il existe $N+1$ réels positifs ρ_j, $0 \leq j \leq N$, tels qu'on ait l'égalité

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \qquad \int_{-1}^{1} \Phi(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\, \rho_j.$$

Cette formule est appelée *formule de Gauss–Lobatto.* On définit, pour toutes fonctions u et v continues sur $\overline{\Lambda}$, la forme bilinéaire

$$(u, v)_N = \sum_{j=0}^{N} u(\xi_j) v(\xi_j)\, \rho_j.$$

On désigne par i_N l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds ξ_j: pour toute fonction v continue sur $\overline{\Lambda}$, $i_N v$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie:

$$(i_N v)(\xi_j) = v(\xi_j), \quad 0 \leq j \leq N.$$

On suppose maintenant la fonction f continue sur $\overline{\Lambda}$. Le nouveau problème discret consiste à trouver un polynôme u_N de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ tel que

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad (u_N', v_N')_N + (a u_N, v_N)_N = (f, v_N)_N. \tag{9}$$

20. Montrer que le problème (9) admet une solution unique u_N dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. Vérifier que le problème (9) équivaut à trouver un polynôme u_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ vérifiant les équations dites *de collocation*:

$$\begin{aligned} &-u_N''(\xi_j) + a(\xi_j) u_N(\xi_j) = f(\xi_j), \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ &u_N(-1) = u_N(1) = 0. \end{aligned}$$

21. Majorer le degré du polynôme $L_N^2(x) + \frac{1}{N^2}(1-x^2)L_N'^2(x)$. Calculer $(L_N, L_N)_N$ en fonction de $\|L_N\|_{L^2(\Lambda)}^2$ et en déduire les deux inégalités suivantes, pour tout polynôme v_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$:

$$\|v_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq (v_N, v_N)_N \leq 3\, \|v_N\|_{L^2(\Lambda)}^2.$$

22. Par homothétie et translation, on étend la définition de $H^1(\Lambda)$ à n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$. En utilisant la majoration (3), montrer qu'il existe une constante c positive telle que, pour tout intervalle $]\alpha, \beta[$ borné de $\mathbb{R}$ et pour toute fonction χ de $H^1(\alpha, \beta)$, on ait l'inégalité

$$\sup_{\alpha \leq \theta \leq \beta} |\chi(\theta)| \leq c \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \|\chi\|_{L^2(\alpha,\beta)}^2 + (\beta - \alpha)\, \|\chi'\|_{L^2(\alpha,\beta)}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

23. Étant donnée une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ à support compact dans Λ, calculer la quantité

$$\int_{-1}^{1} \left(v'(x) + x v(x)\,(1-x^2)^{-1}\right)^2 dx,$$

et en déduire que, pour tout v dans $H_0^1(\Lambda)$,

$$\int_{-1}^{1} v^2(x)\,(1-x^2)^{-2}\, dx \leq \int_{-1}^{1} v'^2(x)\, dx.$$

24. On pose $\theta_j = \arccos \xi_j$, $0 \leq j \leq N$. On *admet* qu'il existe des intervalles ouverts K_j, $1 \leq j \leq N-1$, contenus dans $[0, \pi]$, de longueur $\frac{2\pi}{N}$, contenant θ_j, tels que l'intersection de chaque K_j avec K_i soit vide pour i différent de $j-1$, j, $j+1$. On *admet* également l'inégalité suivante: il existe une constante c positive indépendante de N telle que

$$\rho_j \leq c\,N^{-1}\,(1-\xi_j^2)^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

Étant donnée une fonction v de $H_0^1(\Lambda)$, majorer $\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)}$ en fonction des ξ_j et des $v(\xi_j)$, $1 \leq j \leq N-1$. En effectuant le changement de variable $x = \cos\theta$ et en appliquant l'inégalité (10) sur chaque K_j, en déduire qu'il existe une constante positive c indépendante de N telle que, pour toute fonction v de $H_0^1(\Lambda)$, on ait la majoration

$$\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq c\big(\|v\|^2_{L^2(\Lambda)} + N^{-2}\,\|v'\|^2_{L^2(\Lambda)}\big).$$

25. Établir la majoration suivante: pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive indépendante de N telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$,

$$\|v - i_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c\,N^{-m}\,\|v\|_{H^m(\Lambda)}$$

(on pourra appliquer la majoration précédente à la fonction $v - \pi_N^1 v$).

26. Démontrer l'existence d'une constante c positive telle que, pour toute fonction f continue sur $\overline{\Lambda}$ et pour tout polynôme v_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$,

$$|(f,v_N) - (f,v_N)_N| \leq c\big(\|f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} + \|f - i_N f\|_{L^2(\Lambda)}\big)\,\|v_N\|_{L^2(\Lambda)}.$$

27. On suppose la fonction f dans $H^r(\Lambda)$ et aussi la solution u du problème (4) dans $H^m(\Lambda)$, pour des entiers $r \geq 1$ et $m \geq 1$ donnés. Lorsque la fonction a est constante, établir la majoration d'erreur suivante entre les solutions des problèmes (4) et (9):

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq c\big(N^{1-m}\,\|u'\|_{D^{m-1}(\Lambda)} + N^{-r}\,\|f\|_{H^r(\Lambda)}\big).$$

28. On note M la partie entière de $\frac{N-1}{2}$. On ne suppose plus la fonction a constante, mais on la suppose suffisamment régulière pour qu'il existe un polynôme a_M dans $\mathbb{P}_M(\Lambda)$ tel que

$$\sup_{-1\leq x\leq 1} |a(x) - a_M(x)| \leq c\,M^{-s},$$

où s est un réel > 0. Calculer la quantité

$$\big(u_N' - (\pi_M^1 u)', u_N' - (\pi_M^1 u)'\big)_N + \big(a(u_N - \pi_M^1 u), u_N - \pi_M^1 u\big)_N.$$

Avec les mêmes hypothèses sur f et u que dans la question 27, établir une majoration d'erreur entre les solutions des problèmes (4) et (9) dans $H^1(\Lambda)$.

29. Quels sont les avantages numériques du problème (9) par rapport au problème (5)?

D. Application

Pour un temps $T > 0$ fixé, on considère maintenant le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g \quad \text{presque partout dans } \Lambda \times]0, T[, \tag{11}$$

avec les conditions aux limites

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{pour presque tout } t \in]0, T[, \tag{12}$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Lambda. \tag{13}$$

On veut discrétiser ce problème par une méthode spectrale par rapport à x et par un schéma d'Euler implicite par rapport à t.

On suppose la fonction g continue sur $\overline{\Lambda} \times [0, T]$ et la fonction u_0 dans $H_0^1(\Lambda)$. On *admet* que le problème (11)(12)(13) a une solution unique u, continue de $[0, T]$ à valeurs dans $L^2(\Lambda)$.

30. Soit h un réel positif fixé. Montrer qu'on peut définir de façon unique une suite de fonctions u^ℓ de $H_0^1(\Lambda)$, où ℓ est un entier tel que $0 \leq \ell h \leq T$, par les équations

$$\begin{aligned} &\frac{u^{\ell+1} - u^\ell}{h} - (u^{\ell+1})'' = g\big(., (\ell+1)h\big) \quad \text{presque partout dans } \Lambda, \\ &u^0 = u_0 \quad \text{presque partout dans } \Lambda. \end{aligned}$$

31. On pose: $e^{\ell+1} = u^{\ell+1} - u\big(., (\ell+1)h\big)$. Montrer que, lorsque la solution u du problème (11)(12)(13) est supposée suffisamment régulière, la suite de fonctions e^ℓ vérifie le même schéma que précédemment, préciser le second membre et la donnée initiale. En effectuant le produit scalaire dans $L^2(\Lambda)$ de cette équation par $e^{\ell+1}$, majorer la quantité

$$\|e^\ell\|^2_{L^2(\Lambda)} + h \sum_{k=1}^{\ell} |e^k|^2_{H^1(\Lambda)}$$

en fonction de la donnée g et de la solution u.

32. On suppose la fonction g continuement dérivable sur $[0, T]$, à valeurs dans $L^2(\Lambda)$, et la solution u continuement dérivable sur $[0, T]$, à valeurs dans $H^1(\Lambda)$. Démontrer la majoration d'erreur

$$\|u^\ell - u(., \ell h)\|_{L^2(\Lambda)} \leq c\sqrt{T}\, h \big(\sup_{0 \leq \tau \leq T} \|\frac{\partial g}{\partial t}(., \tau)\|_{L^2(\Lambda)} + \sup_{0 \leq \tau \leq T} \|\frac{\partial u}{\partial t}(., \tau)\|_{H^1(\Lambda)}\big).$$

Le problème discret consiste à chercher une suite de polynômes (u_N^ℓ), $h \le h\ell \le T$, appartenant à $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ et vérifiant

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad \frac{1}{h}\big(u_N^{\ell+1} - u_N^\ell, v_N\big)_N + \big((u_N^{\ell+1})', v_N'\big)_N = \big(g\big(.,(\ell+1)h\big), v_N\big)_N. \qquad (14)$$

On choisit u_N^0 égal à $i_N u_0$.

33. Montrer que l'équation (14) définit la suite (u_N^ℓ) de façon unique.

34. On suppose la fonction g continue de $[0,T]$ dans $H^r(\Lambda)$, pour un entier $r \ge 1$ fixé. On suppose aussi les fonctions u^ℓ, $0 \le \ell h \le T$, dans $H^m(\Lambda)$ pour un entier $m \ge 1$ fixé. En utilisant les résultats de la partie C, majorer $\|u^\ell - u_N^\ell\|_{L^2(\Lambda)}$ en fonction de N.

35. On suppose vraies les hypothèses des questions 32 et 34. Établir la majoration d'erreur

$$\|u(.,\ell h) - u_N^\ell\|_{L^2(\Lambda)} \le C\,\big(h + N^{-\inf\{m,r\}}\big),$$

où la constante C dépend des u^ℓ, $0 \le \ell h \le T$, de u et de g, mais ni de N ni de h.

ANALYSE NUMÉRIQUE

Corrigé du problème

1. L'inégalité demandée est une conséquence facile de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. On en déduit que la fonction v de $L^2(\Omega)$, qui est mesurable, est intégrable.

2. Soit (μ_1, w_1) et (μ_2, w_2) deux couples vérifiant la propriété indiquée. On a

$$\mu_1 - \mu_2 = \int_{-1}^{x} (w_1 - w_2)(t)\, dt,$$

d'où

$$\forall x \in \Lambda, \forall y \in \Lambda, \quad \int_{x}^{y} (w_1 - w_2)(t)\, dt = 0.$$

Ceci prouve que les fonctions w_1 et w_2 coïncident. On en déduit que μ_1 est égal à μ_2.

3.a. La forme bilinéaire:

$$((u, v)) = \int_{-1}^{1} \big(u(x)v(x) + u'(x)v'(x)\big)\, dx,$$

étant le produit scalaire associé à la norme $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$, il suffit de vérifier que $H^1(\Lambda)$ est complet. Soit $(v_n)_n$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Lambda)$. Les suites $(v_n)_n$ et $(v_n')_n$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Lambda)$ qui est complet, elles convergent donc respectivement vers v et w. Il existe une suite $(\mu_n)_n$ telle que

$$v_n(x) = \mu_n + \int_{-1}^{x} v_n'(t)\, dt,$$

on vérifie en calculant l'intégrale de v_n que

$$2\mu_n = \int_{-1}^{1} v_n(x)\, dx - \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-1}^{x} v_n'(t)\, dt\Big)\, dx.$$

On peut passer à la limite dans les deux équations précédentes. On obtient

$$v(x) = \mu + \int_{-1}^{x} w(t)\, dt, \quad \text{avec } \mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\int_{-1}^{x} w(t)\, dt\Big)\, dx.$$

On en déduit que la fonction v est dans $H^1(\Lambda)$, sa dérivée (au sens généralisé) étant w. Donc, $H^1(\Lambda)$ est un espace de Hilbert.

3.b. Soit v une fonction de $H^1(\Lambda)$. Comme $\mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ est dense dans $L^2(\Lambda)$, il existe une suite $(w_n)_n$ convergeant vers v' dans $L^2(\Lambda)$. On vérifie alors facilement que, si on pose

$$v_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(v(y) - \int_{-1}^{y} v'(t)\, dt\Big)\, dy + \int_{-1}^{x} w_n(t)\, dt,$$

la suite $(v_n)_n$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ et converge vers v dans $H^1(\Lambda)$. Donc, l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ est dense dans $H^1(\Lambda)$.

3.c. Précisément, le représentant d'une fonction v de $H^1(\Lambda)$ défini par

$$v(x) = \mu + \int_{-1}^{x} v'(t)\, dt,$$

vérifie, pour tout x dans $\overline{\Lambda}$ et pour tout ε tel que $x+\varepsilon$ soit dans Λ,

$$|v(x+\varepsilon) - v(x)| \le \sqrt{|\varepsilon|}\, \|v'\|_{L^2(\Lambda)}.$$

Il est donc continu. On a alors pour tous x et y dans $\overline{\Lambda}$,

$$v(x) = v(y) + \int_{y}^{x} v'(t)\, dt,$$

et, en intégrant par rapport à y,

$$2|v(x)| \le \int_{-1}^{1} |v(y)|\, dy + \int_{-1}^{1} |\int_{y}^{x} v'(t)\, dt|\, dy.$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne finalement

$$2|v(x)| \le \sqrt{2}\|v\|_{L^2(\Lambda)} + 2\sqrt{2}\|v'\|_{L^2(\Lambda)},$$

d'où

$$\sup_{-1\le x\le 1} |v(x)| \le 2\, \|v\|_{H^1(\Lambda)}.$$

4.a. Les fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ à support compact dans Λ s'annulent aux extrémités de Λ. Comme l'application: $v \mapsto v(\pm 1)$ est continue sur $H^1(\Lambda)$ d'après la question 3, la définition de l'espace $H_0^1(\Lambda)$ entraîne que cette propriété est encore vraie pour les fonctions de $H_0^1(\Lambda)$.

4.b. Par définition, l'espace $H_0^1(\Lambda)$ est fermé dans l'espace $H^1(\Lambda)$ qui est un espace de Hilbert. C'est donc un espace de Hilbert.

4.c. On vérifie d'abord que la semi-norme $|.|_{H^1(\Lambda)}$ est une norme sur $H_0^1(\Lambda)$. En effet, si une fonction v de $H_0^1(\Lambda)$, donc continue, a sa semi-norme nulle, sa dérivée est nulle presque partout, donc la fonction v est constante et, comme elle s'annule en ± 1, elle est nulle. D'autre part, on a bien sûr

$$\forall v \in H^1(\Lambda), \quad |v|_{H^1(\Lambda)} \le \|v\|_{H^1(\Lambda)}.$$

De plus, toute fonction v de $H_0^1(\Lambda)$ s'annule en -1, donc s'écrit

$$v(x) = \int_{-1}^{x} v'(t)\, dt,$$

ce qui implique

$$\|v\|_{L^2(\Lambda)} \leq 2\,\|v'\|_{L^2(\Lambda)}.$$

On en déduit la propriété d'équivalence

$$\forall v \in H^1(\Lambda), \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\,\|v\|_{H^1(\Lambda)} \leq |v|_{H^1(\Lambda)} \leq \|v\|_{H^1(\Lambda)}.$$

5.a. La fonction a étant continue sur $[-1,1]$ est bornée par une constante c. On en déduit, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\alpha(u,v) \leq |u|_{H^1(\Omega)}|v|_{H^1(\Omega)} + c\int_{-1}^{1} |u(x)|\,|v(x)|\,dx \leq |u|_{H^1(\Omega)}|v|_{H^1(\Omega)} + c\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où la propriété de continuité.

5.b. De la même façon, la fonction a étant positive ou nulle sur $[-1,1]$, on a

$$\alpha(v,v) = |v|^2_{H^1(\Omega)} + \int_{-1}^{1} a(x)\,v^2(x)\,dx \geq |v|^2_{H^1(\Omega)}.$$

6.a. Soit u une solution du problème (1)(2) deux fois continuement dérivable sur $\overline{\Lambda}$. L'équation (2) entraîne tout de suite que u est dans $H^1_0(\Lambda)$. D'autre part, en multipliant l'équation (1) par une fonction φ de $\mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ à support compact dans Λ et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi'(x)\,dx + \int_{-1}^{1} a(x)\,u(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Étant donnée une fonction v de $H^1_0(\Lambda)$, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ à support compact dans Λ convergeant vers v dans $H^1_0(\Lambda)$, de sorte qu'en passant à la limite dans l'équation

$$\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi_n'(x)\,dx + \int_{-1}^{1} a(x)\,u(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx,$$

on obtient grâce à la continuité de la forme $\alpha(.,.)$

$$\int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\,dx + \int_{-1}^{1} a(x)\,u(x)v(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)v(x)\,dx.$$

6.b. Pour démontrer la réciproque, on vérifie que, si u appartient à $H^1_0(\Lambda)$, elle s'annule en ± 1. D'autre part en appliquant l'équation (4) pour une fonction v de $\mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ à support compact dans Λ et en intégrant par parties, on retrouve l'équation (1).

7.a. On a remarqué dans la question 5 que la forme bilinéaire $\alpha(.,.)$ est continue sur $H_0^1(\Lambda) \times H_0^1(\Lambda)$; d'autre part les résultats des questions 4 et 5 impliquent que

$$\alpha(v,v) \geq \frac{1}{5}\|v\|^2_{H^1(\Lambda)}.$$

La forme $\alpha(.,.)$ est donc un produit scalaire sur $H_0^1(\Lambda)$, et la norme associée y est équivalente à la norme $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$ (ou $|.|_{H^1(\Lambda)}$). Comme la fonction f appartient à $L^2(\Lambda)$, la forme linéaire: $v \mapsto \int_{-1}^1 f(x)v(x)\,dx$ est continue sur $H_0^1(\Lambda)$, elle appartient au dual de $H_0^1(\Lambda)$ et, d'après le théorème de Riesz, il existe un élément u de $H_0^1(\Lambda)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Lambda), \quad \alpha(u,v) = \int_{-1}^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Donc, le problème (4) admet au moins une solution.

7.b. L'équation que l'on considère étant linéaire, l'unicité de la solution découle du fait que la seule solution pour $f = 0$ est la solution nulle. Ceci se démontre à partir de l'inégalité

$$|u|^2_{H^1(\Lambda)} \leq \int_{-1}^1 u'^2(x)\,dx + \int_{-1}^1 a(x)\,u^2(x)\,dx,$$

puisque la semi-norme $|.|_{H^1(\Lambda)}$ est une norme sur $H_0^1(\Lambda)$.

8.a. La dimension de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ est $N+1$, la dimension de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ est $N-1$.

8.b. Exactement comme dans la question 7.b, on vérifie que la seule solution du problème (5) pour $f = 0$, est égale à 0. On introduit alors une base $\{\varphi_k,\ 1 \leq k \leq N-1\}$ de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. En écrivant $u_N = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k \varphi_k$, on voit que le problème (5) équivaut à

$$\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k\, \alpha(\varphi_k, \varphi_\ell) = \int_{-1}^1 f(x)\varphi_\ell(x)\,dx, \quad 1 \leq \ell \leq N-1,$$

c'est-à-dire à un système linéaire de $N-1$ équations à $N-1$ inconnues. On a prouvé que le noyau de la matrice de ce système était réduit à $\{0\}$, donc le problème (5) admet une solution unique.

9.a. Les polynômes de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ s'annulent en ± 1, donc appartiennent à $H_0^1(\Lambda)$. En prenant la fonction v dans (4) égale à un polynôme v_N de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, puis en soustrayant les équations (4) et (5), on obtient

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 (u' - u_N')(x)v_N'(x)\,dx + \int_{-1}^1 a(x)\,(u - u_N)(x)v_N(x)\,dx = 0.$$

9.b. Soit v_N un polynôme quelconque de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. À partir de l'équation précédente, on observe que

$$\alpha(u_N - v_N, u_N - v_N) = \alpha(u - v_N, u_N - v_N).$$

Grâce aux propriétés de continuité déjà vues de la forme $\alpha(.,.)$, on en déduit

$$|u_N - v_N|^2_{H^1(\Lambda)} \leq \alpha(u_N - v_N, u_N - v_N) \leq c\,\|u - v_N\|_{H^1(\Lambda)}\|u_N - v_N\|_{H^1(\Lambda)}.$$

Maintenant, on utilise l'équivalence des normes $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$ et $|.|_{H^1(\Lambda)}$ pour écrire

$$\|u_N - v_N\|^2_{H^1(\Lambda)} \leq c'\,\|u - v_N\|_{H^1(\Lambda)}\|u_N - v_N\|_{H^1(\Lambda)}.$$

On simplifie par $\|u_N - v_N\|_{H^1(\Lambda)}$ et on utilise une inégalité triangulaire pour conclure:

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq (1 + c')\|u - v_N\|_{H^1(\Lambda)}.$$

10.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remarque d'abord que $\big((1-x^2)\,L_n'\big)'$ est un polynôme de degré n. D'autre part, on voit en intégrant par parties, que, pour tout polynôme φ de degré $< n$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \big((1-x^2)\,L_n'\big)'(x)\varphi(x)\,dx &= -\int_{-1}^{1} L_n'(x)\varphi'(x)\,(1-x^2)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} L_n(x)\big((1-x^2)\,\varphi'\big)'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Comme $\big((1-x^2)\,\varphi'\big)'$ est aussi un polynôme de degré $< n$, on déduit des propriétés des polynômes L_n que

$$\int_{-1}^{1} \big((1-x^2)\,L_n'\big)'(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Le polynôme $\big((1-x^2)\,L_n'\big)'$ est donc de degré n, orthogonal à tous les polynômes de degré $< n$. L'unicité de la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne l'existence d'une constante λ_n telle que

$$\big((1-x^2)\,L_n'\big)' = \lambda_n\,L_n.$$

Maintenant, on vérifie que, si k_n désigne le coefficient de x^n dans $L_n(x)$, le coefficient de x^n dans $\big((1-x^2)\,L_n'\big)'$ est $-n(n+1)\,k_n$. On en déduit que λ_n est égal à $-n(n+1)$.

10.b On calcule d'après la formule précédente

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} L_m'(x)L_n'(x)\,(1-x^2)\,dx &= -\int_{-1}^{1} L_m(x)\big(L_n'(x)\,(1-x^2)\big)'\,dx \\ &= n(n+1)\int_{-1}^{1} L_m(x)L_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

L'orthogonalité des L_n entraîne que

$$\int_{-1}^{1} L_m'(x)L_n'(x)\,(1-x^2)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ n(n+1)\,\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} & \text{si } m = n.\end{cases}$$

11.a. Les polynômes L_n, $n \in \mathbb{N}$, étant deux à deux orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$, il suffit de vérifier que les polynômes sont denses dans $L^2(\Lambda)$. Pour cela, on rappelle que $\mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ est dense dans $L^2(\Lambda)$. Le théorème de Stone-Weierstrass dit que les polynômes sont denses dans l'espace $\mathcal{C}^0(\Lambda)$ des fonctions continues sur $\overline{\Lambda}$, muni de la norme du maximum, donc dans son sous-espace $\mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ également muni de la norme du maximum. En combinant ces deux propriétés, on montre que les polynômes sont denses dans $L^2(\Lambda)$.

11.b. Étant donnée une fonction v de $L^2(\Lambda)$, on pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \int_{-1}^{1} v(x)L_n(x)\,dx.$$

Il résulte de la propriété précédente que l'on peut écrire, avec le sens habituel,

$$v = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n L_n.$$

On vérifie de façon évidente que, pour toute fonction v de $L^2(\Lambda)$,

$$\pi_N v = \sum_{n=0}^{N} v_n L_n.$$

12. Deux intégrations par parties permettent de vérifier que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (Au)(x)v(x)\,dx &= -\int_{-1}^{1} \big((1-x^2)\,u'\big)'(x)v(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\,(1-x^2)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{1} u(x)\big((1-x^2)\,v'\big)'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u(x)(Av)(x)\,dx.\end{aligned}$$

Une intégration par parties suffit pour montrer que

$$\int_{-1}^{1} (Au)(x)u(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} \big((1-x^2)\,u'\big)'(x)u(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u'^2(x)\,(1-x^2)\,dx \geq 0.$$

13.a. Soit v une fonction de $H^{k+2}(\Lambda)$. On a la formule (que l'on peut étendre aux dérivées au sens généralisé)

$$Av = -(1-x^2)\,v'' + 2x\,v'.$$

On vérifie par récurrence que, pour tout entier $\ell \leq k$,

$$d^\ell(Av) = -(1-x^2)\,d^{\ell+2}v + 2(\ell+1)x\,d^{\ell+1}v + \ell(\ell+1)\,d^\ell v.$$

On en déduit immédiatement que A est continu de $H^{k+2}(\Lambda)$ dans $H^k(\Lambda)$.

13.b. Soit v une fonction de $H^m(\Lambda)$. On suppose d'abord que m est un entier pair, égal à $2k$. En appliquant itérativement le résultat précédent, on voit que A^k est continu de $H^{2k}(\Lambda)$ dans $L^2(\Lambda)$. On en déduit l'existence d'une constante c telle que

$$\int_{-1}^{1} (A^{2k}v)(x)v(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (A^k v)(x)(A^k v)(x)\,dx \leq c\,\|v\|^2_{H^{2k}(\Lambda)}.$$

On suppose ensuite que m est un entier impair, égal à $2k+1$. On sait ici que A^k est continu de $H^{2k+1}(\Lambda)$ dans $H^1(\Lambda)$. On écrit

$$\int_{-1}^{1} (A^{2k+1}v)(x)v(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (A^{k+1}v)(x)(A^k v)(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (A^k v)'(x)(A^k v)'(x)\,(1-x^2)\,dx.$$

On en déduit l'existence d'une constante c telle que

$$\int_{-1}^{1} (A^{2k+1}v)(x)v(x)\,dx \leq \|A^k v\|^2_{H^1(\Lambda)} \leq c\,\|v\|^2_{H^{2k+1}(\Lambda)}.$$

14. Soit v une fonction quelconque de $H^m(\Lambda)$, on note v_n les coefficients de v dans la famille L_n, $n \in \mathbb{N}$. On suppose d'abord que m est un entier pair égal à $2k$. On note ψ_n les coefficients de $A^k v$ dans la famille L_n, $n \in \mathbb{N}$, et on calcule les ψ_n à partir des questions 10 et 12:

$$\begin{aligned}\psi_n &= \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \int_{-1}^{1} (A^k v)(x)L_n(x)\,dx = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \int_{-1}^{1} v(x)(A^k L_n)(x)\,dx \\ &= n^k(n+1)^k \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \int_{-1}^{1} v(x)L_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule

$$\psi_n = n^k(n+1)^k\,v_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On déduit maintenant de la question 11 que

$$\begin{aligned}\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n^2\,\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}(n+1)^{2k}} \psi_n^2\,\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq \frac{1}{(N+1)^{2k}(N+2)^{2k}} \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n^2\,\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k}\,\|A^k v\|^2_{L^2(\Lambda)} = N^{-4k} \int_{-1}^{1} (A^{2k}v)(x)v(x)\,dx.$$

On obtient donc

$$\|v - \pi_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-m} \|v\|_{D^m(\Lambda)}.$$

On suppose finalement que m est un entier impair égal à $2k+1$. On calcule comme précédemment

$$\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}(n+1)^{2k}} \psi_n^2 \, \|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}.$$

Maintenant, on utilise la question 10.b pour en déduire que

$$\int_{-1}^{1} (A^{2k+1}v)(x)v(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left((A^k v)'\right)^2(x)\,(1-x^2)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)\,\psi_n^2\,\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k+1}(n+1)^{2k+1}} n(n+1)\psi_n^2\,\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq N^{-4k-2} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)\psi_n^2\,\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\|v - \pi_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-m} \|v\|_{D^m(\Lambda)}.$$

15.a. Soit v une fonction de $H_0^1(\Lambda)$. Il est facile de vérifier que $\pi_N^1 v$ est un polynôme de degré $\leq N$ s'annulant en -1, il suffit donc de vérifier qu'il s'annule en 1. Par définition de l'opérateur π_{N-1}, on a pour tout polynôme w_{N-1} de $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$

$$\int_{-1}^{1} (\pi_{N-1}v')(t) w_{N-1}(t)\,dt = \int_{-1}^{1} v'(t) w_{N-1}(t)\,dt.$$

En appliquant cette propriété avec $w_{N-1} = 1$, on obtient

$$(\pi_N^1 v)(1) = \int_{-1}^{1} (\pi_{N-1}v')(t)\,dt = \int_{-1}^{1} v'(t)\,dt = v(1) - v(-1).$$

Comme v appartient à $H_0^1(\Lambda)$, $(\pi_N^1 v)(1)$ est nul. Donc, π_N^1 envoie $H_0^1(\Lambda)$ dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. La surjectivité vient du fait que π_N^1 envoie tout polynôme de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ sur lui-même.

15.b. Soit v une fonction de $H_0^1(\Lambda)$. On a par définition

$$|v - \pi_N^1 v|_{H^1(\Lambda)} = \|v' - \pi_{N-1}v'\|_{L^2(\Lambda)}.$$

On note que, si v est dans $H^m(\Lambda)$, v' appartient à $H^{m-1}(\Lambda)$. On utilise la question précédente avec N remplacé par $N-1$ et le fait que $N-1$ est $\geq \frac{N}{2}$, pour obtenir

$$|v - \pi_N^1 v|_{H^1(\Lambda)} \leq 2^{m-1} N^{1-m} \|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}.$$

Finalement, on note que $v - \pi_N^1 v$ appartient à $H_0^1(\Lambda)$, et on utilise l'équivalence de normes de la question 4:

$$\|v - \pi_N^1 v\|_{H^1(\Lambda)} \leq c N^{1-m} \|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}.$$

16. Étant donnée une fonction v de $H_0^1(\Lambda) \cap H^m(\Lambda)$, on pose, pour x dans $\overline{\Lambda}$,

$$w(x) = \int_{-1}^{x} \left(w_1(t) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} w_1(y)\, dy\right) dt, \quad \text{avec } w_1(t) = \int_{-1}^{t} (v - \pi_N^1 v)(y)\, dy.$$

On vérifie que, sa dérivée seconde w'' étant égale à $v - \pi_N^1 v$, la fonction w appartient à $H_0^1(\Lambda) \cap H^3(\Lambda)$ et que $\|w\|_{H^3(\Lambda)}$ est borné par une constante fois $\|v - \pi_N^1 v\|_{H^1(\Lambda)}$. On calcule maintenant

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^1 v)^2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (v - \pi_N^1 v)(x) w''(x)\, dx &= -\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^1 v)'(x) w'(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (v' - \pi_{N-1} v')(x) w'(x)\, dx.\end{aligned}$$

Par définition de l'opérateur π_{N-1}, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^1 v)^2(x)\, dx &= \int_{-1}^{1} (v' - \pi_{N-1} v')(x)(w' - \pi_{N-1} w')(x)\, dx \\ &\leq \|v' - \pi_{N-1} v'\|_{L^2(\Lambda)} \|w' - \pi_{N-1} w'\|_{L^2(\Lambda)},\end{aligned}$$

ou, de façon équivalente,

$$\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^1 v)^2(x)\, dx \leq \|v' - (\pi_N^1 v)'\|_{L^2(\Lambda)} \|w' - (\pi_N^1 w)'\|_{L^2(\Lambda)}.$$

On applique alors la majoration (7), en se rappelant que $N-1$ est $\geq \frac{N}{2}$, que v' appartient à $H^{m-1}(\Lambda)$ et que w appartient à $H^3(\Lambda)$. On obtient

$$\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^1 v)^2(x)\, dx \leq \left(c\, 2^{m-1} N^{1-m} \|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}\right)\left(c\, 2^2 N^{-2} \|w\|_{H^3(\Lambda)}\right).$$

On majore $\|w\|_{H^3(\Lambda)}$ par une constante fois $\|v - \pi_N^1 v\|_{H^1(\Lambda)}$ et on applique une autre fois la majoration (7):

$$\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^1 v)^2(x)\, dx \leq \left(c\, 2^{m-1} N^{1-m} \|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}\right)\left(c'\, 2^2 N^{-2}\, 2^{m-1} N^{1-m} \|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}\right),$$

ce qui s'écrit encore

$$\|v - \pi_N^1 v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c''\, N^{-m} \|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}.$$

17.a. L'application: $v \mapsto v(\pm 1)$ est continue sur $H^1(\Lambda)$ d'après la question 3. On peut donc, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$, $m \geq 1$, définir la fonction v_0, on vérifie qu'elle est la somme de trois fonctions de $H^m(\Lambda)$, donc qu'elle appartient à $H^m(\Lambda)$. On vérifie aussi qu'elle s'annule en ± 1, donc qu'elle appartient bien à $H_0^1(\Lambda)$. En ce qui concerne la continuité de l'application: $v \mapsto v_0$, on observe que

$$\|v_0\|_{H^m(\Lambda)} \leq \|v\|_{H^m(\Lambda)} + |v(-1)|\, \|\frac{1-x}{2}\|_{H^1(\Lambda)} + |v(1)|\, \|\frac{1+x}{2}\|_{H^1(\Lambda)},$$

et d'après la propriété de continuité évoquée ci-dessus, on en déduit l'existence d'une constante c telle que

$$\|v_0\|_{H^m(\Lambda)} \leq \|v\|_{H^m(\Lambda)} \big(1 + c\, \|\frac{1-x}{2}\|_{H^1(\Lambda)} + c\, \|\frac{1+x}{2}\|_{H^1(\Lambda)}\big),$$

ce qui est le résultat cherché.

17.b. On note que

$$v - \pi_N^1 v = v_0 - \pi_N^1 v_0.$$

Il vient des questions 15 et 16 que

$$\|v - \pi_N^1 v\|_{H^1(\Lambda)} + N\, \|v - \pi_N^1 v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c N^{1-m}\, \|v_0\|_{H^m(\Lambda)},$$

et, d'après la propriété de continuité de l'application: $v \mapsto v_0$,

$$\|v - \pi_N^1 v\|_{H^1(\Lambda)} + N\, \|v - \pi_N^1 v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c'\, N^{1-m}\, \|v\|_{H^m(\Lambda)}.$$

18. On déduit de la question 9 que

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq c\, \|u - \pi_N^1 u\|_{H^1(\Lambda)}.$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité (7) pour conclure.

19.a. On note $x_1, \ldots, x_k$ ceux des zéros de L_N qui appartiennent à Λ et sont d'ordre impair. Si k est strictement inférieur à N, le polynôme $(x - x_1) \cdots (x - x_k)$ est de degré $< N$ et, par définition des polynômes L_n, on a

$$\int_{-1}^{1} L_N(x)(x - x_1) \cdots (x - x_k)\, dx = 0.$$

Ceci est impossible, car le polynôme $L_N(x)(x - x_1) \cdots (x - x_k)$ ne peut changer de signe sur Λ. Donc, k est égal à N et le polynôme L_N a N zéros distincts dans Λ. Entre deux zéros de L_N, il y a nécessairement un zéro de L'_N, donc le polynôme L'_N a $N - 1$ zéros distincts dans Λ.

19.b. Soit ℓ_j, $0 \le j \le N$, les polynômes de Lagrange associés aux ξ_j, $0 \le j \le N$, c'est-à-dire les polynômes ℓ_j de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ tels que

$$\ell_j(\xi_j) = 1 \quad \text{et} \quad \ell_j(\xi_k) = 0, \quad 0 \le k \le N,\ k \ne j.$$

On pose

$$\rho_j = \int_{-1}^{1} \ell_j(x)\,dx.$$

On vérifie alors que tout polynôme φ_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ s'écrit

$$\varphi_N = \sum_{j=0}^{N} \varphi_N(\xi_j)\,\ell_j,$$

de sorte que

$$\int_{-1}^{1} \varphi_N(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} \varphi_N(\xi_j) \int_{-1}^{1} \ell_j(x)\,dx.$$

On a ainsi montré que

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \qquad \int_{-1}^{1} \varphi_N(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} \varphi_N(\xi_j)\,\rho_j.$$

Soit maintenant Φ un polynôme de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$. On effectue sa division euclidienne par $(1-x^2)L'_N$: il existe deux polynômes ψ_N and φ_N, respectivement de degré $\le N-2$ et $\le N$, tels que

$$\Phi(x) = (1-x^2)L'_N(x)\,\psi_N(x) + \varphi_N(x).$$

On observe que, par définition des ξ_j,

$$\sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\,\rho_j = \sum_{j=0}^{N}(1-\xi_j^2)L'_N(\xi_j)\,\psi_N(\xi_j)\,\rho_j + \sum_{j=0}^{N} \varphi_N(\xi_j)\,\rho_j = \sum_{j=0}^{N} \varphi_N(\xi_j)\,\rho_j.$$

En appliquant la propriété d'exactitude déjà démontrée, on obtient que

$$\sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\,\rho_j = \int_{-1}^{1} \varphi_N(x)\,dx.$$

Maintenant, à partir de la question 10, on sait que, pour tous entiers $m \ge 0$ et $n \ge 0$, $m \ne n$,

$$\int_{-1}^{1} L'_m(x)L'_n(x)\,(1-x^2)\,dx = n(n+1)\int_{-1}^{1} L_m(x)L_n(x)\,dx = 0.$$

On en déduit que le polynôme L'_N est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq N-2$ pour la mesure $(1-x^2)\,dx$ sur Λ, en particulier à ψ_N. On a alors

$$\sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\,\rho_j = \int_{-1}^{1} \varphi_N(x)\,dx + \int_{-1}^{1} (1-x^2)L'_N(x)\,\psi_N(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \Phi(x)\,dx,$$

ce qui est la propriété d'exactitude cherchée. On déduit finalement de cette propriété d'exactitude que

$$\begin{aligned}
&(1-\xi_j^2)^{-1}\,\rho_j = \int_{-1}^{1} \ell_j^2(x)\,(1-x^2)^{-1}\,dx, \quad 1 \leq j \leq N-1,\\
&\frac{1}{2}\,\rho_0 = \int_{-1}^{1} \ell_0^2(x)\,(1-x)^{-1}\,dx\\
&\frac{1}{2}\,\rho_N = \int_{-1}^{1} \ell_N^2(x)\,(1+x)^{-1}\,dx
\end{aligned}$$

d'où la positivité des ρ_j, $0 \leq j \leq N$.

20.a. Comme on l'a vu précédemment, les polynômes de Lagrange ℓ_j, $0 \leq j \leq N$, forment une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. On en déduit facilement que les ℓ_j, $1 \leq j \leq N-1$, forment une base de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. Le problème (9) équivaut donc au système linéaire de $N-1$ équations à $N-1$ inconnues:

$$\sum_{k=1}^{N-1} u_N(\xi_k)\Big((\ell'_k, \ell'_j)_N + (a\,\ell_k, \ell_j)_N\Big) = (f, \ell_j)_N, \quad 1 \leq j \leq N-1,$$

où les inconnues sont les $u_N(\xi_k)$, $1 \leq k \leq N-1$. Pour que ce système admette une solution unique, il faut et il suffit que la seule solution lorsque le second membre est nul, soit égale à 0. Soit donc u_N un polynôme de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ tel que

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad (u'_N, v'_N)_N + (au_N, v_N)_N = 0.$$

En prenant v_N égal à u_N, on déduit de la positivité de la fonction a et des ρ_j, $0 \leq j \leq N$, que

$$(u'_N, u'_N)_N = 0,$$

donc que les $u'_N(\xi_j)$, $0 \leq j \leq N$, sont nuls. Comme u'_N est un polynôme de degré $\leq N-1$, il est nul. Donc, u_N est constant et, comme il s'annule en ± 1, il est nul. On a ainsi prouvé que le problème (9) admet une solution unique dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$.

20.b. On voit d'abord que la solution u_N appartient à $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ si et seulement si elle appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie

$$u_N(-1) = u_N(1) = 0.$$

Ensuite, on observe que, pour tous polynômes u_N et v_N de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, le produit $u'_N v'_N$ est de degré $\leq 2N-2$, de sorte que, grâce à l'exactitude de la formule de quadrature,

$$(u'_N, v'_N)_N = \int_{-1}^{1} u'_N(x) v'_N(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} u''_N(x) v_N(x)\,dx = -(u''_N, v_N)_N.$$

L'équation (9) est donc équivalente à

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad (-u_N'' + a u_N, v_N)_N = (f, v_N)_N.$$

Comme les polynômes de Lagrange ℓ_j, $1 \le j \le N-1$, forment une base de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, on vérifie en faisant varier v_N dans cette base, que cette dernière équation équivaut encore à

$$-u_N''(\xi_j) + a(\xi_j) u_N(\xi_j) = f(\xi_j), \quad 1 \le j \le N-1.$$

21.a. Le polynôme $L_N^2(x) + \frac{1}{N^2}(1-x^2)L_N'^2(x)$ est de degré $\le 2N-1$. L'exactitude de la formule de quadrature et le fait que les ξ_j soient les zéros de $(1-x^2)L_N'$ impliquent alors que

$$\int_{-1}^{1} L_N^2(x)\,dx + \frac{1}{N^2}\int_{-1}^{1} L_N'^2(x)\,(1-x^2)\,dx = \sum_{j=0}^{N} L_N^2(\xi_j)\,\rho_j = (L_N, L_N)_N.$$

En utilisant la question 10, on en déduit

$$(L_N, L_N)_N = \int_{-1}^{1} L_N^2(x)\,dx + \frac{1}{N^2}\,N(N+1)\int_{-1}^{1} L_N^2(x)\,dx,$$

d'où finalement

$$(L_N, L_N)_N = \frac{2N+1}{N}\,\|L_N\|_{L^2(\Lambda)}^2.$$

21.b. Tout polynôme v_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ s'écrit

$$v_N = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n\, L_n,$$

de sorte que

$$\|v_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^2\,\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2.$$

Mais tous les produits $L_m L_n$, $0 \le m, n \le N$, sont de degré $\le 2N-1$ sauf $L_N L_N$, de sorte qu'en utilisant l'exactitude de la formule de quadrature et les propriétés d'orthogonalité des L_n, on obtient

$$(v_N, v_N)_N = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n^2\,\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \lambda_N^2\,(L_N, L_N)_N.$$

En comparant ces deux dernières équations et en utilisant le calcul de $(L_N, L_N)_N$, on obtient

$$\|v_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \le (v_N, v_N)_N \le \frac{2N+1}{N}\,\|v_N\|_{L^2(\Lambda)}^2.$$

Il suffit de vérifier que $\frac{2N+1}{N}$ est ≤ 3 pour conclure.

22. Soit χ une fonction quelconque de $H^1(\alpha,\beta)$. On observe que la fonction v définie par

$$v(x) = \chi\big(\alpha + (\beta-\alpha)\frac{1+x}{2}\big),$$

appartient à $H^1(\Lambda)$. En lui appliquant l'inégalité (3) de la question 3, on voit que

$$\sup_{-1\leq x\leq 1} |v(x)| \leq 2\,\|v\|_{H^1(\Lambda)} \leq 2\Big(\int_{-1}^{1} v^2(x)\,dx + \int_{-1}^{1} v'^2(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En effectuant le changement de variable inverse, on obtient

$$\sup_{\alpha\leq\theta\leq\beta} |\chi(\theta)| \leq 2\big(\frac{2}{\beta-\alpha}\|\chi\|^2_{L^2(\alpha,\beta)} + \frac{\beta-\alpha}{2}\,\|\chi'\|^2_{L^2(\alpha,\beta)}\big)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est l'inégalité désirée, avec une constante c égale à $2\sqrt{2}$.

23. Pour une fonction v de $H^1_0(\Lambda)$, on calcule

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} &\big(v'(x) + xv(x)\,(1-x^2)^{-1}\big)^2\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} v'^2(x)\,dx + \int_{-1}^{1} x^2v^2(x)\,(1-x^2)^{-2}\,dx + \int_{-1}^{1} (v^2)'(x)\,x(1-x^2)^{-1}\,dx,\end{aligned}$$

on intègre par parties et on obtient

$$\int_{-1}^{1} \big(v'(x) + xv(x)\,(1-x^2)^{-1}\big)^2\,dx = \int_{-1}^{1} v'^2(x)\,dx - \int_{-1}^{1} v^2(x)\,(1-x^2)^{-2}\,dx.$$

Comme le premier membre est ≥ 0, ceci implique bien que

$$\int_{-1}^{1} v^2(x)\,(1-x^2)^{-2}\,dx \leq \int_{-1}^{1} v'^2(x)\,dx.$$

24.a. Soit v une fonction de $H^1_0(\Lambda)$. On déduit de la question 21 que

$$\|i_Nv\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq (i_Nv, i_Nv)_N = \sum_{j=0}^{N} (i_Nv)^2(\xi_j)\,\rho_j = \sum_{j=0}^{N} v^2(\xi_j)\,\rho_j.$$

Comme v s'annule en ± 1, ceci s'écrit encore

$$\|i_Nv\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq \sum_{j=1}^{N-1} v^2(\xi_j)\,\rho_j,$$

d'où

$$\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq c\,N^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} v^2(\xi_j)\,(1-\xi_j^2)^{\frac{1}{2}}.$$

24.b. Dans l'inégalité précédente, on effectue le changement de variable $x = \cos\theta$ et on pose:

$$\varphi(\theta) = v(\cos\theta)\,(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient

$$\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq c\,N^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} \varphi^2(\theta_j) \leq c\,N^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} \big(\sup_{\theta\in\overline{K}_j} |\varphi(\theta)|\big)^2.$$

On utilise alors l'inégalité (10) sur chaque K_j qui est de longueur $\frac{2\pi}{N}$, on obtient l'existence d'une constante c' indépendante de N telle que

$$\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq c' \sum_{j=1}^{N-1} \Big(\int_{K_j} \varphi^2(\theta)\,d\theta + N^{-2} \int_{K_j} \varphi'^2(\theta)\,d\theta \Big).$$

Tout point θ de $[0,\pi]$ appartient à au plus deux intervalles K_j, $1 \leq j \leq N-1$, de sorte que

$$\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq 2c' \Big(\int_0^\pi \varphi^2(\theta)\,d\theta + N^{-2} \int_0^\pi \varphi'^2(\theta)\,d\theta \Big).$$

On effectue alors le changement de variable inverse

$$\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq 2c' \Big(\int_{-1}^1 v^2(x)\,dx + N^{-2} \int_{-1}^1 \big(v'^2(x)\,(1-x^2) + \frac{1}{4} v^2(x)\,x^2 (1-x^2)^{-1} - \frac{1}{2} (v^2)'(x)\,x \big)\,dx \Big).$$

Il suffit alors de majorer $|x|$ et $1-x^2$ par 1 et $(1-x^2)^{-1}$ par $(1-x^2)^{-2}$, puis d'utiliser l'inégalité de la question 23 pour conclure:

$$\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq c'' \big(\|v\|^2_{L^2(\Lambda)} + N^{-2}\,\|v'\|^2_{L^2(\Lambda)} \big).$$

25. On vérifie que, pour toute fonction v de $H^1(\Lambda)$, la fonction $v - \pi_N^1 v$ appartient bien à $H_0^1(\Lambda)$, car l'opérateur π_N^1 conserve les valeurs en ± 1. En appliquant l'inégalité de la question précédente, on obtient alors

$$\|i_N(v - \pi_N^1 v)\|_{L^2(\Lambda)} \leq c\,\big(\|v - \pi_N^1 v\|_{L^2(\Lambda)} + N^{-1}\,\|v' - (\pi_N^1 v)'\|_{L^2(\Lambda)} \big).$$

On note maintenant que $i_N(\pi_N^1 v)$ coïncide avec $\pi_N^1 v$ et on utilise une inégalité triangulaire pour obtenir

$$\|v - i_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c'\,\big(\|v - \pi_N^1 v\|_{L^2(\Lambda)} + N^{-1}\,\|v' - (\pi_N^1 v)'\|_{L^2(\Lambda)} \big).$$

On déduit alors des estimations (7) et (8) que

$$\|v - i_N v\|_{L^2(\Lambda)} \le c''\, N^{-m}\, \|v\|_{H^m(\Lambda)}.$$

26. La formule de quadrature étant exacte sur $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$, on voit que

$$(f, v_N) - (f, v_N)_N = (f, v_N) - (i_N f, v_N)_N = (f - \pi_{N-1} f, v_N) - (i_N f - \pi_{N-1} f, v_N)_N.$$

On en déduit par une inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} |(f, v_N) - (f, v_N)_N| \le \|f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} \|v_N\|_{L^2(\Lambda)} & \\ + (i_N f - \pi_{N-1} f, i_N f - \pi_{N-1} f)_N^{\frac{1}{2}} (v_N, v_N)_N^{\frac{1}{2}}&. \end{aligned}$$

À partir de la question 21, on obtient

$$|(f, v_N) - (f, v_N)_N| \le \|f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} \|v_N\|_{L^2(\Lambda)} + 3\|i_N f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} \|v_N\|_{L^2(\Lambda)},$$

d'où, par une inégalité triangulaire,

$$|(f, v_N) - (f, v_N)_N| \le \big(4\|f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} + 3\|f - i_N f\|_{L^2(\Lambda)}\big) \|v_N\|_{L^2(\Lambda)}.$$

27. En soustrayant l'équation (9) de l'équation (4) et, en utilisant l'exactitude de la formule de quadrature, on voit que, pour tout polynôme v_N de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (u - u_N)'(x) v_N'(x)\, dx + a \int_{-1}^{1} u(x) v_N(x)\, dx - a\,(u_N, v_N)_N & \\ = (f, v_N) - (f, v_N)_N&. \end{aligned}$$

On calcule alors

$$|u_N - \pi_{N-1}^1 u|_{H^1(\Lambda)}^2 \le \int_{-1}^{1} (u_N - \pi_{N-1}^1 u)'^2(x)\, dx + a(u_N - \pi_{N-1}^1 u, u_N - \pi_{N-1}^1 u)_N,$$

d'où, en faisant appel à l'équation précédente,

$$\begin{aligned} |u_N - \pi_{N-1}^1 u|_{H^1(\Lambda)}^2 \le \int_{-1}^{1} (u - \pi_{N-1}^1 u)'(x) (u_N - \pi_{N-1}^1 u)'(x)\, dx & \\ + a \int_{-1}^{1} (u - \pi_{N-1}^1 u)(x) (u_N - \pi_{N-1}^1 u)(x)\, dx & \\ - (f, u_N - \pi_{N-1}^1 u) + (f, u_N - \pi_{N-1}^1 u)_N&. \end{aligned}$$

On utilise alors une inégalité de Cauchy–Schwarz, le fait que les normes $|.|_{H^1(\Lambda)}$ et $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$ sont équivalentes et le résultat de la question 26:

$$\begin{aligned} \|u_N - \pi_{N-1}^1 u\|_{H^1(\Lambda)}^2 \le \big(|u - \pi_{N-1}^1 u|_{H^1(\Lambda)} |u_N - \pi_{N-1}^1 u|_{H^1(\Lambda)} & \\ + a\|u - \pi_{N-1}^1 u\|_{L^2(\Lambda)} \|u_N - \pi_{N-1}^1 u\|_{L^2(\Lambda)} & \\ + c\,(\|f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} + \|f - i_N f\|_{L^2(\Lambda)}) \|u_N - \pi_{N-1}^1 u\|_{L^2(\Lambda)}\big)&. \end{aligned}$$

On simplifie et on utilise une inégalité triangulaire:

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \le c' \left(\|u - \pi^1_{N-1} u\|_{H^1(\Lambda)} + \|f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} + \|f - i_N f\|_{L^2(\Lambda)}\right).$$

On conclut à partir des questions 14, 15 et 26, en se rappelant que $N-1$ est $\ge \frac{N}{2}$:

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \le c''\big(N^{1-m}\, \|u'\|_{D^{m-1}(\Lambda)} + N^{-r}\, \|f\|_{H^r(\Lambda)}\big).$$

N.B. Plus précisément, la quantité N^{1-m} dans la majoration précédente peut être remplacée par $N^{1-m} + a\, N^{-m}$, la constante c étant alors indépendante de a.

28.a. À partir du problème (9), on calcule

$$\begin{aligned}(u_N' - &(\pi^1_M u)', u_N' - (\pi^1_M u)')_N + \big(a(u_N - \pi^1_M u), u_N - \pi^1_M u\big)_N \\ &= -\big((\pi^1_M u)', u_N' - (\pi^1_M u)'\big)_N - \big(a\,(\pi^1_M u), u_N - \pi^1_M u\big)_N + \big(f, u_N - \pi^1_M u\big)_N,\end{aligned}$$

puis on utilise le problème (4):

$$\begin{aligned}(u_N' - &(\pi^1_M u)', u_N' - (\pi^1_M u)')_N + \big(a(u_N - \pi^1_M u), u_N - \pi^1_M u\big)_N \\ &= \int_{-1}^1 \big(u' - (\pi^1_M u)'\big)(x)\big(u_N' - (\pi^1_M u)'\big)(x)\, dx + \int_{-1}^1 a(x)\, u(x)(u_N - \pi^1_M u)(x)\, dx \\ &\quad - \big(a(\pi^1_M u), u_N - \pi^1_M u\big)_N - \int_{-1}^1 f(x)(u_N - \pi^1_M u)(x)\, dx + \big(f, u_N - \pi^1_M u\big)_N.\end{aligned}$$

On réécrit cette équation:

$$\begin{aligned}(u_N' - &(\pi^1_M u)', u_N' - (\pi^1_M u)')_N + \big(a(u_N - \pi^1_M u), u_N - \pi^1_M u\big)_N \\ &= \int_{-1}^1 \big(u' - (\pi^1_M u)'\big)(x)\big(u_N' - (\pi^1_M u)'\big)(x)\, dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 a(x)\,(u - \pi^1_M u)(x)(u_N - \pi^1_M u)(x)\, dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 a(x)\,(\pi^1_M u)(x)(u_N - \pi^1_M u)(x)\, dx - \big(a(\pi^1_M u), u_N - \pi^1_M u\big)_N \\ &\quad - \int_{-1}^1 f(x)(u_N - \pi^1_M u)(x)\, dx + \big(f, u_N - \pi^1_M u\big)_N.\end{aligned}$$

On note maintenant que, pour tout polynôme a_M de $\mathbb{P}_M(\Lambda)$, le polynôme $a_M\, \pi^1_M u$ est de degré $\le N-1$, de sorte que

$$\begin{aligned}(u_N' - &(\pi^1_M u)', u_N' - (\pi^1_M u)')_N + \big(a(u_N - \pi^1_M u), u_N - \pi^1_M u\big)_N \\ &= \int_{-1}^1 \big(u' - (\pi^1_M u)'\big)(x)\big(u_N' - (\pi^1_M u)'\big)(x)\, dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 a(x)\,(u - \pi^1_M u)(x)(u_N - \pi^1_M u)(x)\, dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 (a - a_M)(x)\,(\pi^1_M u)(x)(u_N - \pi^1_M u)(x)\, dx - \big((a - a_M)(\pi^1_M u), u_N - \pi^1_M u\big)_N \\ &\quad - \int_{-1}^1 f(x)(u_N - \pi^1_M u)(x)\, dx + \big(f, u_N - \pi^1_M u\big)_N.\end{aligned}$$

28.b. La quantité $\big(a(u_N - \pi_M^1 u), u_N - \pi_M^1 u\big)_N$ est positive ou nulle. D'après l'équivalence des normes $|.|_{H^1(\Lambda)}$ et $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$, on déduit de la formule précédente, combinée avec les questions 21 et 26 et l'inégalité de Cauchy–Schwarz, que

$$\|u_N - \pi_M^1 u\|_{H^1(\Lambda)} \le c\,\big(\|u - \pi_M^1 u\|_{H^1(\Lambda)} + (\sup_{-1\le x\le 1} |a(x) - a_M(x)|)\|\pi_M^1 u\|_{L^2(\Lambda)}$$
$$+ \|f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} + \|f - i_N f\|_{L^2(\Lambda)}\big),$$

où la constante c dépend de $\sup_{-1\le x\le 1} |a(x)|$. Par l'inégalité triangulaire, ceci donne

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \le c'\,\big(\|u - \pi_M^1 u\|_{H^1(\Lambda)} + (\sup_{-1\le x\le 1} |a(x) - a_M(x)|)\,\|\pi_M^1 u\|_{L^2(\Lambda)}$$
$$+ \|f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} + \|f - i_N f\|_{L^2(\Lambda)}\big).$$

On conclut alors grâce aux questions 14, 15 et 25, et en choisissant un polynôme a_M vérifiant la propriété d'approximation de a (on note aussi que M est $\ge \frac{N}{4}$):

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \le c'\big(N^{1-m}\,\|u'\|_{D^{m-1}(\Lambda)} + N^{-s}\,\|u\|_{H^1(\Lambda)} + N^{-r}\,\|f\|_{H^r(\Lambda)}\big).$$

29. On peut noter que les problèmes (5) et (9) se ramènent à résoudre un système linéaire carré d'ordre $N-1$, dont la matrice est symétrique définie positive (on peut vérifier que le nombre de condition de la matrice est le même dans les deux cas). Mais le problème (9) possède l'avantage essentiel d'éviter le calcul d'intégrales: en effet, il est toujours très coûteux et la plupart du temps impossible de calculer les intégrales de la donnée f que multiplie les polynômes de la base indiquée précédemment, ces quantités formant le membre de droite du problème (5); par contre, on connaît en général les valeurs de f aux points ξ_j, $1 \le j \le N-1$, ce qui permet d'assembler facilement le second membre du problème (9). Pour les mêmes raisons, le traitement du coefficient non constant a est également plus facile.

30. Comme u^0 est donné, on montre par récurrence que l'on peut construire $u^{\ell+1}$ à partir de u^ℓ. En effet, en supposant u^ℓ connu, on note que $u^{\ell+1}$ est cherché dans $H^1(\Lambda)$ et vérifie

$$-(u^{\ell+1})'' + \frac{1}{h}u^{\ell+1} = g(.,(\ell+1)h) + \frac{1}{h}u^\ell \quad \text{dans }]-1,1[,$$
$$u^{\ell+1}(-1) = u^{\ell+1}(1) = 0.$$

C'est un problème du type (1)(2), avec a constant égal à $\frac{1}{h}$ et $f = g(.,(\ell+1)h) + \frac{1}{h}u^\ell$. D'après la question 7, ce problème admet une solution unique tant que $g\big(.,(\ell+1)h\big)$ est défini dans $L^2(\Lambda)$.

31.a. On intègre l'équation (11) par rapport à t entre ℓh et $(\ell+1)h$. On obtient

$$u(.,(\ell+1)h) - u(.,\ell h) - \int_{\ell h}^{(\ell+1)h} (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(.,t)\,dt = \int_{\ell h}^{(\ell+1)h} g(.,t)\,dt.$$

En divisant par h cette équation et en la soustrayant au schéma définissant $u^{\ell+1}$, on obtient

$$\frac{e^{\ell+1}-e^{\ell}}{h}-(e^{\ell+1})''=\varepsilon^{\ell+1}\quad \text{dans }]-1,1[,$$

où l'erreur de consistance $\varepsilon^{\ell+1}$ est définie par

$$\varepsilon^{\ell+1}=g\big(.,(\ell+1)h\big)-\frac{1}{h}\int_{\ell h}^{(\ell+1)h}g(.,t)\,dt+(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\big(.,(\ell+1)h\big)-\frac{1}{h}\int_{\ell h}^{(\ell+1)h}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(.,t)\,dt.$$

31.b. D'après l'équation vérifiée par $e^{\ell+1}$, on observe que

$$\|e^{\ell+1}\|^2_{L^2(\Lambda)}+h\,|e^{\ell+1}|^2_{H^1(\Lambda)}=(e^{\ell},e^{\ell+1})+h(\varepsilon^{\ell+1},e^{\ell+1}).$$

On majore maintenant $(e^{\ell},e^{\ell+1})$ par $\frac{1}{2}\big(\|e^{\ell+1}\|^2_{L^2(\Lambda)}+\|e^{\ell}\|^2_{L^2(\Lambda)}\big)$. On a aussi l'inégalité

$$(\varepsilon^{\ell+1},e^{\ell+1})\le\frac{1}{2}\,|e^{\ell+1}|^2_{H^1(\Lambda)}+c\,\big(\sup_{v\in H_0^1(\Lambda)}\frac{(\varepsilon^{\ell+1},v)}{|v|_{H^1(\Lambda)}}\big)^2.$$

On en déduit

$$\|e^{\ell+1}\|^2_{L^2(\Lambda)}+h\,|e^{\ell+1}|^2_{H^1(\Lambda)}\le\|e^{\ell}\|^2_{L^2(\Lambda)}+2c\,h\,\big(\sup_{v\in H_0^1(\Lambda)}\frac{(\varepsilon^{\ell+1},v)}{|v|_{H^1(\Lambda)}}\big)^2.$$

En sommant l'inégalité précédente et en se rappelant que e^0 est nul, on obtient que

$$\|e^{\ell}\|^2_{L^2(\Lambda)}+h\sum_{k=1}^{\ell}|e^{k}|^2_{H^1(\Lambda)}\le 2c\,h\sum_{k=1}^{\ell}\big(\sup_{v\in H_0^1(\Lambda)}\frac{(\varepsilon^{k},v)}{|v|_{H^1(\Lambda)}}\big)^2.$$

32. Soit maintenant v une fonction quelconque de $H_0^1(\Lambda)$. On voit que

$$\begin{aligned}(\varepsilon^k,v)=\big(g(.,kh),v\big)&-\frac{1}{h}\int_{(k-1)h}^{kh}\big(g(.,t),v\big)\,dt\\&-\big((\frac{\partial u}{\partial x})(.,kh),v'\big)+\frac{1}{h}\int_{(k-1)h}^{kh}\big((\frac{\partial u}{\partial x})(.,t),v'\big)\,dt.\end{aligned}$$

La propriété de régularité de la fonction g permet d'écrire

$$\big|\big(g(.,t),v\big)-\big(g(.,kh),v\big)\big|\le|t-kh|\,\big(\sup_{0\le\tau\le T}\|\frac{\partial g}{\partial t}(.,\tau)\|_{L^2(\Lambda)}\big)\,\|v\|_{L^2(\Lambda)},$$

d'où l'on déduit

$$\big(g(.,kh),v\big)-\frac{1}{h}\int_{(k-1)h}^{kh}\big(g(.,t),v\big)\,dt\le\frac{1}{2}h\,\big(\sup_{0\le\tau\le T}\|\frac{\partial g}{\partial t}(.,\tau)\|_{L^2(\Lambda)}\big)\,\|v\|_{L^2(\Lambda)}.$$

Le même raisonnement appliqué à la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$ implique la majoration

$$((\frac{\partial u}{\partial x})(.,kh),v') - \frac{1}{h}\int_{(k-1)h}^{kh}((\frac{\partial u}{\partial x})(.,t),v')\,dt \leq \frac{1}{2}h\,(\sup_{0\leq\tau\leq T}|\frac{\partial u}{\partial t}(.,\tau)|_{H^1(\Lambda)})\,|v|_{H^1(\Lambda)}.$$

En utilisant le fait que $\|v\|_{L^2(\Lambda)}$ est plus petit qu'une constante fois $|v|_{H^1(\Lambda)}$ pour toute fonction v de $H_0^1(\Lambda)$, on obtient

$$\sup_{v\in H_0^1(\Lambda)}\frac{(\varepsilon^k,v)}{|v|_{H^1(\Lambda)}} \leq c\,h\,(\sup_{0\leq\tau\leq T}\|\frac{\partial g}{\partial t}(.,\tau)\|_{L^2(\Lambda)} + \sup_{0\leq\tau\leq T}\|\frac{\partial u}{\partial t}(.,\tau)\|_{H^1(\Lambda)}).$$

En élevant cette équation au carré et en sommant sur k, on obtient l'estimation désirée:

$$\|u^\ell - u(.,\ell h)\|_{L^2(\Lambda)} \leq c\sqrt{T}\,h\,(\sup_{0\leq\tau\leq T}\|\frac{\partial g}{\partial t}(.,\tau)\|_{L^2(\Lambda)} + \sup_{0\leq\tau\leq T}\|\frac{\partial u}{\partial t}(.,\tau)\|_{H^1(\Lambda)}).$$

33. L'équation (14) correspond à un problème du type (9), avec a constant égal à $\frac{1}{h}$ et $f = g(.,(\ell+1)h) + \frac{1}{h}u_N^\ell$. D'après la question 20, il admet une solution unique.

34. L'idée est ici d'observer d'après l'équation (14) et la propriété d'exactitude de la formule de quadrature que

$$\begin{aligned}
&\big(u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big)_N + h\big((u_N^{\ell+1})' - (\pi_N^1 u^{\ell+1})', (u_N^{\ell+1})' - (\pi_N^1 u^{\ell+1})'\big)_N \\
&\quad = \big(u^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big) \\
&\qquad + \big(\pi_N^1 u^{\ell+1} - \pi_{N-1}^1 u^{\ell+1}, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big) - \big(\pi_N^1 u^{\ell+1} - \pi_{N-1}^1 u^{\ell+1}, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big)_N \\
&\qquad\quad + h\big((u^{\ell+1})' - (\pi_N^1 u^{\ell+1})', (u_N^{\ell+1})' - (\pi_N^1 u^{\ell+1})'\big) \\
&\qquad\qquad + h\big(g(.,(\ell+1)h), u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big)_N - h\big(g(.,(\ell+1)h), u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big) \\
&\qquad\qquad\quad + \big(u_N^\ell - \pi_{N-1}^1 u^\ell, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big)_N - \big(u_N^\ell - \pi_{N-1}^1 u^\ell, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big).
\end{aligned}$$

On observe aussi que $(u^{\ell+1})' - (\pi_N^1 u^{\ell+1})'$ est orthogonal à la dérivée de n'importe quel polynôme dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, de sorte que l'équation précédente se simplifie en

$$\begin{aligned}
&\big(u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big)_N + h\big((u_N^{\ell+1})' - (\pi_N^1 u^{\ell+1})', (u_N^{\ell+1})' - (\pi_N^1 u^{\ell+1})'\big)_N \\
&\quad = \big(u^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big) \\
&\qquad + \big(\pi_N^1 u^{\ell+1} - \pi_{N-1}^1 u^{\ell+1}, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big) - \big(\pi_N^1 u^{\ell+1} - \pi_{N-1}^1 u^{\ell+1}, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big)_N \\
&\qquad\qquad + h\big(g(.,(\ell+1)h), u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big)_N - h\big(g(.,(\ell+1)h), u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big) \\
&\qquad\qquad\quad + \big(u_N^\ell - \pi_{N-1}^1 u^\ell, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big)_N - \big(u_N^\ell - \pi_{N-1}^1 u^\ell, u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\big).
\end{aligned}$$

On en déduit en utilisant les questions 21 et 26 que

$$\begin{aligned}
\|u_N^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\|_{L^2(\Lambda)} \leq c\,\big(&\|u^{\ell+1} - \pi_N^1 u^{\ell+1}\|_{L^2(\Lambda)} + \|u^{\ell+1} - \pi_{N-1}^1 u^{\ell+1}\|_{L^2(\Lambda)} \\
&+ h\,\|g(.,(\ell+1)h) - \pi_{N-1} g(.,(\ell+1)h)\|_{L^2(\Lambda)} \\
&\quad + h\,\|g(.,(\ell+1)h) - i_N g(.,(\ell+1)h)\|_{L^2(\Lambda)}\big) \\
&\qquad + \|u^\ell - \pi_{N-1}^1 u^\ell\|_{L^2(\Lambda)} + \|u^\ell - u_N^\ell\|_{L^2(\Lambda)}.
\end{aligned}$$

En utilisant les questions 14, 16 et 25, ainsi qu'une inégalité triangulaire, on en déduit par récurrence sur ℓ

$$\|u^\ell - u_N^\ell\|_{L^2(\Lambda)} \leq c\left(N^{-m}\sum_{k=0}^{\ell}\|u^k\|_{H^m(\Lambda)} + hN^{-r}\sum_{k=0}^{\ell}\|g(.,kh)\|_{H^r(\Lambda)}\right).$$

35. On écrit bien sûr l'inégalité triangulaire

$$\|u(.,\ell h) - u_N^\ell\|_{L^2(\Lambda)} \leq \|u^\ell - u(.,\ell h)\|_{L^2(\Lambda)} + \|u^\ell - u_N^\ell\|_{L^2(\Lambda)}.$$

On utilise alors les résultats des questions 32 et 34:

$$\begin{aligned}\|u(.,\ell h) - u_N^\ell\|_{L^2(\Lambda)} \leq\; & c\sqrt{T}\,h\,\Big(\sup_{0\leq\tau\leq T}\|\frac{\partial g}{\partial t}(.,\tau)\|_{L^2(\Lambda)} + \sup_{0\leq\tau\leq T}\|\frac{\partial u}{\partial t}(.,\tau)\|_{H^1(\Lambda)}\Big)\\ & + c'\left(N^{-m}\sum_{0\leq kh\leq T}\|u^k\|_{H^m(\Lambda)} + hN^{-r}\sum_{0\leq kh\leq T}\|g(.,kh)\|_{H^r(\Lambda)}\right).\end{aligned}$$

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

On désigne par $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Le commutateur de deux éléments A et B de $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$) est l'élément noté :

$$[A\ ,\ B] = A \cdot B - B \cdot A.$$

On note Tr (A), la (trace de A) somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

On considère un système de $n\,(n \geqslant 2)$ particules, toutes de même masse $m\,(m = 1)$, sur une droite, dont les positions sont notées :

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

décrit par l'énergie potentielle :

$$U = \frac{g^2}{2} \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

où g et λ sont deux constantes réelles ($g \geqslant 0, \lambda \geqslant 0$).

I

1. *a.* Écrire le lagrangien du système.

   b. Donner le hamiltonien correspondant H et préciser le domaine $\mathcal{D}_H$ sur lequel il est défini.

   c. Écrire les équations de Hamilton du système. On note :

   $$t \longmapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t); y_1(t), \ldots, y_n(t))$$

   la solution des équations de Hamilton avec donnée initiale :

   $$(x_1(0), \ldots, x_n(0); y_1(0), \ldots, y_n(0)) \in \mathcal{D}_H.$$

   Montrer que :

   $$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} \frac{2\,g^2}{(x_i - x_j)^3} - \lambda^2 x_i \qquad (*)$$

   $$i = 1, \ldots, n.$$

2. *a.* Montrer qu'il n'y a pas de collisions possibles en utilisant le principe de conservation de l'énergie.

   b. En déduire que toute solution maximale des équations de Hamilton de H avec donnée initiale :

   $$(x_1(0), \ldots, x_n(0); y_1(0), \ldots, y_n(0)) \in \mathcal{D}_H$$

   est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. A toute solution maximale des équations de Hamilton de H, on associe deux fonctions matricielles :

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \qquad L : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

définies par :

$$X_{ij}(t) = x_i(t)\,\delta_{ij}$$

$$L_{ij}(t) = y_i(t)\,\delta_{ij} + \sqrt{-1}\,\frac{g}{(x_i - x_j)}\,(1 - \delta_{ij})$$

$$(\delta_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j, \qquad \delta_{ij} = 1 \quad \text{si} \quad i = j).$$

On veut montrer qu'il existe une fonction matricielle :

$$M : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

telle que :

$$\frac{dX}{dt} = L + [X, M].$$

a. Montrer que les coefficients non diagonaux de M notés M_{ij} $(i \neq j)$ doivent satisfaire :

$$M_{ij}(x_i - x_j) = L_{ij}$$

et donc :

$$M_{ij} = \frac{L_{ij}}{(x_i - x_j)} = \sqrt{-1}\,\frac{g}{(x_i - x_j)^2}.$$

b. Vérifier que les termes diagonaux de $\frac{dX}{dt}$ et de $L + [X, M]$ coïncident et conclure.

On veut maintenant montrer qu'on peut préciser le choix précédent de M en sorte qu'on ait en plus :

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] - \lambda^2 X.$$

4. *a.* Montrer que les termes diagonaux de $\frac{dL}{dt}$ et ceux de $-\lambda^2 X + [L, M]$ coïncident.

b. Montrer enfin que l'on peut choisir les termes non diagonaux de M en sorte que :

$$\frac{dL}{dt} = -\lambda^2 X + [L, M].$$

5. *a.* Montrer qu'il existe une fonction matricielle :

$$U : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

telle que :

$$\frac{dU}{dt} = UM.$$

b. Montrer que :

$$\frac{d}{dt}(UXU^{-1}) = U\,\frac{dX}{dt}\,U^{-1} + [UMU^{-1}, UXU^{-1}].$$

6. On pose $\mathscr{X} = UXU^{-1}$ et $\mathscr{L} = ULU^{-1}$. Montrer que :

$$\frac{d\mathscr{X}}{dt} = \mathscr{L}, \qquad \frac{d\mathscr{L}}{dt} = -\lambda^2 \mathscr{X}.$$

En déduire l'expression de la fonction matricielle :

$$t \longmapsto \mathscr{X}(t) \in M_n(\mathbb{C}) \quad \text{vérifiant} \quad \mathscr{X}(0) = A, \qquad \mathscr{X}'(0) = B$$

où A, B sont des éléments donnés de $M_n(\mathbb{C})$.

II

On suppose $\lambda \neq 0$.

1. Démontrer que les fonctions :

$$t \longmapsto \operatorname{Tr}(X^k(t)) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

sont des fonctions périodiques de période $\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

2. En déduire que les solutions de (*) telles que :

$$\left(x_1(0), \ldots, x_n(0); \frac{dx_1}{dt}(0), \ldots, \frac{dx_n}{dt}(0)\right) \in \mathscr{D}_H$$

sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

3. *a.* Démontrer que le système hamiltonien H a $n!$ positions d'équilibre qui sont des minima.

   b. Calculer la valeur de H en ces positions d'équilibre.

III

On suppose dans cette partie que $\lambda = 0$.

1. Montrer que les fonctions $t \longmapsto \operatorname{Tr}(L^k(t))$ sont des constantes du mouvement du système hamiltonien H.

2. En déduire que les positions $x_i(t)$ des particules sont données par les valeurs propres d'une matrice qui dépend linéairement de t.

3. Démontrer que les positions $x_i(t)$ ont des expressions asymptotiques :

$$x_i(t) = y_i^+ \, t + x_i^+ + O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad t \longrightarrow +\infty$$

$$x_i(t) = y_i^- \, t + x_i^- + O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad t \longrightarrow -\infty .$$

4. Démontrer que pour tout $k = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i^+)^k = \sum_{i=1}^{n} (y_i^-)^k .$$

5. En déduire l'existence d'une permutation $s \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$y_i^+ = y_{s(i)}^- .$$

6. Supposons que les particules sont rangées dans l'ordre suivant :

$$x_1(t) < x_2(t) < \ldots < x_n(t).$$

Montrer que :

$$y_1^- = y_n^+ , \qquad y_2^- = y_{n-1}^+ , \ldots, \qquad y_n^- = y_1^+ .$$

RAPPORT SUR L'OPTION MÉCANIQUE GÉNÉRALE de L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

Les trois premières questions, très faciles, étaient destinées à vérifier que les candidats connaissent les présentations de la mécanique suivant le formalisme Lagrangien et suivant le formalisme Hamiltonien. A la surprise des correcteurs, beaucoup trop de candidats passent directement à la question 3, manifestant peu de connaissances des fondements de la mécanique. Dans un nombre important de copies, on confond les équations de Hamilton avec celles de Lagrange.

Deux questions relevaient de la connaissance de la théorie générale des équations différentielles. Dans la question 2b, l'existence d'une solution globale des équations de Hamilton résultait du théorème de Cauchy sur l'existence des solutions locales d'une équation différentielle dont le second membre est suffisamment régulier et d'un argument de compacité. Pour l'argument de compacité, il était essentiel d'observer que les vitesses restent bornées. La question 5a qui n'a pas été abordée dans la plupart des copies se traitait de manière analogue.

Dans la partie II, peu de candidats donnent un argument correct pour déduire du fait que les coefficients de la matrice sont périodiques que les valeurs propres sont aussi périodiques. Il fallait bien noter que les valeurs propres sont toujours distinctes.

En II.3-a, le caractère convexe de l'Hamiltonien assure de suite qu'il ne peut n'y avoir qu'un seul point d'équilibre par composantes connexes et que c'est un minimum. L'existence résulte du fait que l'Hamiltonien tend vers l'infini au bord du domaine de définition.

Dans la partie III, plusieurs candidats écrivent que la matrice X elle-même évolue linéairement en fonction du temps. Quelques candidats commettent aussi des erreurs graves avec la trace d'une matrice et écrivent, par exemple, que c'est le produit des valeurs propres.

Quelques candidats ont observé fort justement que la convention de notation des indices des lignes et des colonnes n'est fixée que par l'énoncé de la question I.3-a. Ceux qui n'ont pas choisi cette convention n'ont pas été pénalisés dans la suite puisqu'elle était sans influence sur les résultats ultérieurs.

CORRIGÉ DU PROBLÈME

Option mécanique générale, agrégation de mathématiques

1-a) Le Lagrangien du système est par définition

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{g^2}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} - \frac{\lambda^2}{2} x_i^2$$

b) Le Hamiltonien est

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{g^2}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \frac{\lambda^2}{2} \sum x_i^2 .$$

Il est défini sur le domaine

$$\mathcal{D}_H = \{(\underline{y}, \underline{x}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{x_i = x_j \,,\, i \neq j\})\}$$

c) Les équations de Hamilton

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} = y_i$$

$$\dot{y}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

conduisent à

$$\ddot{x}_i = \sum_{i \neq j} \frac{2g^2}{(x_i - x_j)^3} - \lambda^2 x_i$$

2-a) La conservation de H :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial H}{\partial y_i} \dot{y}_i = 0$$

implique que la quantité

$\sum \frac{1}{(x_i - x_j)^2}$ reste borné. Ceci exclut la présence de collision ($x_i = x_j$ pour $i \neq j$).

b) Le théorème d'existence des solutions des équations différentielles de Cauchy permet de conclure. En effet, l'absence de collisions implique que le second membre du système différentiel (*) reste dans la classe de Lipschitz et on a donc l'existence locale. Il n'est pas difficile de montrer que les vitesses $\dot{x}_i$ restent bornées. L'existence d'une solution globale résulte donc par compacité.

et donc

$$\chi^k = U X^k U^{-1}$$

et

$$\mathrm{Tr}(\chi^k) = \mathrm{Tr}(X^k) \ .$$

On a vu en I.6 que si $\lambda \neq 0$, $t \to \chi^k(t)$ est $2\pi/\lambda$-périodique .

Il en est donc de même de $t \to \mathrm{Tr}(\ ^k(t))$ et donc de $t \to \mathrm{Tr}(X^k(t))$.

2 -

On a $\mathrm{Tr}(X^k(t)) = \sum_i x_i^k$.

Les $x_i(t)$ sont les solutions de l'équation polynômiale (en μ) , $\det(X(t) - \mu I) = 0$. Les coefficients de ce polynôme sont des fonctions $2\pi/\lambda$-périodiques. Au bout d'une période, les solutions sont conservées au moins dans leur ensemble. A priori, il pourrait y avoir une permutation. En fait c'est impossible puisqu'on a établi en I qu'il ne pouvait jamais y avoir de collisions ($x_i = x_j$, $i \neq j$) et on a donc que les solutions $x_i(t)$ sont $2\pi/\lambda$-périodiques.

3-a)

L'hamiltonien H est défini sur le domaine D_H qui a $n!$ composantes connexes. On passe d'une composante à l'autre par une permutation des x_i . Sur chaque composante, on observe que H tend vers l'infini au bord du domaine de définition. La fonction a donc au moins un minimum dans chaque composante. On remarque alors que H est convexe et donc elle ne peut admettre par composante connexe qu'une seule position d'équilibre qui est un minimum.

3-b)

L'hamiltonien H est défini surle domaine D_H qui a $n!$ composantes connexes. On passe d'une composante à l'autre par une permutation des x_i . Sur chaque composante, on observe que H tend vers l'infini au bord du domaine de définition. La fonction a donc au moins un minimum dans chaque composante. On remarque alors que H est convexe et donc elle ne peut admettre par composante connexe qu'une seule position d'équilibre qui est un minimum.

3-b)

Chacune de ces positions d'équilibre est l'unique solution du système

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 = \lambda^2 x_i - \sum_{(i,j)} \frac{2g^2}{(x_i-x_j)^3} .$$

Observons alors que :

$$H = \frac{\lambda^2}{2} \Sigma\, x_i^2 + \frac{g^2}{2} \sum_{i\neq j} \frac{1}{(x_i-x_j)^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} \left(\frac{g}{x_i-x_j} - \frac{\lambda}{\sqrt{n-1}} x_i\right)^2 + \frac{g\lambda n(n-1)}{2}$$

On a donc facilement que $H \geq \frac{g\lambda n(n-1)}{2}$. Pour démontrer que la valeur minimale de H est égale à $g\lambda m(m-1)/2$ il faut donc établir que les solutions du système

$$\lambda^2 x_i - \sum_{i,j} \frac{2g^2}{(x_i-x_j)^3} = 0$$

et du système

$$\sum_{i,j} \frac{g}{x_i-x_j} - \frac{\lambda}{\sqrt{n-1}} x_i = 0$$

sont les mêmes.

Ce dernier point nécessite un argument particulier. Pour simplifier sa présentation, on absorbe les constantes g, λ dans les variables. Il s'agit essentiellement de montrer que les positions d'équilibre du système

$$\ddot{x}_j = - x_j + 2 \sum_{i\neq j} (x_j-x_i)^{-3}$$

sont données par $x_j = \sum_{i\neq j} (x_j-x_i)^{-1}$.

Considérons le système différentiel

$$\dot{x}_j(t) = - x_j(t) + \sum_{i\neq j} (x_j-x_i)^{-1} \qquad (1)$$

et dérivons. On obtient après élimination des dérivées premières

$$\ddot{x}_j(t) = - x_j(t) + 2 \sum_{i\neq j} (x_j(t)-x_i(t))^{-3} . \qquad (2)$$

Les positions d'équilibre de (1) sont donc des positions d'équilibre de (2).

On suppose que $\lambda = 0$.

1.

On a montré que dans ce cas $\mathcal{L} = \mathcal{L}_o$ est une constante. On a ainsi

$$\mathrm{Tr}(L^k) = \mathrm{Tr}(UL^kU^{-1}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{L}^k)$$

qui est une constante.

2.

On a montré aussi que χ est une matrice qui dépend linéairement du temps.

La matrice X qui est conjuguée à χ a les mêmes valeurs propres que χ .

Par ailleurs X est diagonale et les x_i sont ses éléments diagonaux.

On en déduit que les positions x_i des particules sont les valeurs propres d'une matrice qui dépend linéairement de temps.

3.

Il est facile de vérifier que les particules se repoussent et on en déduit le comportement asymptotique souhaité.

4.

Du fait que les $\mathrm{Tr}(L^k(t))$ sont des constantes du mouvement, il résulte que

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i^+)^k = \sum_{i=1}^{n} (y_i^-)^k \ .$$

5.

Les y_i^+ et y_i^- sont donc les racines du même polynôme de degré n , il s'en suit qu'il existe une permutation $s \in {}_{r}$ telle que $y_i^+ = y_{s(i)}^-$.

6.

On a donc

$$y_1^- t < y_2^- t < \dots < y_n^- t \quad \text{pour} \quad t < 0$$

et

$$y_1^+ t < y_2^+ t < \dots < y_n^+ t \quad \text{pour} \quad t > 0 \ .$$

Comme il n'y a pas de collision, on obtient que nécessairement

$$y_1^- = y_n^+ \ , \ \dots \ , \ y_n^- = y_n^+ \ .$$

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

Notations, Définitions, Rappels.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.

1. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{F}$, on définit leur *coefficient de mélange* par

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \ .$$

2. Si f est une fonction décroissante sur l'intervalle I, on définit sa *pseudo-inverse* f^{-1} sur $]\inf(f(I)), \sup(f(I))[$ par $f^{-1}(s) = \inf\{x \in I : f(x) \leq s\}$.
3. Si X est une variable aléatoire, on note $\mathcal{F}(X)$ la tribu engendrée par X et H_X la fonction de queue de la distribution de X, définie sur $\mathbb{R}$ par $H_X(x) = P(X > x)$. On note Q_X la *fonction de quantile* de X, $Q_X = H_X^{-1}$. Lorsque X est intégrable ou positive, on note $E(X)$ l'espérance mathématique de X, $E(X) = \int X dP$.
4. Pour tout $p \in [1, \infty[$, $\mathbb{L}^p$ désigne l'espace des variables aléatoires X telles que $|X|^p$ soit intégrable, muni de sa semi-norme usuelle $\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}$. $\mathbb{L}^\infty$ désigne l'espace des variables aléatoires X presque surement bornées, la semi-norme $\|X\|_\infty$ étant définie comme la borne supérieure essentielle de $|X|$, c'est à dire $\|X\|_\infty = \inf\{x \in \mathbb{R} : H_{|X|}(x) = 0\}$.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires. Lorsque X, Y et XY sont intégrables, on définit la covariance entre X et Y par $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Lorsque X est de carré intégrable, on définit la variance de X par $\text{var}(X) = \text{cov}(X, X)$.
6. On rappelle le *critère de relative compacité en loi*:

pour une suite de lois de probabilité (ν_n) sur $\mathbb{R}$, les propriétés (i) et (ii) ci-dessous sont équivalentes,

(i) De toute sous suite de (ν_n) on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une loi de probabilité.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$, tel que $\nu_n([-K, K]) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout n.

7. Un espace mesuré $(A, \mathcal{A}, \mu)$ est dit *σ-fini* si A s'exprime comme une réunion au plus dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie.

On rappelle l'énoncé du théorème de Fubini pour une fonction positive:
soit $(A_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)_{i=1,2}$ deux espaces mesurés σ-finis et f une application mesurable et positive, définie sur $(A_1 \times A_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, alors les applications

$$f_1 : x_1 \longrightarrow \int_{A_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \ , \ f_2 : x_2 \longrightarrow \int_{A_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$$

sont mesurables. De plus

$$\int_{A_1 \times A_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{A_1} f_1 d\mu_1 = \int_{A_2} f_2 d\mu_2$$

8. On rappelle le résultat de densité suivant:

soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Soit B un élément de la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Pour tout ε strictement positif, il existe une partie A élément de $\mathcal{A}$ telle que $\|\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B\|_1 \leq \varepsilon$.

Préliminaires

1. Soit X une variable aléatoire.

a. Prouver que la fonction H_X est continue à droite en tout point.

b. Montrer que pour tout $(x, s) \in \mathbb{R} \times]0,1[$, on a

$$x < Q_X(s) \text{ si et seulement si } s < H_X(x).$$

c. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Prouver que $Q_X(U)$ a même loi que X.

d. Supposant que $X \in \mathbb{L}^p$, prouver que $Q_{|X|}^p$ est intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur $]0,1[$ et que $E(|X|^p) = \int_0^1 Q_{|X|}^p(t)dt$.

2.

a. Prouver que, pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires positives on a:

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} P(X > x, Y > y)dxdy.$$

En déduire que

$$E(XY) \leq \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} [\int_0^1 \mathbb{I}_{(s<H_X(x), s<H_Y(y))} ds] dxdy.$$

b. Démontrer que si (X, Y) est un couple de variables aléatoires tel que $Q_{|X|}Q_{|Y|}$ est intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur $]0,1[$, alors XY est intégrable.

3. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$. Que signifie $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$? Montrer que $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1/4$.

Première Partie

A

Soit X et Y deux variables intégrables telles que $Q_{|X|}Q_{|Y|}$ soit intégrable sur $]0,1[$. On note α le coefficient de mélange entre $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{F}(Y)$. Le but de ce paragraphe est d'établir une majoration fine de la covariance entre X et Y.

1.

a. Prouver que XY est intégrable.

b. Montrer que

$$|P(X > x, Y > y) - P(X > x)P(Y > y)| \leq \int_0^\alpha \mathbb{I}_{(s<H_X(x), s<H_Y(y))} ds.$$

2. On suppose que X et Y sont positives. Etablir que

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \int_0^\alpha Q_X(s)Q_Y(s)ds.$$

3. Démontrer que

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq 4\int_0^\alpha Q_{|X|}(s)Q_{|Y|}(s)ds.$$

4.

a. Soit $1 < p < +\infty, 1 < q < +\infty$ et $1 < r < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Prouver que si $X \in \mathbb{L}^p$ et $Y \in \mathbb{L}^q$ on a

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq 4\alpha^{1/r}\|X\|_p\|Y\|_q.$$

b. Prouver que si $X \in \mathbb{L}^\infty$ et $Y \in \mathbb{L}^\infty$ on a

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq 4\alpha\|X\|_\infty\|Y\|_\infty.$$

Dans toute la suite du problème, $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est une suite *stationnaire* de variables aléatoires . Ce qui signifie que pour toute partie finie J de $\mathbb{Z}$ et tout entier m, les vecteurs aléatoires $(X_j, j \in J)$ et $(X_{j+m}, j \in J)$ ont même loi. Pour chaque entier j on note $\mathcal{M}_{-\infty}^j$ la tribu engendrée par $\{X_i, i \leq j\}$ et $\mathcal{M}_j^{+\infty}$ la tribu engendrée par $\{X_i, i \geq j\}$. On définit la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ des coefficients de mélange de $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ par $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n = \alpha(\mathcal{M}_{-\infty}^0, \mathcal{M}_n^{+\infty})$ pour $n \geq 1$. . La *fonction de mélange* $\alpha(\cdot)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\alpha(t) = \alpha_{[t]}$, où $[t]$ désigne la partie entière de t. On note Q la fonction de quantile de $|X_0|$. Enfin, pour chaque entier $n \geq 1$ on note S_n la somme partielle $X_1 + \cdots + X_n$. On dit que la suite $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est *mélangeante* si α_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On suppose que X_0 est d'espérance nulle.

B

1.

a. Montrer que $\alpha(\cdot)$ est décroissante puis que le domaine de définition de la fonction pseudo-inverse α^{-1} est $]0,1[$ lorsque la suite $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est mélangeante.

b. Prouver que $\alpha_n = \alpha(\mathcal{M}_{-\infty}^j, \mathcal{M}_{j+n}^{+\infty})$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

On considère la condition suivante:

(C) la suite $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est mélangeante et $\alpha^{-1}Q^2$ est intégrable sur $]0,1[$.

2.

a. Lorsque $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées avec X_0 de carré intégrable, montrer que (C) est satisfaite. Que vaut alors $\int_0^1 \alpha^{-1}(s)Q^2(s)ds$?

b. Quand $X_0 \in \mathbb{L}^r$ pour un réel $r \in]2,\infty[$ et lorsque la série $\sum n^{\frac{2}{r-2}}\alpha_n$ est convergente, montrer que (C) est réalisée (indication: établir l'identité $\int_0^1 (\alpha^{-1}(s))^{r/r-2}ds = \Sigma_{n\geq 0}(n+1)^{r/r-2}(\alpha_n - \alpha_{n+1})$).

c. Montrer qu'il en est de même lorsque la série $\sum \alpha_n$ est convergente et $X_0 \in \mathbb{L}^\infty$.

On suppose jusqu'à la fin du problème que la condition (C) est réalisée et on pose

$$I = \int_0^1 \alpha^{-1}(s)Q^2(s)ds \ .$$

3.

a. Montrer que X_0 est de carré intégrable.

b. Soit h une fonction numérique de variable réelle. Etablir les identités

$$\text{(i)} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h(\mathrm{cov}(X_i, X_j)) = \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n})h(\mathrm{cov}(X_0, X_k))$$

$$\text{(ii)} \qquad I = \sum_{k\geq 0}\int_0^{\alpha_k} Q^2(t)dt$$

c. Montrer que la série $\sum \alpha_n$ est convergente dès lors que X_0 est presque surement non nulle.

4.

a. Démontrer que la série $\sum \mathrm{cov}(X_0, X_k)$ est absolument convergente.

b. Etablir l'inégalité

$$\mathrm{var}(S_n) \leq 4nI, \ \forall n \geq 1.$$

c. Montrer que $\frac{1}{n}\mathrm{var}(S_n)$ converge vers $\mathrm{var}(X_0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{cov}(X_0, X_k)$.

Deuxième Partie

On note désormais σ^2 la somme de la série $\mathrm{var}(X_0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{cov}(X_0, X_k)$.

L'objectif de cette partie est de démontrer un théorème central limite. Plus précisément on a en vue d'établir que $S_n/\sqrt{n}$ converge vers la loi normale centrée et de variance σ^2 lorsque σ^2 est supposé non nul.

A

1. Quel est le comportement de $S_n/\sqrt{n}$ lorsque $\sigma = 0$?

Jusqu'à la fin du problème on suppose que σ est non nul.

2. Soit (ν_n) une suite de lois de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que la suite $\int x^2 d\nu_n(x)$ soit bornée. On suppose en outre que $\int(i\lambda - x)\exp(i\lambda x)d\nu_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout réel λ. Il s'agit de démontrer que ν_n converge faiblement vers la loi normale centrée réduite.

a. Montrer qu'il en est ainsi si l'on suppose que la suite (ν_n) converge faiblement vers une loi de probabilité ν (indication: étudier la fonction caractéristique de ν).

b. Conclure.

B

On suppose pour tout ce paragraphe que $X_0 \in \mathbb{L}^\infty$. Soit (m_n) une suite d'entiers tendant vers $+\infty$, telle que $2m_n \leq n$, pour tout n. On pose

$$D_n = \{(l,j) \in [1,n]\times[1,n] : |j-l| \leq m_n\},$$

puis, pour tout $j \in [1, n]$,

$$D_n(j) = \{l \in [1, n] : |j - l| \leq m_n\}.$$

Soit $V_n = \sum_{(l,j) \in D_n} \operatorname{cov}(X_j, X_l)$.

1. Démontrer que $\frac{V_n}{n}$ converge vers σ^2 lorsque n tend vers $+\infty$.

Jusqu'à la fin de ce paragraphe **B**, on suppose n assez grand pour que V_n soit positif et on pose pour tout $l \in \mathbb{Z}$ $Y_{l,n} = X_l/\sqrt{V_n}$. On définit ensuite, pour tout $j \in [1, n]$, $T_n(j) = \sum_{l \in D_n(j)} Y_{l,n}$ et $T_n = \sum_{l=1}^{n} Y_{l,n}$. On fixe enfin un réel λ.

2. Vérifier la validité de la décomposition suivante:

$$(i\lambda - T_n)e^{i\lambda T_n} = i\lambda e^{i\lambda T_n} A_n - e^{i\lambda T_n} B_n - C_n$$

où

$$A_n = (1 - \sum_{j=1}^{n} T_n(j) Y_{j,n}), \ B_n = \sum_{j=1}^{n} Y_{j,n}(1 - e^{-i\lambda T_n(j)} - i\lambda T_n(j))$$

$$C_n = \sum_{j=1}^{n} Y_{j,n} e^{i\lambda(T_n - T_n(j))}.$$

3.

a. Montrer que $|e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x| \leq \lambda^2 x^2/2$, pour tout réel x.

b. En déduire l'existence d'une constante positive K_1 telle que, pour tout n assez grand $E|B_n| \leq K_1 \frac{m_n}{\sqrt{n}}$.

c. Démontrer qu'il existe une constante positive K_2 telle que $|E(C_n)| \leq K_2 \sqrt{n} \alpha_{m_n}$, pour tout n assez grand.

4. Soit $m \in \mathbb{N}$, $(j, l, j', l') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $|j - l| \leq m$ et $|j' - l'| \leq m$.

a. Si $|j - j'| \geq 2m$, montrer que:

$$|\operatorname{cov}(X_j X_l, X_{j'} X_{l'})| \leq 4 \|X_0\|_\infty^4 \alpha_{|j-j'|-2m}.$$

b. Posant $k = \min(|j - j'|, |j - l|, |j - l'|)$, prouver que:

$$|\operatorname{cov}(X_j X_l, X_{j'} X_{l'})| \leq 8 \|X_0\|_\infty^4 \alpha_k.$$

5. Montrer que A_n est d'espérance nulle puis qu'il existe une constante positive K_3 telle que $E(A_n^2) \leq K_3 m_n^2/n$ pour tout n assez grand.

6. a. Démontrer que $m\alpha_m$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. En déduire l'existence d'une suite d'entiers (m_n) telle que $\sqrt{n}\alpha_{m_n}$ et $m_n/\sqrt{n}$ tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

b. En conclure que $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi normale centrée et réduite.

C

Le but de ce paragraphe est d'étendre le théorème central limite démontré en **B** du cas borné au cas général (c'est à dire sous la seule condition (C)).

Soit K un réel positif. On introduit

$$f_K(x) = x \text{ lorsque } |x| \leq K$$
$$= 0 \text{ lorsque } |x| > K.$$

On pose $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j$, $Z'_n(K) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} [f_K(X_j) - E(f_K(X_j))]$ et $Z''_n(K) = Z_n - Z'_n(K)$.

1. Etablir la majoration

$$E(Z''^2_n(K)) \leq \frac{4}{\sigma^2} \int_0^{H_{|X_0|}(K)} \alpha^{-1}(s) Q^2(s) ds.$$

2.

a. Prouver que la série $\sum \operatorname{cov}(f_K(X_0), f_K(X_k))$ est absolument convergente.

b. Soit $v_K = \operatorname{var}(f_K(X_0)) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{cov}(f_K(X_0), f_K(X_k))$. Montrer que v_K converge vers σ^2 lorsque K tend vers $+\infty$.

3. Conclure.

Rapport sur l'épreuve de Probabilités et Statistiques

Le problème visait à établir un théorème central limite pour des variables dépendantes démontré récemment par Doukhan, Massart et Rio. La preuve originale de ce théorème s'appuie sur un théorème d'approximation martingale de Gordin. La preuve alternative proposée dans ce sujet n'utilise que des notions qui sont au programme de l'Agrégation. La notion de dépendance étudiée ici est le mélange dit "fort", qui fut introduit par Rosenblatt. Dans les préliminaires et la première partie, on établit une inégalité de covariance due à Rio dont on étudie la signification en termes de moments sous des hypothèses de rapidité de mélange convenables. Dans la seconde partie on établit le théorème central limite d'Ibragimov pour des variables bornées dont les coefficients de mélange sont en série sommable. On utilise pour ce faire la méthode de Stein décrite en II.A. et mise en oeuvre dans II.B qui est la partie la plus technique du problème. Enfin on achève la preuve en appliquant une troncature dont les restes sont contrôlés à l'aide des inégalités de la première partie.

Les candidats ont, dans leur grande majorité, travaillé dans les préliminaires et la première partie. Les meilleurs ont traité II.A. et ont abordé II.B. sans toutefois attaquer les questions les plus difficiles.

Exception, un candidat a traité avec brio l'ensemble du problème, bravo!

Voici un relevé de quelques fautes graves rencontrées maleureusement fréquemment.

- considérer que la pseudo-inverse d'une fonction de queue de distribution H est une inverse au sens strict. En général "l'inversibilité" de H était "justifiée" par sa monotonie et sa continuité à droite.

- pour prouver I.A.3. certains utilisent et parfois "démontrent" l'inégalité:

$|\mathrm{cov}(X, Y)| \leq |\mathrm{cov}(|X|, |Y|)|$

- utiliser faussement la stationarité en considèrant que deux vecteurs aléatoires qui ont même loi de probabilité engendrent la même tribu

- étant donné U suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$, considèrer que puisque X a même loi que $Q_X(U)$ et Y a même loi que $Q_Y(U)$, "alors" le couple (X, Y) a même loi que le couple $(Q_X(U), Q_Y(U))$.

Enfin l'auteur regrette d'avoir laissé passer une coquille dans l'énoncé de I.B.4.b. où on demandait d'établir une borne en $4nI$ au lieu de $8nI$. Erreur heureusement sans conséquence, les candidats ayant soit oublié un facteur 2, pensant avoir démontré la borne demandée (ils n'ont bien entendu pas été pénalisés) soit rectifié d'eux mêmes et établi la borne correcte (ils ont été récompensés).

Corrigé de l'épreuve de Probabilités et Statistiques

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Préliminaires.

1.a. Soit (x_n) une suite décroissant vers x, alors $\lim \uparrow (X > x_n) = (X > x)$ donc $P(X > x_n)$ tend en croissant vers $P(X > x)$.

b. Par définition de Q_X, $x < Q_X(s)$ implique $H_X(x) > s$. Pour établir que $x \geq Q_X(s)$ implique $H_X(x) \geq s$, il suffit de vérifier que $H_X(Q_X(s)) \leq s$, car H_X est décroissante. Soit alors (x_n) une suite décroissant vers $Q_X(s)$ avec $H_X(x_n) \leq s$, la continuité à droite de H_X permet de conclure.

c. En utilisant b. on a

$$P(Q_X(U) > x) = P(U < H_X(x)) = H_X(x),$$

$Q_X(U)$ a par conséquent même fonction de queue de distribution et donc même loi que X.

d. $Q_{|X|}(U)$ a même loi que $|X|$.

2.a. On applique tout d'abord Fubini pour établir la formule, puis on note que d'une part:

$$P(X > x, X > y) \leq H_X(x) \wedge H_Y(y)$$

et d'autre part

$$H_X(x) \wedge H_Y(y) = \int_0^1 \mathbb{1}_{(s<H_X(x), s<H_Y(y))} ds$$

b. D'après a., 1.b. et Fubini à nouveau on tire

$$E|XY| \leq \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \int_0^1 \mathbb{1}_{(Q_{|X|}(s)>x)} \mathbb{1}_{(Q_{|Y|}(s)>y)} ds dx dy$$

$$\leq \int_0^1 Q_{|X|}(s) Q_{|Y|}(s) ds$$

3. $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ signifie l'indépendance de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On remarque par ailleurs que $P(A \cap B) - P(A)P(B) = \operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ et $\operatorname{var}(\mathbb{1}_A) = P(A)(1 - P(A)) \leq \frac{1}{4}$. L'inégalité voulue est alors une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Première Partie.

A.1.a. Cf. les préliminaires 2.b.

b. La définition du coefficient jointe au fait que, pour tout évènements A, B

$$-P(A) \leq P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq P(A)$$

permettent d'établir que

$$|P(X > x, Y > y) - P(X > x)P(Y > y)| \leq \min(\alpha, H_X(x), H_Y(y))$$

et on termine en notant que $\min(\alpha, H_X(x), H_Y(y)) = \int_0^\alpha \mathbb{1}_{(s<H_X(x), s<H_Y(y))} ds$.

2. D'après les préliminaires 2.a.

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} (P(X > x, Y > y) - P(X > x)P(Y > y))dxdy$$

d'où par 1.b.

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} (\int_0^\alpha \mathbb{1}_{(s<H_X(x),s<H_Y(y))}ds)dxdy$$

et l'inégalité s'en suit après application des préliminaires 1.b. et de Fubini.

3.

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq |\mathrm{cov}(X^+,Y^-)| + |\mathrm{cov}(X^-,Y^+)| + |\mathrm{cov}(X^+,Y^-)| + |\mathrm{cov}(X^-,Y^-)|$$

et 3. résulte de 2. en remarquant que Q_{X^+} et Q_{X^-} sont majorés par $Q_{|X|}$.

4.a. Se déduit de 3. en appliquant les préliminaires 1.d. et l'inégalité de Hölder.

b. On remarque que $\|X\|_\infty$ majore $Q_{|X|}$ et on utilise 3.

B.1.a. L'emboitement des tribus et les préliminaires 3. impliquent la décroissance de (α_n) donc de $\alpha(\cdot)$. Comme $\alpha_0 = 1$ et α_n tend vers 0, le domaine de définition de α^{-1} est $]0,1[$.

b. Soit $\mathcal{M}_i^j$ la tribu engendrée par $(X_i, X_{i+1}, \cdots, X_j)$. La stationarité assure que, pour tout entier m

$$\alpha(\mathcal{M}_{j-m}^j, \mathcal{M}_{j+n}^{j+m+n}) = \alpha(\mathcal{M}_{-m}^0, \mathcal{M}_n^{m+n}).$$

Mais le résultat de densité rappelé en 8. dans l'énoncé permet de garantir que pour tout k, $\alpha(\mathcal{M}_{k-m}^k, \mathcal{M}_{k+n}^{k+m+n})$ croit vers $\alpha(\mathcal{M}_{-\infty}^k, \mathcal{M}_{k+n}^\infty)$ lorsque m croit vers $+\infty$, ce qui entraine le résultat voulu en passant à la limite quand m tend vers $+\infty$ dans l'identité ci-dessus.

2.a. $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est mélangeante et $\alpha^{-1} \equiv 1$. D'où, en utilisant les préliminaires 1.d., $\int \alpha^{-1}Q^2 = \int Q^2 = E(X_0^2) < \infty$.

b. Notons que $(n^{2/r-2}\alpha_n)$ donc a fortiori (α_n) tend vers 0. De l'identité

$$\alpha^{-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)\mathbb{1}_{[\alpha_n,\alpha_{n+1}[}$$

on tire, en sommant de plus par partie:

$$\int_0^1 (\alpha^{-1}(s))^{r/r-2}ds = \sum_{n\geq 0}(n+1)^{r/r-2}(\alpha_n - \alpha_{n+1})$$

$$\leq \sum_{n\geq 0}(n+1)^{r/r-2} - n^{r/r-2}\alpha_n.$$

La série majorante est de même nature que la série de terme général $n^{2/r-2}\alpha_n$ qui est convergente. On en déduit que α^{-1} est de puissance $r/r-2$ intégrable. Or par hypothèse et les préliminaires 1.d., Q^2 est de puissance $r/2$ intégrable, l'inégalité de Hölder ($r/r-2$ et $r/2$ sont conjugués) garantit donc l'intégrabilité de $\alpha^{-1}Q^2$ et finalement entraine (C).

c. Ici encore α_n tend vers 0 est immédiat. De plus, procèdant comme en b.,

$$\int_0^1 \alpha^{-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leq \sum_{n\geq 0}\alpha_n,$$

mais $Q^2 \leq \|X_0\|^2$ donc (C) est satisfaite.

3.a. Comme $\alpha^{-1} \geq 1$, l'intégrabilité de $\alpha^{-1}Q^2$ entraine celle de Q^2 donc aussi celle de X_0^2 par les préliminaires 1.c.

b. On utilise la stationarité et le dénombrement

$$\mathrm{Card}\{(i,j)/1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, j-i=k\} = (n-|k|)^+$$

pour prouver (i). Enfin $I = \sum_{n\geq 0}(n+1)\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} Q^2$ et (ii) en découle en sommant par partie (noter que $\int_0^{\alpha_n} Q^2$ tend vers 0)

c. Q^2 est décroissante et X_0 est non dégénérée, donc Q^2 est minorée par une constante c strictement positive sur un intervalle non vide $]0, t_0[$, il s'en suit par application de (ii)

$$I \geq \sum_{k\geq 0} c(\alpha_k \wedge t_0)$$

donc la série de terme général α_n converge.

4.a. On applique A.3. puis (ii) et la finitude de I.

b.

$$\mathrm{var}(Sn) = \sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

de (i) appliqué avec $h(x) = |x|$, on tire

$$\mathrm{var}(S_n) \leq n\sum_{k=-n}^{n} |\mathrm{cov}(X_0, X_k)| \leq 2n\sum_{k=0}^{n} |\mathrm{cov}(X_0, X_k)|$$

qui par A.3. conduit via (ii) à $\mathrm{var}(S_n) \leq 8nI$

c. Utilisons à nouveau (i) avec cette fois $h(x) = x$, il vient

$$\frac{1}{n}\mathrm{var}(S_n) = \sum_{k=-n}^{n}(1 - \frac{|k|}{n})\mathrm{cov}(X_0, X_k)$$

or la famille $\{|\mathrm{cov}(X_0, X_k)|, k \in \mathbb{Z}\}$ est sommable donc $\frac{1}{n}\mathrm{var}(S_n)$ converge vers $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{cov}(X_0, X_k)$ par convergence dominée.

Deuxième Partie.

A.1. D'après la première partie B.4.c., $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ donc aussi en probabilité vers 0.

2.a. Notons φ_n la fonction caractéristique de ν_n et φ celle de ν. L'hypothèse se lit $\lambda\varphi_n(\lambda) + \varphi'_n(\lambda)$ tend vers 0. Il s'agit d'établir que φ est dérivable et que φ'_n converge simplement vers φ' ce qui permettra d'identifier φ via l'équation différentielle $\lambda\varphi(\lambda) + \varphi'(\lambda) = 0$. Soit C un majorant de la suite $\int x^2 d\nu_n(x)$ et, pour $K > 0$, g_K une fonction continue à support compact telle que $\mathbb{I}[-K, K] \leq g_K \leq 1$. Notons que C majore également $\int x^2 g_K(x) d\nu_n(x)$. Par ailleurs la convergence étroite de ν_n vers ν entraine que $\int x^2 g_K(x) d\nu_n(x)$ converge vers $\int x^2 g_K(x) d\nu(x)$ qui est donc majoré par C. De même $\int_{-K}^{K} x^2 d\nu(x) \leq \int x^2 g_K(x) d\nu(x) \leq C$, d'où comme K est arbitraire $\int x^2 d\nu(x) \leq C$. Donc d'une part φ est dérivable (par dérivation sous l'intégrale) et d'autre part, comme $1 - g_K(x) \leq \frac{|x|}{K}$, nous avons
$\int |x|(1 - g_K(x)) d(\nu + \nu_n)(x) \leq \frac{2C}{K}$, d'où

$$|\varphi'_n(\lambda) - \varphi'(\lambda)| \leq |\int g_K(x) x \exp(i\lambda x) d\nu_n(x) - \int g_K(x) x \exp(i\lambda x) d\nu(x)| + \frac{2C}{K}$$

et en utilisant la convergence étroite de ν_n vers ν

$$\operatorname{limsup} |\varphi'_n(\lambda) - \varphi'(\lambda)| \leq \frac{2C}{K}$$

qui implique la convergence de $\varphi'_n(\lambda)$ vers $\varphi'(\lambda)$. Alors, pour tout λ, $\lambda\varphi(\lambda) + \varphi'(\lambda) = 0$, donc $\varphi(\lambda) = c\exp(-\lambda^2)$. φ étant une fonction caractéristique, on en déduit que $c = 1$ donc ν est la loi normale centrée et réduite.

b. La bornitude de la suite $\int x^2 d\nu_n(x)$ assure, via l'inégalité de Markov, que la suite (ν_n) est compacte en loi. Mais d'après a., l'unique valeur d'adhérence pour cette suite est la loi normale centrée réduite, c'est donc la limite de (ν_n).

B.1. $\sigma^2 - \frac{V_n}{n} = 2\sum_{m_n < k}(1 \wedge (k/n))\operatorname{cov}(X_0, X_k)$ et on conclut par convergence dominée.

2. Immédiat

3.a. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

b. De 3.a. on tire

$$|B_n| \leq \frac{\lambda^2 \|X_0\|_\infty}{2\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} T_n^2(j)$$

or $\sqrt{n} T_n(j)$ a, par stationarité, même loi que S_{2m_n+1} ce qui, par I.B.4.b. implique, puisque $I \leq \|X_0\|_\infty^2 (\sum_k \alpha_k)$,

$$V_n E(T_n^2(j)) \leq 8(2m_n + 1)\|X_0\|_\infty^2 (\sum_k \alpha_k)$$

d'où $E|B_n| = \mathcal{O}(\frac{n m_n}{V_n^{3/2}})$ et 3.b. en découle via 1.

c. Remarquons préalablement que I.A:4.b. s'étend au cas où Y est à valeurs complexes, quitte à multiplier la constante par $\sqrt{2}$. Cherchons à majorer pour tout j, $\text{cov}(X_j, \exp[i\lambda(T_n - T_n(j)])$ à l'aide de cette inégalité. On a $\exp[i\lambda(T_n - T_n(j)] = U_j V_j$ avec

$$U_j = (\exp i\lambda \sum_{l<j-m_n} Y_l),\ V_j = \exp(i\lambda \sum_{j+m_n<l\leq n} Y_l)$$

alors, X_j étant centrée,

$$\text{cov}(X_j, U_j V_j) = \text{cov}(U_j, X_j V_j) + E(U_j)\text{cov}(X_j, V_j).$$

D'où, puisque $\|U_j\|_\infty = \|V_j\|_\infty = 1$ et $\|X_j\|_\infty = \|X_0\|_\infty$

$$|cov(X_j, U_j V_j)| \leq 8\sqrt{2}\alpha_{m_n}\|X_0\|_\infty$$

3.c. s'en suit via 1. car $E(C_n) = (\frac{1}{\sqrt{V_n}})\sum_{j=1}^n \text{cov}(X_j, U_j V_j)$.

4.a. Supposons $j > j'$, $X_j X_l$ est $\mathcal{M}_{j-m}^{\infty}$-mesurable et $X_{j'}X_{l'}$ est $\mathcal{M}_{-\infty}^{j'+m}$-mesurable, l'inégalitée souhaitée découle alors de I.A.4.b.

b. Trois cas sont à étudier, les autres s'en déduisant par symétrie par rapport à j et par permutation de j' et l', (supposons $k > 0$):

(i) $l < j$ et j',l' plus grands que j

(ii) l,j',l' plus grands que j

(iii) $j' < j$ et l',l plus grands que j

(i) se traite directement car $X_l X_j$ est $\mathcal{M}_{-\infty}^{j}$-mesurable et $X_{j'}X_{l'}$ est $\mathcal{M}_{j'\wedge l'}^{\infty}$-mesurable avec $j' \wedge l' - j \geq k$, donc par I.A.4.b.

$$|\text{cov}(X_j X_l, X_{j'}X_{l'})| \leq 4\|X_0\|_\infty^4 \alpha_k.$$

En vue de traiter (ii) et (iii), on écrit en profitant du centrage des X_i

$$|\text{cov}(X_j X_l, X_{j'}X_{l'})| \leq |E(X_j X_l X_{j'} X_{l'})| + |\text{cov}(X_j, X_l)|\|X_0\|_\infty^2.$$

Le second terme de cette majoration est majoré via I.A.4.b. par $4\alpha_k\|X_0\|_\infty^4$. Pour le premier terme, dans le cas (ii) on isole X_j et de l'dentité $\text{cov}(X_j, X_l X_{j'} X_{l'}) = E(X_j X_l X_{j'} X_{l'})$ jointe à I.A.4.b. on tire

$$|E(X_j X_l X_{j'} X_{l'})| \leq 4\alpha_k\|X_0\|_\infty^4.$$

Dans le cas (iii), on procède de même en isolant cette fois $X_{j'}$. Dans tous les cas on a bien établi la majoration demandée (le cas $k = 0$ étant trivial).

5.

$$V_n E(A_n) = V_n - \sum_{j=1}^{n} \sum_{l\in D_n(j)} \text{cov}(X_l, X_j)$$

on en déduit le centrage de A_n par définition de V_n. Donc

$$V_n^2 E(A_n^2) = \text{var}[\sum_{(l,j)\in D_n} X_l X_j] = \sum_{(l,j)\in D_n} \sum_{(l',j')\in D_n} \text{cov}(X_l X_j, X_{l'} X_{j'})$$

scindons cette dernière sommation en deux, en distinguant les indices tels que $|j - j'| \geq 2m_n$ (à partir desquels nous formons la somme s_1) de ceux pourlesquels $|j - j'| < 2m_n$ (à partir desquels nous formons la somme s_2).

Pour contrôler s_1, fixons tout d'abord un entier i et considèrons les indices pour lesquels $|j - j'| = 2m_n + i$. Compte tenu des contraintes $|j - l| \leq m_n$, $|l' - j'| \leq m_n$ et $1 \leq j \leq n$, le nombre de ces indices est au plus $2n \times (2m_n + 1)^2$. On obtient alors en appliquant 4.a.

$$|s_1| \leq 8n(2m_n + 1)^2 \|X_0\|_\infty^4 (\sum_{i\geq 0} \alpha_i)$$

d'où $\frac{|s_1|}{V_n^2} = \mathcal{O}(m_n^2/n)$.

Pour contrôler s_2, il s'agit de fixer un entier k, de dénombrer les indices satisfaisant aux contraintes $|j - l| \leq m_n$, $|l' - j'| \leq m_n$, $1 \leq j \leq n$, $|j - j'| < 2m_n$ et $\min(|j - j'|, |j - l|, |j - l'|) = k$ puis d'appliquer 4.b. Le cardinal de l'ensemble des indices satisfaisant aux contraintes est majoré par $6n(4m_n + 1)^2$. D'où

$$|s_2| \leq 48n(4m_n + 1)^2 \|X_0\|_\infty^4 (\sum_{k\geq 0} \alpha_k)$$

et finalement $E(A_n^2) = \mathcal{O}(m_n^2/n)$ via 1.

6.a. (α_m) est décroissante positive et sommable donc $m\alpha_m$ tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini. A présent comme $\frac{m}{\alpha_{m-1}}$ tend en croissant vers $+\infty$ et vaut 1 pour $m = 1$, on peut, pour tout entier non nul n, définir m_n tel que $n \in [\frac{m_n}{\alpha_{m_n-1}}, \frac{m_n+1}{\alpha_{m_n}}[$. Alors (m_n) est une suite croissante tendant vers l'infini. La définition de m_n implique

$$\sqrt{n}\alpha_{m_n} \leq [(m_n + 1)\alpha_{m_n}]^{1/2}$$

et

$$\frac{m_n}{\sqrt{n}} \leq [m_n \alpha_{m_n-1}]^{1/2}$$

et on conclut car $(k + 1)\alpha_k$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

6.b. On choisit (m_n) comme en 6.a. Les majorations précédentes entrainent alors que $E((i\lambda - T_n)\exp(i\lambda T_n))$ tend vers 0. On déduit de II.A.2. que T_n converge en loi vers la loi normale centrée réduite, ce qui en utilisant 1., suffit à prouver 6.b.

C.1. On procède comme en I.B.4. (où le centrage de X_0 n'était pas essentiel). Soit $\bar{Q}$ la fonction de quantile de $X_0 - f_K(X_0)$, on a:

$$|\text{cov}(X_0 - f_K(X_0), X_k - f_K(X_k)| \leq 4 \int_0^{\alpha_k} \bar{Q}^2$$

il s'en suit, comme en I.B.4.,

$$E(Z_n''^2(K)) = \frac{1}{n\sigma^2}\text{var}(\sum_{j=1}^{n} X_j - f_K(X_j)) \leq 8/\sigma^2 \sum_{k\geq 0} \int_0^{\alpha_k} \bar{Q}^2$$

mais $\bar{Q}(s) = Q(s)\mathbb{1}_{s<H_{|X_0|}(K)}$, d'où C.1. (ici comme en I.B.4.b. la constante correcte est 8 et non pas 4).

2.a. On applique I.A.3. en remarquant que $Q_{|f_K(X_0)|} \leq Q$, alors $|\text{cov}(f_K(X_0), f_K(X_k)|$ est majoré par $4\int_0^{\alpha_k} Q^2$ qui est le terme général d'une série convergente d'après I.B.3.b.(ii).

b. Pour chaque k, $\text{cov}(f_K(X_0), f_K(X_k)$ converge vers $\text{cov}(X_0, X_k)$ lorsque K tend vers l'infini. 2.a. permet donc d'affirmer que v_K converge vers σ^2 quand K tend vers l'infini (convergence dominée).

3. Soit t fixé dans $\mathbb{R}$. Soit $\varphi(x) = \exp(itx)$. Notons que φ est bornée par 1 et Lipschitzienne de rapport $|t|$. Soit G une v.a. suivant la loi normale centrée réduite. Alors $|E(\varphi(Z_n)) - E(\varphi(G))|$ est majoré par

$$|E(\varphi(Z'_n)) - E(\varphi(\sqrt{\frac{v_K}{\sigma^2}}G))| + |t|[(1 - \sqrt{\frac{v_K}{\sigma^2}})E|G| + E|Z''_n(K)|].$$

Pour chaque K, le premier terme de cette majoration tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini en vertu de B. Par ailleurs, v_K converge vers σ^2 et $E|Z''_n(K)|$ (qui est majoré par $[E(Z''^2_n(K))]^{1/2}$) tend vers 0 lorsque K tend vers l'infini uniformément par rapport à n grâce à 1. On en déduit que $E(\varphi(Z_n))$ converge vers $E(\varphi(G))$, ce qui achève la preuve.

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Le but de ce problème est de présenter une méthode permettant de tracer des droites sur un écran d'ordinateur.

I. Notations et définitions

Pour tout alphabet fini $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{A}^* = \cup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{A}^k$ l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$ et $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis sur $\mathcal{A}$ (par convention, $\mathcal{A}^0$ est le singleton formé du mot vide noté e). On appelle langage toute partie de $\mathcal{A}^*$. On rappelle que $\mathcal{A}^*$ muni de l'opération de concaténation est un monoïde dont l'élément neutre est constitué par le mot vide e.

Si $M = m_0 \dots m_k$ est un élément de $\mathcal{A}^{k+1} \subset \mathcal{A}^*$ on note $|M| = k+1$ la longueur du mot M et, pour tout élément $\mathbf{a}$ de $\mathcal{A}$, $|M|_{\mathbf{a}}$ le nombre d'apparitions de la lettre $\mathbf{a}$ dans le mot M : $|M|_{\mathbf{a}} =$ Card $\{n \leq k, m_n = \mathbf{a}\}$.

Définition. *Soit $u = u_0u_1 \dots u_n \dots$ un mot infini sur $\mathcal{A}$. On appelle facteur de u tout élément de $\mathcal{A}^*$ de la forme $u_k \dots u_{k+l}$, avec $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, ainsi que le mot vide e.*

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, définie par :

$$[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$$

et on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x, définie par $\{x\} = x - [x]$.

II. Algorithme de Christoffel

Soit α un nombre réel compris entre 0 et 1. L'algorithme de Christoffel consiste à approximer la droite $\mathcal{D}_\alpha$ d'origine 0 et de pente α par l'ensemble $\mathcal{C} = \{(n, [n\alpha]), n \in \mathbb{N}\}$. On code alors l'ensemble $\mathcal{C}$ par le mot infini $c = c_0c_1 \dots c_n \dots$ sur l'alphabet $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ défini par :

$$\begin{aligned} c_n &= \mathbf{a} \quad \text{si } [(n+1)\alpha] = [n\alpha] \\ c_n &= \mathbf{b} \quad \text{si } [(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 1 \end{aligned}$$

On dit que c est le mot de Christoffel associé à la droite $\mathcal{D}_\alpha$.

1) Soient p et q deux nombres entiers strictement positifs, premiers entre eux, et tels que $p < q$. Montrer que le mot de Christoffel associé à la droite $\mathcal{D}_{\frac{p}{q}}$ est périodique, et donner sa plus petite période.

2) Montrer que, dans tout mot de Christoffel, l'un des deux mots $\mathbf{aa}$ ou $\mathbf{bb}$ n'apparaît jamais; est-il possible qu'aucun des deux n'apparaisse?

3) On considère la transformation R_α définie sur $[0,1[$ par $R_\alpha(x) = \{x + \alpha\}$. On pose $I_{\mathbf{a}} = [0, 1-\alpha[$ et $I_{\mathbf{b}} = [1-\alpha, 1[$. Montrer que $c_n = \mathbf{a}$ si et seulement si $R_\alpha^n(0) \in I_{\mathbf{a}}$, et $c_n = \mathbf{b}$ si et seulement si $R_\alpha^n(0) \in I_{\mathbf{b}}$.

4) Soient M et M' deux facteurs de longueur n de c. Montrer que $||M|_{\mathbf{a}} - |M'|_{\mathbf{a}}| \leq 1$.

III. Mots sturmiens

Soit $u = u_0u_1 \dots u_n \dots$ un mot infini sur l'alphabet $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. On note $\mathcal{L}(u)$ le langage associé au mot infini u, c'est-à-dire l'ensemble des facteurs de u, et $\mathcal{L}_n(u)$ l'ensemble $\mathcal{L}(u) \cap \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^n$ des facteurs de u de longueur n.

Définition. *On appelle complexité du mot u la suite $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}} = (\text{Card } \mathcal{L}_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$.*

1) Montrer que la suite $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2) Montrer que, pour tout couple d'entiers (n_1, n_2), on a $P_u(n_1 + n_2) \leq P_u(n_1)P_u(n_2)$.
3) Montrer que, s'il existe au moins un nombre entier n_0 tel que $P_u(n_0) < 2^{n_0}$, alors $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}P_u(n) = 0$.

Définition. *On dit que le mot infini u est périodique de période p si l'on a $u_{i+p} = u_i$ pour tout nombre entier i. On dit que le mot u est ultimement périodique de période p s'il existe un nombre entier i_0 tel que l'on ait $u_{i+p} = u_i$ pour tout nombre entier i supérieur ou égal à i_0.*

4) Montrer que si le mot u est ultimement périodique, alors la suite $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
5) Montrer que, s'il existe un nombre entier n_0 tel que $P_u(n_0) = P_u(n_0 + 1)$, alors le mot u est ultimement périodique de période inférieure ou égale à $P_u(n_0)$.
6) Montrer que si u est un mot non ultimement périodique, alors pour tout nombre entier n, $P_u(n) \geq n + 1$.

Définition. *On dit que le mot infini u est sturmien si, pour tout nombre entier n, $P_u(n) = n + 1$.*

7) Montrer que dans un mot sturmien, tout facteur qui apparaît, apparaît une infinité de fois.
8)Le but de cette question est de montrer que, si le mot u est un mot infini non ultimement périodique tel que tout couple (U, V) de facteurs de u de même longueur vérifie $||U|_\mathbf{a} - |V|_\mathbf{a}| \leq 1$, alors u est un mot sturmien.

Soit u un mot non ultimement périodique et non sturmien. Soit n_0 le plus petit nombre entier tel que $P_u(n_0 + 1) \geq n_0 + 3$. Montrer qu'il existe deux mots distincts U et V de longueur n_0 tels que $U\mathbf{a}$, $U\mathbf{b}$, $V\mathbf{a}$, $V\mathbf{b}$ appartiennent à $\mathcal{L}(u)$. En déduire que $\mathcal{L}(u)$ contient deux mots U' et V' tels que $|U'|_\mathbf{a} - |V'|_\mathbf{a} \geq 2$.
9) Le but de cette question est de montrer que si u est un mot sturmien, tout couple (U, V) de facteurs de u de même longueur vérifie $||U|_\mathbf{a} - |V|_\mathbf{a}| \leq 1$.

On suppose dans cette question que $\mathcal{L}(u)$ contient deux mots U et V de même longueur tels que $|U|_\mathbf{a} - |V|_\mathbf{a} \geq 2$.

a) montrer que $\mathcal{L}(u)$ contient deux mots U' et V' de même longueur qui vérifient $|U'|_\mathbf{a} - |V'|_\mathbf{a} = 2$.
b) Montrer que dans ce cas on peut supposer, quitte à prendre des mots plus courts, qu'il existe un mot W (éventuellement vide) tel que $U' = \mathbf{a}W\mathbf{a}$ et $V' = \mathbf{b}W\mathbf{b}$.
c) Soit W un mot de longueur minimale satisfaisant à la condition précédente. Montrer que W est un palindrome (c'est-à-dire que, si $W = w_0w_1 \dots w_n \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^{n+1}$, on a $w_i = w_{n-i}$, pour tout nombre entier i compris entre 0 et n).
d) En déduire que le mot u n'est pas sturmien.

On a montré :

Théorème. *Soit u un mot infini non ultimement périodique sur l'alphabet $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. u est sturmien si et seulement si tout couple (U, V) de facteurs de u de même longueur vérifie $||U|_\mathbf{a} - |V|_\mathbf{a}| \leq 1$.*

10) Montrer que pour tout nombre irrationnel α, le mot de Christoffel associé à la droite $\mathcal{D}_\alpha$ est sturmien.

IV. Suite de Fibonacci

On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour tout nombre entier $n \geq 1$.
1) Calculer, pour tout nombre entier n, F_n en fonction de n.
2) Déterminer une progression arithmétique $\{an + b, n \in \mathbb{N}\}$ (avec $PGCD(a, b) = 1$) dont aucun terme n'appartient à la suite de Fibonacci.
3) Montrer que tout nombre entier n s'écrit de manière unique sous la forme $n = \sum_{i\geq 0} n_i F_i$ avec $n_i \in \{0, 1\}$ et $n_i n_{i+1} = 0$ pour tout nombre entier $i \geq 0$.

En posant $k = \sup\{i \in \mathbb{N}, n_i = 1\}$, on dit que $n_k n_{k-1} \dots n_0 \in \{0, 1\}^{k+1}$ est l'écriture du nombre entier non nul n en base de Fibonacci, et on note $n_k n_{k-1} \dots n_0 = Fib(n)$. Par convention, on pose $0 = Fib(0)$.
4) Ecrire un programme Pascal donnant l'écriture de tout nombre entier en base de Fibonacci.
5) Le but de cette question est de caractériser l'ensemble des nombres entiers dont l'écriture en base de Fibonacci se termine par un 0.

a) On pose $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et on définit $E_0 = \{[n\phi] - 1, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ et $E_1 = \{[n\phi^2] - 1, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Montrer que $E_0 \cap E_1$ est l'ensemble vide.

b) Montrer que E_0 (resp. E_1) est égal à l'ensemble des nombres entiers n tels que le mot $Fib(n)$ se termine par 0 (resp. 1).

6) Le but de cette question est d'estimer le nombre moyen de 1 dans l'écriture des nombres entiers en base de Fibonacci.

a) Pour tout nombre entier n, calculer $\sum_{k<F_n} |Fib(k)|_1$ en fonction de n.

b) Donner un équivalent de $\sum_{k<N} |Fib(k)|_1$ lorsque N tend vers l'infini.

V. Mot de Fibonacci

Soit $A = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, et $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeur dans A^* définie par $\Phi_0 = \mathbf{a}$, $\Phi_1 = \mathbf{ab}$, et $\Phi_{n+1} = \Phi_n \Phi_{n-1}$ pour tout nombre entier supérieur ou égal à 1.
1) Soit d l'application définie sur $A^\mathbb{N} \times A^\mathbb{N}$ par :

$$d(u, u') = e^{-\inf\{n\in\mathbb{N}, u_n \neq u'_n\}}$$

si $u \neq u'$ et $u = u_0 u_1 \dots u_n \dots$, $u' = u'_0 u'_1 \dots u'_n \dots$, et

$$d(u, u') = 0$$

si $u = u'$.

Montrer que $(A^{\mathbb{N}}, d)$ est un espace métrique compact.

2) Soit σ le morphisme de A^* défini par :

$$\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{ab} \qquad \sigma(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$$
$$\sigma(m) = \sigma(m_0)\sigma(m_1)\ldots\sigma(m_n) \qquad \text{pour tout mot } m = m_0m_1\ldots m_n \in A^*$$

On prolonge σ à $A^{\mathbb{N}}$ par concaténation en posant pour tout mot infini $u = u_0u_1\ldots u_n\ldots$ de $A^{\mathbb{N}}$, $\sigma(u) = \sigma(u_0)\sigma(u_1)\ldots\sigma(u_n)\ldots$.

Montrer que σ admet un unique point fixe sur $A^{\mathbb{N}}$, que l'on notera $\lambda = \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_n\ldots$.

3) Montrer que la suite $(\Phi_n\mathbf{aa}\ldots\mathbf{a}\ldots)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(A^{\mathbb{N}}, d)$ vers λ.

4) Pour tout nombre entier n, on pose $f_{\mathbf{a}}(n) = \frac{1}{n+1}|\lambda_0\ldots\lambda_n|_{\mathbf{a}}$. Montrer que la suite $(f_{\mathbf{a}}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

5) Soit $\mathbb{N}_{\mathbf{a}} = \{n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbf{a}\}$. Montrer que $\mathbb{N}_{\mathbf{a}} = \left\{\left[n.\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] - 1, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$.

VI. Décomposition canonique des systèmes sturmiens

Dans toute la suite, on note S l'application (*décalage*) définie sur les mots infinis à valeur dans $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ par $S(u_0u_1\ldots u_n\ldots) = u_1u_2\ldots u_{n+1}\ldots$.

A) Mots biprolongeables d'un système sturmien.

1) Soit u un mot sturmien et soit Ω l'adhérence dans $A^{\mathbb{N}}$ de $\{S^n(u), n \in \mathbb{N}\}$ (pour la topologie définie par la métrique d, définie à la question V.1.); montrer que Ω est l'ensemble des mots infinis dont le langage est contenu dans $\mathcal{L}(u)$, et que c'est un ensemble fermé invariant par S.

2) Montrer que, pour tout $x \in \Omega$, il existe au moins un élément y de Ω tel que $Sy = x$.

3) Montrer qu'il existe exactement un élément $u \in \Omega$ tel que u soit l'image par décalage de deux éléments de Ω.

4) Montrer que, si u est l'unique élément de Ω prolongeable à gauche de deux façons, alors $\mathbf{ab}u$ et $\mathbf{ba}u$ sont dans Ω.

B) Codage d'un système sturmien.

On note $\sigma_{\mathbf{a}}$ (resp.$\sigma_{\mathbf{b}}$) le morphisme défini par $\sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ et $\sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{ba}$ (resp. $\sigma_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \mathbf{ab}$ et $\sigma_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$).

5) Montrer que, si Ω est le système engendré par un mot sturmien u, et si $\mathbf{bb}$ n'appartient pas au langage associé $\mathcal{L}(u)$, alors tout élément de Ω peut s'écrire $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$, où y est un mot infini sur l'alphabet $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

6) Montrer que, si y est un mot infini tel que Sy ne soit pas sturmien, alors $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$ n'est pas sturmien.

7) Montrer que, si le langage de $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$ est inclus dans le langage de $\sigma_{\mathbf{a}}(y')$, alors le langage de Sy est inclus dans le langage de Sy'.

8) Montrer qu'à tout système Ω engendré par un mot sturmien, on peut faire correspondre un système Ω', engendré par un mot sturmien, et un morphisme σ égal à $\sigma_{\mathbf{a}}$ ou $\sigma_{\mathbf{b}}$, tels que pour tout $y \in \Omega$, il existe un unique y' tel que $\sigma(y') = y$ et $Sy' \in \Omega'$.

9) Montrer que, si u est l'unique élément biprolongeable à gauche de Ω, et si u' est l'unique élément biprolongeable à gauche de Ω', alors $\mathbf{ab}u = \sigma(\mathbf{ab}u')$ et $\mathbf{ba}u = \sigma(\mathbf{ba}u')$.

10) Montrer que, si u est ultimement périodique de période $p > 1$, alors u' est de période $p' < p$. Montrer qu'un mot sturmien ne peut pas contenir de plages arbitrairement longues de $\mathbf{a}$ ou de $\mathbf{b}$. En déduire que u ne peut donc pas être périodique, et que son orbite est dense dans Ω.
11) Montrer qu'à tout système Ω engendré par un mot sturmien, on peut associer une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres entiers strictement positifs tels que $\sigma_{\mathbf{a}}^{a_1-1}\sigma_{\mathbf{b}}^{a_2}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_3}\ldots\sigma_{\mathbf{b}}^{a_{2n}}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_{2n+1}}(a)$ est un préfixe de $\mathbf{ab}u$, et $\sigma_{\mathbf{a}}^{a_1-1}\sigma_{\mathbf{b}}^{a_2}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_3}\ldots\sigma_{\mathbf{b}}^{a_{2n}}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_{2n+1}}(b)$ est un préfixe de $\mathbf{ba}u$.

VII. Mots sturmiens et rotations

Le but de cette partie est de montrer que tous les mots sturmiens sont obtenus par codage de l'orbite d'un point pour une rotation irrationnelle, de façon analogue aux mots de Christoffel.

A) Unicité de la rotation associée à un système sturmien.

Dans les questions qui suivent, on montre que si, dans un système sturmien, il existe un mot infini engendré (au sens donné ci-dessous) par une rotation R_α, alors tous les mots infinis de ce système sont engendrés par la même rotation.

Soit α un nombre irrationnel et R_α la rotation

$$R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad x \mapsto x + \alpha \mod \mathbb{Z}$$

On note comme dans la partie II $I_{\mathbf{a}} = [0, 1-\alpha[$ et $I_{\mathbf{b}} = [1-\alpha, 1[$ la partition du domaine fondamental $[0,1[$ de $\mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Z}$. On note f^I l'application qui à x associe $\mathbf{a}$ si $x \in I_{\mathbf{a}}$, et $\mathbf{b}$ si $x \in I_{\mathbf{b}}$, et on note N^I l'application qui à x associe le mot infini $N^I(x) = f^I(x)f^I(R_\alpha(x))\ldots f^I(R_\alpha^n(x))\ldots$.

De même, on note $J_{\mathbf{a}} =]0, 1-\alpha]$ et $J_{\mathbf{b}} =]1-\alpha, 1]$ la partition du domaine fondamental $]0,1]$ de $\mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Z}$. On note f^J l'application qui à x associe $\mathbf{a}$ si $x \in J_{\mathbf{a}}$, et $\mathbf{b}$ si $x \in J_{\mathbf{b}}$, et on note N^J l'application qui à x associe le mot infini $N^J(x) = f^J(x)f^J(R_\alpha(x))\ldots f^J(R_\alpha^n(x))\ldots$.
1) Déterminer l'ensemble des points x tels que $N^I(x) \neq N^J(x)$. Montrer que même si $N^I(x) \neq N^J(x)$, les langages associés aux deux mots infinis sont les mêmes.
2) Montrer que l'application N^I est continue à droite, et que l'application N^J est continue à gauche.

Définition. *On dit qu'un mot infini u est engendré par une rotation d'angle α si u est de la forme $N^I(x)$ ou $N^J(x)$, pour un certain nombre réel x.*

3) Soit u un mot sturmien, v un élément du système Ω associé. Montrer que si u est engendré par une rotation, alors v est engendré par la même rotation.

B) Existence de la rotation associée à un système sturmien.

4) On considère une rotation R_α, avec $\alpha > \frac{1}{2}$. Soit I' l'intervalle $[0, \alpha[$ et $R_{\alpha|I'}$ l'application de I' dans I' définie par $R_{\alpha|I'}(x) = R_\alpha^{n(x)}(x)$, où $n(x)$ est le plus petit nombre entier non nul n tel que $R_\alpha^n(x) \in I'$. On dit que $R_{\alpha|I'}$ est l'application *induite* de R_α sur l'intervalle I'.

Montrer qu'il existe une homothétie h telle que $h \circ R_{\alpha|I'} \circ h^{-1}$ soit une rotation sur l'intervalle $[0,1[$ dont on calculera l'angle en fonction de α.

5) On pose $I'_{\mathbf{a}} = I_{\mathbf{a}} \cap I'$ et $I'_{\mathbf{b}} = I_{\mathbf{b}} \cap I'$. Avec des notations analogues à celles de la partie précédente, on définit l'application $f^{I'}$ sur I' par $f^{I'}(x) = \mathbf{a}$ (resp. $\mathbf{b}$) si $x \in I'_{\mathbf{a}}$ (resp. $I'_{\mathbf{b}}$), et l'application $N^{I'}$ qui associe le mot infini $f^{I'}(x)f^{I'}(R_{\alpha|I'}(x))\dots f^{I'}(R^n_{\alpha|I'}(x))\dots$ au point x de I'. Pour tout point x de I', exprimer $N^I(x)$ en fonction de $N^{I'}(x)$.
6) Que deviennent les résultats précédents lorsque $\alpha < \frac{1}{2}$? (indication : on pourra considérer l'intervalle $I'' = [\alpha, 1[$)
7) On rappelle que pour tout nombre α irrationnel de $[0,1[$ il existe une unique suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

On dit que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est le *développement en fraction continue* de α.

Montrer que $\sigma_{\mathbf{a}}^{a_1-1}\sigma_{\mathbf{b}}^{a_2}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_3}\dots\sigma_{\mathbf{b}}^{a_{2n}}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_{2n+1}}(a)$ est un préfixe du mot infini $N^J(1-\alpha)$, et que $\sigma_{\mathbf{a}}^{a_1-1}\sigma_{\mathbf{b}}^{a_2}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_3}\dots\sigma_{\mathbf{b}}^{a_{2n}}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_{2n+1}}(b)$ est un préfixe du mot infini $N^I(1-\alpha)$.
8) On rappelle que, réciproquement, toute suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\geq 1}$, est le développement en fraction continue d'un unique nombre irrationnel α de $[0,1[$. Montrer que tout mot sturmien est engendré par une rotation.

On a montré :

Théorème. *Un mot infini u sur $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ est sturmien si et seulement si il est engendré par une rotation irrationnelle.*

C) Applications.

9) Donner un algorithme permettant de calculer les n premières lettres du mot infini $N^J(1-\alpha)$, et une majoration pour son temps de calcul.
10) On pose $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; calculer le développement en fraction continue de α, en déduire le mot infini $N^J(1-\alpha)$.
11) Quel est le rapport entre ce mot infini et le mot de Fibonacci étudié dans la partie V?

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE
CORRIGÉ

L'objet de ce problème est de présenter la notion de mot sturmien, liée à l'étude des algorithmes permmettant de tracer des droites sur un écran d'ordinateur.

Il présente en particulier 3 façons différentes de définir les mots sturmiens. Une première définition, issue de la théorie des systèmes dynamiques, consiste à appeler mot sturmien tout mot infini non périodique sur l'alphabet $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ dont la "complexité" (en un sens à préciser) est minimale. Une seconde définition, de nature plus combinatoire, consiste à dire que lorsqu'on déplace une fenêtre de longueur fixée le long de ce mot, on observe toujours, à 1 près, le même nombre de **a** et de **b**. Enfin une troisième définition, de nature géométrique, consiste à voir un tel mot comme le codage d'une trajectoire de pente irrationnelle dans un billard carré.

L'équivalence de ces trois définition fait partie du folklore du sujet (voir les références données à la fin du texte); l'un des objectifs de ce problème est de donner une démonstration complète de cette équivalence. Les techniques utilisées concernent la combinatoire, la théorie des nombres, l'algorithmique et la topologie.

II. Algorithme de Christoffel

1) Si $\alpha = p/q$, on vérifie que $[(n+q)\alpha] = [n\alpha] + p$, donc $[(n+q+1)\alpha] - [(n+q)\alpha] = [(n+1)\alpha] - [n\alpha]$ et le mot de Christoffel associé est de période q. Montrons que c'est la plus petite période : si l'on note b_n le nombre de $\mathbf{b}$ parmi $c_0, \dots, c_{n-1}$, on a $b_n = [n\alpha]$, donc $\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n/n$. Si q' est la plus petite période du mot de Christoffel, et p' le nombre de $\mathbf{b}$ sur une période, on a donc $\alpha = p'/q'$, puisque $b_{nq'} = np'$; comme q' divise q puisque c'est la plus petite période, on a $q' = q$, sinon p/q ne serait pas irréductible.
2) Si $\alpha \leq 1/2$, on a $[(n+2)\alpha] \leq (n+2)\alpha \leq n\alpha + 1 < [n\alpha] + 2$, et donc on ne peut dans ce cas avoir 2 **b** de suite. De même, si $\alpha \geq 1/2$, on a $[(n+2)\alpha] \geq [n\alpha] + 1$, et on ne peut alors avoir deux **a** de suite; si aucun des deux mots n'apparaît, le mot ne peut être que **ababab**..., qui correspond à $\alpha = 1/2$.
3) On a $R_\alpha^n(0) = \{n\alpha\}$; or $(n+1)\alpha = [n\alpha] + \{n\alpha\} + \alpha$, ce qui montre que $c_n = \mathbf{a}$ si $\{n\alpha\} + \alpha < 1$, soit $R_\alpha^n(0) \in I_\mathbf{a}$, et $c_n = \mathbf{b}$ si $R_\alpha^n(0) \in I_\mathbf{b}$.
4) Si $M = c_k \dots c_{k+n-1}$ et $M' = c_j \dots c_{j+n-1}$, on a $|M|_\mathbf{b} = [(k+n)\alpha] - [k\alpha] = n\alpha + \{k\alpha\} - \{(k+n)\alpha\}$, et $|M'|_\mathbf{b} = [(j+n)\alpha] - [j\alpha] = n\alpha + \{j\alpha\} - \{(j+n)\alpha\}$. Donc la différence $|M|_\mathbf{b} - |M'|_\mathbf{b}$ est égale à $\{k\alpha\} - \{(k+n)\alpha\} - \{j\alpha\} + \{(j+n)\alpha\}$; puisque chacun de ces termes est positif et strictement inférieur à 1, on a $-2 < |M|_\mathbf{b} - |M'|_\mathbf{b} < 2$, donc, puisqu'il s'agit d'un entier, $||M|_\mathbf{b} - |M'|_\mathbf{b}| \leq 1$. Or on a $|M| = |M|_\mathbf{a} + |M|_\mathbf{b}$, d'où la même inégalité pour $|M|_\mathbf{a}$.

III. Mots sturmiens

1) Il est clair que tout facteur de longueur n du mot infini u est le début d'un facteur de longueur $n+1$; autrement dit, l'application qui, à un facteur de longueur $n+1$, associe son préfixe de longueur n est une application surjective de $\mathcal{L}_{n+1}(u)$ sur $\mathcal{L}_n(u)$, donc la suite $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Remarquons que le prolongement d'un mot de longueur n n'est en général pas unique, et qu'il faut donc prendre des précautions pour définir

une application de $\mathcal{L}_n(u)$ dans $\mathcal{L}_{n+1}(u)$ (par exemple considérer la première occurence du facteur considéré, et le prolongement qui s'en déduit).

2) Tout facteur de longueur n_1+n_2 est produit de concaténation d'un facteur de longueur n_1 et d'un facteur de longueur n_2; l'application qui, à un facteur de longueur n_1+n_2, associe le couple formé par son préfixe de longueur n_1 et son suffixe de longueur n_2 envoie donc le langage $\mathcal{L}_{n_1+n_2}(u)$ dans le produit $\mathcal{L}_{n_1}(u) \times \mathcal{L}_{n_2}(u)$ et est évidemment injective; d'où $P_u(n_1+n_2) \leq P_u(n_1)P_u(n_2)$.

3) Supposons que $P_u(n_0) < 2^{n_0}$. Pour n quelconque, posons $n = qn_0 + r$; la question précédente montre que l'on a $P_u(n) \leq P_u(n_0)^q P_u(r) \leq P_u(n_0)^q 2^r$, car on a bien sûr toujours, pour un alphabet à 2 lettres, $P_u(r) \leq 2^r$. Il suit que $2^{-n}P_u(n) \leq (P_u(n_0)/2^{n_0})^q$, et donc $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}P_u(n) = 0$.

4) Si le mot est périodique de période p à partir de l'indice i_0, alors, par définition, pour tout n entier et pour tout $k \geq i_0+p$, le facteur $u_k \dots u_{k+n-1}$ est égal à $u_{k-p} \dots u_{k-p+n-1}$, et par récurrence à un facteur $u_{k'} \dots u_{k'+n-1}$ avec $k' < i_0+p$; ce qui montre que la suite $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par i_0+p.

5) Supposons qu'il existe un nombre entier n_0 tel que $P_u(n_0) = P_u(n_0+1)$. Alors l'application qui, à un facteur de longueur n_0+1, associe son préfixe de longueur n_0 est une bijection entre $\mathcal{L}_{n_0+1}(u)$ et $\mathcal{L}_{n_0}(u)$; autrement dit, tout facteur de longeur n_0 se prolonge de façon unique en un facteur de longueur n_0+1. Soit F l'application qui, à un facteur de longueur n_0, associe le suffixe de longueur n_0 de l'unique facteur de longueur n_0+1 qui le prolonge; c'est une application de $\mathcal{L}_{n_0}(u)$ dans lui même. Si l'on pose $M_i = u_i \dots u_{i+n_0-1}$, on a par définition $M_{i+1} = F(M_i)$, et plus généralement $M_{i+k} = F^k(M_i)$. Les mots M_i, pour $0 \leq i \leq P_u(n_0)$ ne peuvent être tous distincts; il existe donc deux entiers $0 \leq a < b \leq P_u(n_0)$ tels que $M_a = M_b$; on en déduit que, pour $i \geq a$, on a $M_{i+(b-a)} = M_i$, et en particulier $u_{i+(b-a)} = u_i$; donc le mot u est ultimement périodique, de période $(b-a) \leq P_u(n_0)$.

6) On déduit des questions précédentes que, si le mot n'est pas ultimement périodique, la complexité est strictement croissante. Comme on a $P_u(1) = 2$, puisqu'il y a deux lettres qui doivent apparaître toutes les deux (la suite **aaa**... est périodique), on doit avoir $P_u(n) \geq n+1$ pour tout entier n.

7) Soit u un mot sturmien possédant un facteur M de longueur n_0 qui n'apparaît qu'un nombre fini de fois, et soit i_0 le rang de dernière apparition. Le mot infini $v = u_{i_0+1}u_{i_0+2}\dots$ ne contient pas le facteur M, et tous ses facteurs sont des facteurs du mot u; puisque u est sturmien, on en déduit que $P_v(n_0) \leq n_0$; donc v est ultimement périodique, et donc u aussi, ce qui est contradictoire.

8) Soit u un mot non ultimement périodique et non sturmien. Soit n_0 le plus petit nombre entier tel que $P_u(n_0+1) \geq n_0+3$. Remarquons d'abord que, puisque $P_u(0) = 1$ et $P_u(1) = 2$, on a $n_0 \geq 1$. Puisqu'il y a n_0+1 facteurs de longueur n_0, par définition de n_0, et au moins n_0+3 facteurs de longueur n_0+1, et qu'un facteur de longueur n_0 se prolonge d'au moins une façon et d'au plus de deux façons, il existe au moins 2 facteurs U et V de longueur n_0 qui se prolongent de deux façons, c'est-à-dire deux mots U, V de longueur n_0 tels que les 4 mots $U\mathbf{a}$, $U\mathbf{b}$, $V\mathbf{a}$, $V\mathbf{b}$ appartiennent à $\mathcal{L}(u)$.

Montrons que, par définition de n_0, U et V ont même suffixe de longueur n_0-1; en effet, sinon, il y aurait deux facteurs de longueur n_0-1 qui se prolongent de deux façons différentes, et on aurait donc $P_u(n_0-1) \leq P_u(n_0) - 2 \leq n_0 - 1$, ce qui contredit le résultat de la question 6.

On peut donc écrire, en échangeant au besoin U et V, $U = \mathbf{a}M$ et $V = \mathbf{b}M$, où M est un facteur de u de longueur n_0-1. En posant $U' = U\mathbf{a}$ et $V' = V\mathbf{b}$, on voit que $\mathcal{L}_u$ contient deux mots de même longueur qui vérifient $|U'|_\mathbf{a} - |V'|_\mathbf{a} = 2$.

9) On suppose dans cette question que $\mathcal{L}(u)$ contient deux mots U et V de même longueur tels que $|U|_{\mathbf{a}} - |V|_{\mathbf{a}} \geq 2$.
a) Notons U_i (resp. V_i) le préfixe de longueur i de U (resp. V), et posons $n = |V|$. Si l'on note d_i la différence $|U_i|_{\mathbf{a}} - |V_i|_{\mathbf{a}}$, il est clair que $d_0 = 0$, que deux termes consécutifs de la suite varient au plus de 1 (d_i est égal à d_{i+1} si U_{i+1} et V_{i+1} finissent par la même lettre, il y a une variation de 1 sinon), et que par hypothèse $d_n \geq 2$; donc il existe $k \leq n$ tel que $d_k = 2$; U_k et V_k sont les deux mots U' et V' cherchés.

on a utilisé le "lemme des valeurs intermédiaires" suivant:

Lemme. *soit $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs entières, vérifiant $|d_{i+1} - d_i| \leq 1$, et telle que $d_0 = a$ et $d_n = b \geq a$; alors, pour tout entier c tel que $a \leq c \leq b$, il existe un entier i compris entre 0 et n tel que $d_i = c$.*

Preuve : on peut supposer $c > a$, sinon on prend $i = 0$. Soit $A = \{i \in \{0, 1, \ldots, n\} | d_j < c\}$; A est fini, et non vide puisqu'il contient 0. Donc A possède un plus grand élément $j < n$. On doit avoir par définition $d_j < c \leq d_{j+1}$; puisque d_j et d_{j+1} sont deux entiers qui diffèrent au plus de 1, on a donc $d_{j+1} = c$.
b) On peut supposer que les mots U' et V' trouvés à la question précédente sont minimaux avec cette propriété; alors U' doit commencer par $\mathbf{a}$ et V' par $\mathbf{b}$, car sinon, soit ils commencent par la même lettre et on peut supprimer cette première lettre, soit on peut écrire $U' = \mathbf{b}U''$ et $V' = \mathbf{a}V''$, donc $|U''|_{\mathbf{a}} - |V''|_{\mathbf{a}} = 3$, et la question précédente montre que le couple (U', V') n'est pas minimal. De même U' finit par $\mathbf{a}$ et V' par $\mathbf{b}$. Si l'on définit la suite d'_i comme dans la question précédente, avec $m = |U'| = |V'|$, on voit que l'on a $d'_1 = 1$ et $d'_m = 2$. S'il existe $1 < k < m$ tel que $d_k = 2$, les préfixes de longueur k de U' et V' répondent encore à l'hypothèse, ce qui contredit la minimalité; de même si $d_k = 0$, on peut considérer les suffixes de longueur $m - k$. On doit donc avoir $d_k = 1 = d_{k-1}$ si $1 < k < m$: ce qui prouve, comme on l'a vu à la question précédente, que U' et V' ont même lettre de rang k. Autrement dit, il existe un mot W tel que $U' = \mathbf{a}W\mathbf{a}$ et $V' = \mathbf{b}W\mathbf{b}$.
c) Soit W un mot de longueur minimale satisfaisant à la condition précédente. Si W est de longueur 0 ou 1, il n'y a rien à prouver. On suppose donc que $W = w_0 \ldots w_n$, avec $n \geq 1$. Par hypothèse, les mots $\mathbf{a}w_0 \ldots w_n\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}w_0 \ldots w_n\mathbf{b}$ appartiennent à $\mathcal{L}(u)$. Supposons w_0 et w_n distincts, par exemple $w_0 = \mathbf{a}$ et $w_n = \mathbf{b}$; alors $\mathcal{L}(u)$ contient $\mathbf{aa}$ et $\mathbf{bb}$, et W n'est pas minimal. Supposons démontrées les égalités $w_k = w_{n-k}$, pour $0 \leq k < i$. Si w_i est différent de w_{n-i}, par exemple $w_i = \mathbf{a}$ et $w_{n-i} = \mathbf{b}$, le langage $\mathcal{L}(u)$ contient les mots $U'' = \mathbf{a}w_0w_1 \ldots w_{i-1}\mathbf{a}$ et $V'' = \mathbf{b}w_{n-i+1} \ldots w_{n-1}w_n\mathbf{b}$. Or les mots $w_0w_1 \ldots w_{i-1}$ et $w_{n-i+1} \ldots w_{n-1}w_n$ sont miroirs l'un de l'autre, donc ont le même nombre de $\mathbf{a}$ et de $\mathbf{b}$; donc U'' et V'' vérifient $|U''|_{\mathbf{a}} - |V''|_{\mathbf{b}} = 2$, ce qui contredit la minimalité de W, donc $w_i = w_{n-i}$ et W est un palindrome.
d) Nous allons raisonner par l'absurde; supposons le mot u sturmien, il possède donc $n+2$ facteurs de longueur $n+1$, qui sont W et $n+1$ autres mots. Comme $\mathbf{a}W\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}W\mathbf{b}$ sont dans $\mathcal{L}(u)$, le mot W peut être prolongé à droite de deux façons, et donc les autres mots ne peuvent être prolongés à droite que d'une façon (sinon il y aurait plus de $n+3$ mots de longueur $n+2$), et de même W peut être prolongé à gauche de deux façons, et les autres mots d'une seule.

Au moins l'un des deux mots $\mathbf{a}W$ et $\mathbf{b}W$ peut être prolongé à droite de deux façons, sinon tout mot de longueur $n+2$ se prolongerait d'une seule façon (car un suffixe d'un mot ayant deux prolongements à droite a aussi deux prolongements à droite; donc $\mathbf{a}W$ et $\mathbf{b}W$ sont les seuls mots de longueur $n+2$ susceptibles d'avoir deux prolongements) et la suite serait ultimement périodique. Supposons que c'est $\mathbf{a}W$; alors les mots $\mathbf{a}W\mathbf{a}$, $\mathbf{a}W\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}W\mathbf{b}$ apparaissent dans le mot u, mais pas $\mathbf{b}W\mathbf{a}$ sinon on aurait $n+5$ mots de longueur $n+3$ et u ne serait pas sturmien.

Soit i un rang d'apparition de $\mathbf{b}W$ dans u; la remarque essentielle (et non triviale!) est que le mot $\mathbf{a}W$ n'est pas facteur de $u_i u_{i+1} \ldots u_{i+2n+3}$. Sinon on aurait $\mathbf{a}W = u_{i+k} \ldots u_{i+k+n+1}$, avec $0 \leq k \leq n+2$. Mais on ne peut avoir $k = 0$, car $u_i = \mathbf{b}$ par hypothèse, ni $k = n+2$ car $u_{i+n+2} = \mathbf{b}$ puisque $\mathbf{b}W\mathbf{a}$ n'apparaît pas. Puisque le mot $\mathbf{b}W\mathbf{b}$ apparaît au rang i et $\mathbf{a}W$ apparaît au rang $i+k$, on a $w_{k-1} = \mathbf{a}$ et $w_{n+1-k} = \mathbf{b}$ (regarder les deux façons de placer W dans ce bloc), ce qui contredit le fait que W est un palindrome.

Or il y a $n+3$ facteurs de longueur $n+2$ dans le mot $u_i u_{i+1} \ldots u_{i+2n+3}$, de longueur $2n+4$. Mais le mot infini u admet en tout $n+3$ facteurs de longueur $n+2$, tous prolongeables à droite de façon unique, sauf $\mathbf{a}W$; on en déduit qu'un même facteur de longueur $n+2$ apparaît 2 fois dans $u_i u_{i+1} \ldots u_{i+2n+3}$, ce qui entraîne que le mot est ultimement périodique : contradiction.

10) Remarquons d'abord que, si le mot de Christoffel associé à α est périodique, α est rationnel. En effet, si W_n est le préfixe de longueur n du mot de Christoffel, on a par définition $|W_n|_{\mathbf{b}} = [n\alpha]$; compte tenu de ce que $\lim_{n\to\infty}[n\alpha]/n = \alpha$, si le mot de Christoffel est périodique de période q et qu'il apparaît p lettres $\mathbf{b}$ par période, on a $\alpha = \lim_{n\to\infty} |W_{nq}|/nq = p/q$, donc α est rationnel.

Pour tout nombre irrationnel α, le mot de Christoffel associé à la droite $\mathcal{D}_\alpha$ n'est donc pas périodique; on montrerait de même qu'il n'est pas ultimement périodique. Compte tenu de la question II.4 et du théorème que l'on vient de prouver, on voit que ce mot est sturmien.

IV. Suite de Fibonacci

1) Notons $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1/\phi$ les deux racines de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$. On sait (propriété classique des suites récurrentes) qu'il existe deux réels λ et μ tels que $F_n = \lambda\phi^n + \mu\theta^n$; en identifiant pour les deux premières valeurs $F_0 = 1$ et $F_1 = 2$ on obtient

$$F_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\phi^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\theta^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+2} - \theta^{n+2}\right)$$

2) La suite des résidus de F_n modulo a est une suite récurrente dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$; comme il n'y a dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ qu'un nombre fini de couples de valeurs possibles, et que la suite est entièrement déterminée par deux valeurs consécutives, cette suite est périodique. La question revient à savoir si elle prend toutes les valeurs possibles. Le calcul montre que c'est le cas pour $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7$; par contre, pour $a = 8$, la suite des résidus est :

$$1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$$

On constate qu'elle ne prend pas les valeurs 4 et 6; les progressions arithmétiques de la forme $8n+4$ ou $8n+6$ ne contiennent donc aucun terme de la suite de Fibonacci. Cependant, 8 et 4 ou 6 n'étant pas premiers entre eux, ces progressions ne répondent pas complètement à l'énoncé; on vérifie que, pour $a = 11$, les valeurs $b = 4, 6, 7, 9$ conviennent, puisque la suite des résidus modulo 11 est :

$$1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, 2, \ldots$$

En fait, si p est premier et congru à ± 1 modulo 5, l'équation $x^2 - x - 1$ a deux racines α et β dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, et donc F_n, qui s'écrit dans ce corps sous la forme $5^{-1/2}(\alpha^n + \beta^n)$ est périodique de période $p-1$ d'après le théorème de Fermat. Comme il y a p résidus possibles, il y a dans ce cas au moins une valeur qui n'est pas prise.

3) Remarquons d'abord que si $n_0, n_1, \ldots, n_k$ est une suite finie ne prenant que les valeurs 0 et 1, et ne prenant pas deux fois de suite la valeur 1, on a $\sum_{i=0}^{k} n_i F_i < F_{k+1}$. C'est immédiatement vérifié si $k = 0$, et se montre facilement par récurrence; on peut en effet supposer que $n_k = 1$, donc $n_{k-1} = 0$, et par hypothèse de récurrence on a $\sum_{i=0}^{k} n_i F_i = F_k + \sum_{i=0}^{k-2} n_i F_i < F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$.

On en déduit que si l'écriture demandée existe, elle est unique. En effet si l'on avait une égalité $\sum_{i=0}^{k} n_i F_i = \sum_{i=0}^{k} n'_i F_i$ avec deux suites distinctes vérifiant les propriétés données, on pourrait, quitte à simplifier les termes de plus haut indice, supposer que $n_k = 1$ et $n'_k = 0$; mais alors la première somme serait minorée par F_k, et la deuxième, par la remarque qui précède, serait strictement majorée par F_k, ce qui est absurde.

Il reste à montrer que tout entier peut s'exprimer de cette manière; c'est vrai pour $0 = 0.F_0$, $1 = 1.F_0$ et $2 = 1.F_1$; supposons que ce soit vrai pour tout $n < F_k$, avec $k \geq 2$. Soit n un entier vérifiant $F_k \leq n < F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$; on a $n' = n - F_k < F_{k-1}$, donc, par hypothèse, n' peut s'écrire $n' = \sum_{i=0}^{k-2} n_i F_i$, et $n = F_k + \sum_{i=0}^{k-2} n_i F_i$, d'où le résultat.

4) Voila un programme donnant l'écriture de N en base de Fibonacci:

```
PROGRAM Zeckendorff;
VAR n,i:INTEGER;
  F,ecr:  ARRAY [0..1000] OF INTEGER;{on ne permet que des nombres de
    1000 chiffres; de toute façon, les entiers du Pascal, même longs,
    ne vont pas jusque là}
BEGIN
  FOR i:=0 TO 1000 DO ecr[i]=0;{initialisation à 0 du développement}
  WRITELN('nombre à décomposer?');
  READLN(n);
  F[0]:=1;
  F[1]:=2;
  i:=1;
  WHILE F[i]<n DO {Calcul d'un nombre suffisants de termes
      de la suite de Fibonacci}
    BEGIN
      i:=i+1;
      F[i]:=F[i-1]+F[i-2]
    END;
  WHILE i>= 0 DO {Calcul des chiffres du développement de n}
    BEGIN
      IF n>=F[i] THEN
        BEGIN
          n:=n-F[i];
          ecr[i]:=1
        END;
      i:=i-1
    END;
  i:=1000 {Ecriture du développement, en commençant par
    le plus haut terme non nul}
  WHILE ecr[i]=0 do i:=i-1;
  REPEAT
    WRITE(ecr[i]);
    i:=i-1
```

```
  UNTIL i<0
END.
```

5a) Montrons par l'absurde que $E_0 \cap E_1$ est l'ensemble vide. Supposons l'intersection non vide; il existe alors deux entiers non nuls p et q vérifiant $[p\phi] = [q\phi^2]$. On a donc $|p\phi - q\phi^2| < 1$, donc $|p - q\phi| < 1$, donc $p = [q\phi]$ ou $p = [q\phi] + 1$.

Cas 1 : $p = [q\phi]$. On a alors $p \leq q\phi < p + 1$, donc $q - 1/\phi < p/\phi \leq q$. On a en fait $p/\phi < q$ parce que p/ϕ est distinct de q (car ce n'est pas un entier) et donc $[p/\phi] = q - 1$, d'où:

$$\begin{aligned} p + [p/\phi] =& [p(1 + 1/\phi)] = [p\phi] \\ =& [q\phi^2] = [q(\phi + 1)] = [q\phi] + q \\ =& p + 1 + [p/\phi] \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Cas 2 : $p = [q\phi] + 1$. On a $p - 1 \leq q\phi < p$, donc $q < p/\phi \leq q + 1/\phi$, donc $[p/\phi] = q$. On conclut comme ci-dessus, par $p + [p/\phi] = [p\phi] = [q\phi] + q = p - 1 + [p/\phi]$, ce qui est absurde.

L'intersection est donc vide.

5b) Nous allons d'abord prouver que E_0 et E_1 forment une partition de $\mathbb{N}$.

On peut facilement calculer $[F_i\phi]$; on a en effet, d'après IV.1), $F_i\phi = (\phi^{i+3} - \theta^{i+1})/\sqrt{5}$ $= (\phi^{i+3} - \theta^{i+3})/\sqrt{5} + (\theta^{i+3} - \theta^{i+1})/\sqrt{5} = F_{i+1} + (\theta^{i+3} - \theta^{i+1})/\sqrt{5}$; comme θ est négatif et de valeur absolue plus petite que 1, le terme de reste tend vers 0 en alternant de signe, et donc on voit que $[F_i\phi] = F_{i+1}$ si i est impair, et $[F_i\phi] = F_{i+1} - 1$ sinon; puisque $[F_i\phi^2] = [F_i(\phi+1)] = [F_i\phi]+F_i$, on voit que $[F_i\phi^2] = F_{i+2}$ si i est pair, et $[F_i\phi^2] = F_{i+2}-1$ sinon.

On en déduit que $\sup([F_i\phi^2], [F_{i+1}\phi]) = F_{i+2}$. Si l'on considère, pour i fixé, les segments initiaux de E_0 : $\{[n\phi - 1], 0 < n \leq F_{i+1}\}$ et de E_1 : $\{[n\phi^2 - 1], 0 < n \leq F_i\}$, la question précédente montre que ces deux ensembles sont disjoints, on vient de voir que tous leurs éléments sont inférieurs à $F_{i+2} - 1$, et il est clair qu'ils ont F_{i+2} éléments; ils forment donc une partition de l'ensemble $\{0, 1, \ldots , F_{i+2} - 1\}$. Par récurrence, E_0 et E_1 forment une partition de $\mathbb{N}$.

Il suffit donc, pour avoir le résultat, de prouver que E_0(resp. E_1) est contenu dans l'ensembles des entiers dont le développement de Fibonacci se termine par 0 (resp.1).

Pour cela, nous utiliserons la remarque suivante : si $(n_0, n_1, \ldots , n_k)$ est une suite finie de 0 et de 1 ne comportant pas deux 1 consécutifs, alors la somme $\sum_{i=0}^{k} n_k\theta^{k+1}$ est plus petite que 1, et du signe du premier terme non nul (donc positive si le premier terme non nul est d'indice impair, négatif sinon). En effet, θ est négatif, donc la série est alternée; elle est minorée par $\theta + \theta^3 + \ldots + \theta^{2k+1} \ldots = -1$, et majorée par $\theta^2 + \theta^4 + \ldots + \theta^{2k} \ldots = 1/\phi$; le même raisonnement montre que le reste après le premier reste non nul est plus petit en valeur absolue que ce terme, d'où le résultat.

Soit $n = \sum n_i F_i$ un entier quelconque; en utilisant l'expression de F_i trouvée en IV.1, on peut écrire :

$$n\phi = \sum n_i F_{i+1} - \theta \sum n_i \theta^{i+1} = \sum n_i F_{i+1} + \epsilon(n)$$

On a vu que le signe de ϵ dépend de la parité de $k = \inf\{i, n_i = 1\}$; si k est pair, le reste est négatif; n se termine par un nombre pair de 0, donc $[n\phi] + 1$ se termine par un nombre pair non nul de zeros, et $[n\phi]$ se termine par $\ldots 0101$; alors $[n\phi] - 1$ se termine par

00, résultat cherché. Si k est impair, un raisonnement du même type montre que l'écriture en base de Fibonacci de $[n\phi] - 1$ se termine par un zéro; on a donc le résultat voulu sur E_0. Un raisonnement analogue sur $[n\phi^2]$ donne le résultat cherché sur E_1.
6)a) Posons $S(n) = \sum_{k<F_n} |Fib(k)|_1$; un raisonnement facile montre que l'on a

$$S(n+2) = S(n+1) + S(n) + F_n$$

$S(n)$ est donc définie par une relation de récurrence d'ordre 2 non homogène. La solution générale de l'équation homogène est de la forme:

$$c\phi^n + d\theta^n$$

et on recherche une équation particulière de l'équation complète sous la forme

$$(a\phi^n + b\theta^n)n$$

La solution générale de l'équation complète est donc de la forme

$$S(n) = (a\phi^n + b\theta^n)n + (c\phi^n + d\theta^n)$$

et par identification sur les 4 premières valeurs, on obtient

$$S(n) = \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{25}\phi^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{25}\theta^n\right)n + \frac{2\sqrt{5}}{25}(\phi^n - \theta^n)$$

b) On en déduit que, si l'on pose $T(n) = \sum_{k<n} |Fib(k)|_1$, on a :

$$T(F_n) \sim \frac{\phi}{5}nF_n \sim \frac{\phi}{5\log\phi}F_n \log F_n$$

On peut alors (assez facilement...), par une variante du lemme de Cesaro, montrer en décomposant n en base de Fibonacci que, pour tout n, on a :

$$T(n) \sim \frac{\phi}{5\log\phi}n\log n$$

V. Mot de Fibonacci

1) Il est clair que $d(x,y)$ s'annule si et seulement si $x = y$, d est symétrique par définition, et on a $d(x,z) \leq \sup(d(x,y), d(y,z))$: d est une distance ultramétrique. En effet, si y diffère de x à partir du rang i_0, et de z à partir du rang j_0, on a deux cas: soit i_0 est différent de j_0, disons $i_0 < j_0$, et dans ce cas x diffère de z à partir du rang i_0, c'est-à-dire $d(x,z) = d(x,y)$; soit $i_0 = j_0$, et alors x et z ont les mêmes lettres au moins jusqu'au rang i_0, donc $d(x,z) < d(x,y)$.

Les boules ouvertes pour cette distance sont les ensembles de mots dont les n premières coordonnées sont fixées; on en déduit facilement que la topologie définie par d est la topologie produit sur $A^{\mathbb{N}}$; mais A est fini, donc compact, et $A^{\mathbb{N}}$, produit d'espaces compacts, est compact pour la topologie produit, par le théorème de Tychonoff. Une autre manière de raisonner consiste à montrer, par un raisonnement diagonal, que l'on peut toujours extraire une sous-suite convergente: supposons que l'on ait extrait d'une suite donnée une sous-suite (u_n) de mots infinis qui, à partir du rang n, ont les mêmes n premières lettres; alors, la suite des lettres de rang $n+1$ prend l'une des valeurs **a** ou **b** une infinité de fois,

et l'on peut donc extraire une sous-suite qui est égale à la précédente pour les n premiers termes et dont tous les termes, à partir du rang $n+1$, ont les mêmes $n+1$ premières lettres. On construit ainsi une suite de mots infinis qui converge.
2) Soient u et u' deux mots distincts; s'ils commencent par deux lettres distinctes, leurs images commencent toutes deux par $\mathbf{a}$, s'ils ont exactement n lettres en commun, leurs images ont au moins $n+1$ lettres en commun, car elles commencent par $\sigma(u_0)\sigma(u_1)\ldots\sigma(u_{n-1})\mathbf{a}$. On a donc :

$$d(\sigma(u),\sigma(u')) \leq e^{-1}d(u,u')$$

σ est une application strictement contractante sur un espace métrique compact, donc complet; elle a donc exactement un point fixe.
3) Par définition, Φ_n est un préfixe de Φ_p, pour tout $p \geq n$; on en déduit que la suite des mots $\Phi_p\mathbf{aa}\ldots\mathbf{a}\ldots$ est de Cauchy (car la longueur de Φ_n est égale à F_n, donc les mots $\Phi_p\mathbf{aa}\ldots\mathbf{a}\ldots$ pour $p \geq n$ ont tous au moins les F_n premières lettres identiques); donc elle converge dans $\left(A^{\mathbb{N}},d\right)$ vers un mot infini u.

On vérifie par récurrence que $\Phi_n = \sigma^n(\mathbf{a})$; c'est clair pour $n=0,1$. Supposons le vrai à l'ordre $n \geq 1$, on a $\sigma^{n+1}(\mathbf{a}) = \sigma^n(\mathbf{ab}) = \sigma^n(\mathbf{a})\sigma^n(\mathbf{b}) = \sigma^n(\mathbf{a})\sigma^{n-1}(\mathbf{a}) = \Phi_n\Phi_{n-1} = \Phi_{n+1}$. On en déduit que Φ_p est préfixe de $\sigma(\Phi_p)$, donc on a $d(\Phi_p\mathbf{aa}\ldots,\sigma(\Phi_p\mathbf{aa}\ldots)) \leq e^{-F_n}$, en passant à la limite on a $d(u,\sigma(u)) = 0$ (σ est continue, puisque contractante) et donc u est le point fixe de σ
4) On a par construction pour tout n: $|\sigma^n(\mathbf{a})| = F_n$ et $|\sigma^n(\mathbf{a})|_{\mathbf{a}} = F_{n-1}$, ce qui prouve que $f_{\mathbf{a}}(F_n-1) = F_{n-1}/F_n \to 1/\phi$. En décomposant n en base de Fibonacci, $n = F_{n_1}+F_{n_2}+\ldots+F_{n_k}$, on voit que, par construction de la suite, on a $F_{\mathbf{a}}(n) = (F_{n_1-1}+F_{n_2-1}+\ldots+F_{n_k-1})/(F_{n_1}+F_{n_2}+\ldots+F_{n_k})$, qui converge aussi vers $1/\phi$ par le lemme de Césaro.
5) Il suffit de montrer que $\mathbb{N}_{\mathbf{a}}$ est l'ensemble des entiers dont l'écriture en base de Fibonacci se termine par 0, d'après IV 5 b). Or par construction du mot λ, on remarque que si $n = F_{n_1}+F_{n_2}+\ldots+F_{n_k}$ est l'écriture de n en base de Fibonacci, on a $\lambda_n = \mathbf{a}$ si et seulement si $\lambda_{n-F_{n_1}} = \mathbf{a}$. Comme $\lambda_0 = \mathbf{a}$ et $\lambda_1 = \mathbf{b}$, on en déduit que $\mathbb{N}_{\mathbf{a}} = E_0$ et $\mathbb{N}_{\mathbf{b}} = E_1$.

VI. Décomposition canonique des systèmes sturmiens

A) Mots biprolongeables d'un système sturmien.

1) Soit x un mot infini dont le langage n'est pas contenu dans $\mathcal{L}(u)$; il existe alors un préfixe de x de longueur l qui n'est pas contenu dans $\mathcal{L}(u)$, et donc on a, pour tout n, $d(S^n(u),x) \geq e^{-l}$, donc x ne peut appartenir à l'adhérence de l'orbite de u. Si par contre le langage de x est contenu dans $\mathcal{L}(u)$, alors tous les préfixes finis de x sont contenus dans $\mathcal{L}(u)$; donc, pour tout l il existe i_l tel que $x_0x_1\ldots x_l = u_{i_l}u_{i_l+1}\ldots u_{i_l+l}$, ce qui entraîne que $d(x,S^{i_l}(u)) < e^{-l}$, donc x appartient à l'adhérence de l'orbite de u.

L'ensemble Ω est fermé par définition; de plus, le langage de $S(x)$ est contenu dans celui de x,donc la caractérisation précédente de Ω montre que $S(\Omega) \subset \Omega$.
2) On a en fait $S(\Omega) = \Omega$, car tout facteur de u apparait une infinité de fois, et donc à des rangs strictement positifs; pour tout élément $x \in \Omega$, on peut donc trouver une suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs tels que $S^{n_i}(u)$ converge vers x; la suite $S^{n_i-1}(u)$ est alors bien définie, et par compacité on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un élément y de Ω; on a évidemment $Sy = x$. En particulier, il existe un élement y de Ω tel que $Sy = u$.
3) On sait que, puisque tout mot de $\mathcal{L}(u)$ apparaît une infinité de fois dans u, tout mot de $\mathcal{L}(u)$ se prolonge à gauche d'au moins une façon; on en déduit que, pour tout entier positif n, il existe exactement 1 mot qui se prolonge à gauche de deux façons, puisque

$P_u(n+1) = P_u(n)+1$. Notons W_n ce mot; par construction, les préfixes de W_n se prolongent à gauche de deux façons, donc ce sont les W_i pour $i < n$. Puisque les W_n sont préfixes les uns des autres, cela a un sens de définir la suite w dont tous les préfixes sont les W_n. Par construction, $\mathbf{a}W_N$ et $\mathbf{b}W_n$ sont dans $\mathcal{L}(u)$ pour tout n, donc par la question 1) $\mathbf{a}w$ et $\mathbf{b}w$ sont dans Ω, et w est image par décalage de deux éléments distincts. C'est le seul élément avec cet propriété, car si $\mathbf{a}v$ et $\mathbf{b}v$ sont tous deux dans Ω, tous les préfixes de v sont biprolongeables à gauche, ce sont donc les W_n.
4) Soit u l'unique élément de Ω biprolongeable à gauche; quitte à échanger les lettres, on peut supposer que $u_0 = \mathbf{a}$; alors, le mot $\mathbf{aa}$ est dans $\mathcal{L}(u)$, comme préfixe de $\mathbf{a}u$, donc le mot $\mathbf{bb}$ n'est pas dans $\mathcal{L}(u)$ (on aurait deux mots de même longueur avec 2 $\mathbf{a}$ dans le premier, et aucun dans le second, ce qui est impossible pour un mot sturmien); donc $\mathbf{b}u$ est l'image par S de $\mathbf{ab}u \in \Omega$. Soit k le premier indice tel que $u_k = \mathbf{b}$; le mot $\mathbf{ba}\ldots\mathbf{ab}$, de longueur $k+2$ avec k $\mathbf{a}$ est dans $\mathcal{L}(u)$ (prefixe de $\mathbf{b}u$); si $\mathbf{a}u$ est prolongeable à gauche par $\mathbf{a}$, le mot $\mathbf{aa}u$ commence par un préfixe de longueur $k+2$ ne contenant que des $\mathbf{a}$, ce qui est impossible; donc $\mathbf{a}u$ est prolongeable à gauche par $\mathbf{b}$, et $\mathbf{ab}u$ et $\mathbf{ba}u$ sont dans Ω.

B) Codage d'un système sturmien.

5) Supposons que $\mathbf{bb}$ n'appartient pas au langage associé $\mathcal{L}(u)$; soit x un élément de Ω. Alors, tout $\mathbf{b}$ qui apparaît dans x est suivi par un $\mathbf{a}$, et x se décompose de façon unique en produit de concaténation des mots $\mathbf{ba}$ et $\mathbf{a}$ (autrement dit: le couple de mots $(\mathbf{ba},\mathbf{a})$ est un code), ce qui revient à dire, en remplaçant le mot $\mathbf{ba}$ par $\mathbf{b}$, qu'il existe un mot y tel que $\sigma_{\mathbf{a}}(y) = x$.
6) Si Sy n'est pas sturmien, on peut trouver deux facteurs U et V de Sy de même longueur qui vérifient $||U|_{\mathbf{a}} - |V|_{\mathbf{a}}| > 1$. En appliquant le même raisonnement que dans la question III 9 b), on peut supposer, en prenant U et V minimaux, qu'il existe un mot W tel que $U = \mathbf{a}W\mathbf{a}$ et $V = \mathbf{b}W\mathbf{b}$. De plus, U et V ne sont pas des préfixes de y, donc comme l'image par $\sigma_{\mathbf{a}}$ de toute lettre se termine par $\mathbf{a}$, les mots $\mathbf{aa}\sigma_{\mathbf{a}}(W)\mathbf{a} = \mathbf{a}\sigma_{\mathbf{a}}(U)$ et $\mathbf{ba}\sigma_{\mathbf{a}}(W)\mathbf{ba} = \sigma_{\mathbf{a}}(V)$ apparaissent dans $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$; le second mot contient le mot $\mathbf{ba}\sigma_{\mathbf{a}}(W)\mathbf{b}$, qui a même longueur et deux $\mathbf{a}$ de moins que le second, donc $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$ n'est pas sturmien.
7) Soit W un mot qui apparaît dans Sy, mais pas dans Sy'; alors, le mot $\mathbf{a}\sigma_{\mathbf{a}}(W)$ apparaît dans $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$; mais comme $\{\mathbf{ba},\mathbf{a}\}$ est un code, ce mot se décompose de façon unique en $\mathbf{a}$ et $\mathbf{ba}$; donc il ne peut apparaître dans $\sigma_{\mathbf{a}}(y')$ que comme facteur de $\sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}W)$ ou $\sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}W)$ (il y a ambiguïté sur la première lettre), ce qui contredit l'hypothèse. Donc si le langage de $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$ est inclus dans le langage de $\sigma_{\mathbf{a}}(y')$, alors le langage de Sy est inclus dans le langage de Sy'.
8) Soit Ω un système engendré par un mot sturmien u; supposons que $\mathbf{bb}$ n'appartient pas au langage associé. Alors la question 5 montre que, pour tout $y \in \Omega$, il existe y' tel que $y = \sigma_{\mathbf{a}}y'$. La question 6 montre que, si $u = \sigma_{\mathbf{a}}u'$, le mot Su' est sturmien; il engendre un système Ω', et la question 7 montre que les mots y' obtenus ci-dessus sont tels que Sy' a un langage contenu dans celui de Su', donc est contenu dans Ω'.

Si c'est $\mathbf{aa}$ qui n'appartient pas au langage associé à Ω, on raisonne de même en remplaçant $\sigma_{\mathbf{a}}$ par $\sigma_{\mathbf{b}}$.

9) Supposons que u commence par $\mathbf{a}$; comme $\mathbf{ba}u$ est dans Ω, le mot $\mathbf{aa}$ apparaît dans le langage associé, donc on peut recoder le langage associé par $\sigma_{\mathbf{a}}$. En posant $u = \mathbf{a}w$, il existe u' tel que $\sigma_{\mathbf{a}}(u') = w$, et $\sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}u') = u$, ce qui montre d'après la question précédente que $u' \in \Omega'$. Mais alors $\mathbf{ab}u = \mathbf{aba}w$ est image de $\mathbf{ab}u'$, et de même $\mathbf{ba}u = \mathbf{baa}w$ est image de $\mathbf{ba}u'$, donc $\mathbf{b}u'$ et $\mathbf{a}u'$ sont tous deux dans Ω', ce qui prouve que u' est l'unique mot biprolongeable à gauche du système sturmien Ω'. Donc, d'après la question 4, $\mathbf{ab}u'$ et $\mathbf{ba}u'$ sont tous deux dans Ω', et on vient de montrer qu'ils ont pour image par $\sigma_{\mathbf{a}}$ les éléments correspondants de Ω.

10) On a un procédé simple pour engendrer u' à partir de u: si l'on suppose que u ne contienne pas le facteur **bb**, il suffit de lire le mot u à partir de la deuxième lettre en effaçant tous les **b** et en remplaçant la lettre **a** par **b** si elle est précédée par **b**. Cette description montre que, si u est ultimement périodique, alors u' aussi est ultimement périodique, et que la période de u' est inférieure ou égale à la période de u; elle ne peut être égale que si u ne contient pas la lettre **b** à partir d'un certain rang, donc si elle est de période 1.

Mais un mot sturmien ne peut contenir de plages arbitrairement longues de **a**, car il contient la lettre **b**, donc il la contient plusieurs fois, donc il contient un mot du type $\mathbf{ba}^n\mathbf{b}$ entre deux occurences de **b**, et il ne peut donc contenir le mot $\mathbf{a}^{n+2}$; donc le système associé ne peut pas contenir de suite ultimement constante.

Mais si u était ultimement périodique de période p, le raisonnement suivant nous permet de construire un autre système sturmien avec un mot biprolongeable ultimement périodique de période plus petite; en un nombre fini d'étapes, on se ramène à un mot biprolongeable ultimement constant, ce qui est absurde.

Mais puisque u n'est pas périodique, on a $P_u(n) \geq n+1$; on en déduit que le langage de u est égal au langage associé à Ω (il est contenu dans celui-ci, et il a même nombre de mots d'ordre n), ce qui implique que l'orbite de u est dense dans Ω (pour tout $v \in \Omega$, le préfixe de longueur l de v est dans le langage de Ω, donc apparaît à une position n dans u, et on a $d(v, S^n u) \leq e^{-l}$).

11) La question 9) montre que l'on peut recoder un système sturmien par une (et une seule) des applications $\sigma_{\mathbf{a}}$ et $\sigma_{\mathbf{b}}$. On peut itérer cette construction, et trouver une suite $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ de substitutions égales à $\sigma_{\mathbf{a}}$ ou $\sigma_{\mathbf{b}}$ telles que l'on ait, avec les notations évidentes, $\mathbf{ab}u = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n(\mathbf{ab}u_n)$.

Si cette suite était constante et égale à $\sigma_{\mathbf{a}}$, le mot $\mathbf{ba}u$ commencerait par $\sigma_{\mathbf{a}}^n(\mathbf{b}) = \mathbf{ba}^n$ pour tout n, donc u serait constante; si la suite de substitution était constante à partir d'un certain rang, le même raisonnement montre que u serait périodique, et on vient de voir que ce n'est jamais le cas. Les deux substitutions apparaissent donc une infinité de fois, on peut regrouper les valeurs et écrire $\mathbf{ab}u = \sigma_{\mathbf{a}}^{a_1-1}\sigma_{\mathbf{b}}^{a_2}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_3}\ldots\sigma_{\mathbf{b}}^{a_{2n}}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_{2n+1}}(\mathbf{ab}u_{2n+1})$, et de même pour $\mathbf{ba}u$ (le premier terme est en $a_1 - 1$ pour tenir compte du fait que la suite pourrait commencer par $\sigma_{\mathbf{b}}$, donc la première puissance peut-être nulle, et il faut prendre $a_1 - 1$ ou autoriser le premier terme à être positif, et non strictement positif comme les suivants).

VII. Mots sturmiens et rotations

A) Unicité de la rotation associée à un système sturmien.

1) On a $f^I(x) = f^J(x)$ sauf si $x = 0$ ou $x = 1-\alpha = R_\alpha^{-1}(0)$. Donc $f^I(R_\alpha^n(x)) = f^J(R_\alpha^n(x))$ sauf si $x = R_\alpha^{-n}(0)$ ou $x = R_\alpha^{-n-1}(0)$; les seuls points x tels que $N^I(x) \neq N^J(x)$ sont les points de l'orbite négative de 0.

Si $N^I(x) \neq N^J(x)$, x est dans l'orbite négative de 0, et les deux suites $N^I(x)$ et $N^J(x)$ sont égales au-dela d'un certain rang; en effet, on a par définition $S^n(N^I(x)) = N^I(R_\alpha^n(x))$, et pour n assez grand, $R_\alpha^n(x)$ n'est pas dans l'orbite négative de x. Mais on a vu, à la question III 10), que le mot $N^I(x)$ est sturmien; une démonstration semblable montre que $N^J(x)$ est aussi sturmien. Tout facteur de $N^I(x)$ apparaît une infinité de fois, donc à des rangs arbitrairement élevés, donc apparaît aussi dans $N^J(x)$: les langages associés aux deux mots infinis sont les mêmes.

2) Une application de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est continue si, pour tout x et tout n, il existe ϵ tel que, pour $|x-y| < \epsilon$, les mots correspondant à x et y ont leurs n premières lettres identiques. L'application f^I est évidemment continue à droite; donc l'application $x \mapsto f^I(R_\alpha^n(x))$ aussi.

Donc pour tout x, il existe $\epsilon_n > 0$ tel que, si $0 \le y - x < \epsilon_n$, on a $f^I(R_\alpha^n(x)) = f^I(R_\alpha^n(y))$. Si l'on pose $\delta_n = \inf_{i=0\ldots n-1} \epsilon_i$, on voit que, pour $0 \le y - x < \delta_n$, $N^I(x)$ et $N^I(y)$ ont leurs n premières lettres identiques, ce qui montre que N^I est continue à droite. Une démonstration symétrique montre que N^J est continue à gauche.
3) Soit u un mot sturmien, v un élément du système Ω associé. On sait qu'alors il existe une suite n_i d'entiers, tendant vers l'infini, telle que $\lim_{i\to\infty} S^{n_i}u = v$. Supposons qu'il existe une rotation irrationnelle R_α pour laquelle on a $u = N^I(x)$; par compacité, on peut extraire de la suite $R_\alpha^{n_i}(x)$ une suite convergente, de limite y, et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la convergence est monotone. Si la suite converge vers y en décroissant, on a $N^I(y) = \lim_{i\to\infty} N^I(R_\alpha^{n_i}(x)) = \lim_{i\to\infty} S^{n_i}u = v$, donc v est engendré par la même rotation. Si la suite converge en croissant, on peut remplacer N^I par N^J pour n_i assez grand, d'après la question 1, et utiliser la continuité à gauche de N^J; le raisonnement est semblable si u est de la forme $N^J(x)$.

On a donc bien montré que si une rotation engendre un élément d'un système sturmien, elle engendre tous les éléments de ce système.

B) Existence de la rotation associée à un système sturmien.

4) L'application R_α envoie l'intervalle $[0, 1-\alpha[$ sur $[\alpha, 1[$, disjoint de I', et $[\alpha, 1[$ sur $[2\alpha - 1, \alpha[$, qui est contenu dans I'. Elle envoie le complémentaire de $[0, 1-\alpha[$ dans I', l'intervalle $[1-\alpha, \alpha[$, sur $[0, 2\alpha - 1[$, qui est aussi contenu dans I'. Il en résulte que l'application induite $R_{\alpha|I'}$, définie sur $[0, \alpha[$, envoie $[0, 1-\alpha[$ sur $[2\alpha - 1, \alpha[$ et $[1-\alpha, \alpha[$ sur $[0, 2\alpha - 1[$. En conjuguant par l'homothétie de rapport $1/\alpha$, on vérifie qu'on obtient la rotation d'angle $(2\alpha - 1)/\alpha$.
5) L'application $f^{I'}$ est simplement la restriction à I' de f^I; la suite $R_{\alpha|I'}^n(x)$ est une suite extraite de $R_\alpha^n(x)$ (c'est la suite des $R_\alpha^n(x)$ qui sont contenus dans I'), donc $N^{I'}(x)$ est une suite extraite de $N^I(x)$. On vérifie facilement que, si $x \in I'_{\mathbf{a}}$, alors $R_\alpha(x)$ appartient à $I_{\mathbf{b}}$ mais pas à I', et $R_\alpha^2(x) = R_{\alpha|I'}(x)$ appartient à I'. Par contre, si $x \in I' \cap I_{\mathbf{b}}$, on a $R_\alpha(x) = R_{\alpha|I'}(x) \in I'$.

Donc, si $N^I(x) = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et si la suite extraite $N^{I'}(x)$ est $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, où n_i est une suite strictement croissante d'entiers, on voit que, si $u_{n_i} = \mathbf{b}$, alors $n_{i+1} = n_i + 1$ (autrement dit, le terme suivant de $N^I(x)$ est encore dans $N^{I'}(x)$) et si $u_{n_i} = \mathbf{a}$, alors $n_{i+1} = n_i + 2$ et $u_{n_i} + 1 = \mathbf{b}$ (autrement dit, le $\mathbf{a}$ qui apparaît dans $N^I(x)$ est suivi par un $\mathbf{b}$ que l'on enlève pour passer à $N^{I'}(x)$; ce qui montre que :

$$N^I(x) = \sigma_{\mathbf{b}}\left(N^{I'}(x)\right)$$

6) Si $\alpha < \frac{1}{2}$, on considère l'application induite sur $I'' = [\alpha, 1[$; elle est conjuguée par une homothétie à la rotation d'angle $\alpha/(1-\alpha)$, et on montre avec les notations évidentes que :

$$N^I(x) = \sigma_{\mathbf{a}}\left(N^{I''}(x)\right)$$

7) On peut itérer les questions précédentes : partant d'une rotation sur un intervalle $I = I_0$, on induit sur un intervalle $I_1 = I'$ ou I'', puis sur un intervalle I_2, etc...; on obtient ainsi une suite d'intervalle I_n, et, pour $x \in I_n$, des mots $N^{I_n}(x)$ satisfaisant à $N^{I_{n-1}}(x) = \sigma(N^{I_n}(x))$, avec $\sigma = \sigma_{\mathbf{a}}$ ou $\sigma = \sigma_{\mathbf{b}}$. L'étude des deux cas possibles montre que le point de discontinuité $1 - \alpha$ de R_α appartient toujours à l'intervalle d'induction I' ou I'' (en fait, c'est dans ce but que l'on a choisi cette méthode d'induction), donc par récurrence il appartient à l'intersection des I_n, et pour tout n c'est le point de discontinuité de l'application induite. Par définition, $N^{I_n}(x)$ commence par $\mathbf{b}$ et $N^{J_n}(x)$ commence par

a; donc, si la suite d'induction est σ_i, on voit que $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n(\mathbf{a})$ (resp. **b**) est un préfixe du mot infini $N^J(1-\alpha)$ (resp. $N^I(1-\alpha)$.

La suite $(\sigma_n)_{N\in\mathbb{N}}$ peut se regrouper en plages consécutives de $\sigma_{\mathbf{a}}$ ou $\sigma_{\mathbf{b}}$; il reste à identifier la longueur de ces plages avec le développement en fraction continue de α. Remarquons que le type d'induction que l'on fait dépend des longueurs respective de $I_{\mathbf{a}}$ et $I_{\mathbf{b}}$, et que l'induction revient a soustraire au plus grand des deux intervalles la longueur de l'autre; donc on fait le même type d'induction autant de fois que l'on peut soustraire le plus grand au plus petit; ce qui est déterminant est donc le rapport $(1-\alpha)/\alpha$, et l'on vérifie sans peine que :

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} = a_1 - 1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}}$$

Si $\alpha < 1/2$, c'est-à-dire si $(1-\alpha)/\alpha > 1$, ou $a_1 > 1$, on induit avec $\sigma_{\mathbf{a}}$; on peut le faire $a_1 - 1$ fois, et l'on finit par obtenir :

$$\frac{1-a_1\alpha}{\alpha} = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}}$$

A partir de là on induit par $\sigma_{\mathbf{b}}$, ce qui compte est alors le rapport inverse $\alpha/(1-a_1\alpha)$ soit $a_2 + 1/\ldots$; on peut alors induire a_2 fois par $\sigma_{\mathbf{b}}$, avant de revenir à la situation initiale, avec $a_1 - 1$ remplacé par a_3; une récurrence simple donne alors le résultat cherché.

8) Il s'agit d'un simple assemblage des questions précédentes : soit v une suite sturmienne, Ω le système associé, et u l'unique mot biprolongeable à gauche de Ω. On a montré dans la partie VI, question 11), qu'à Ω on peut associer une suite d'entiers (a_n) permettant de coder **ab**u et **ba**u; à cette suite d'entiers, on peut associer l'unique réel irrationnel α dont elle est le développement en fraction continue. La question précédente montre qu'alors **ab**u (resp. **ba**u) est égal à $N^J(1-\alpha)$ (resp. $N^I(1-\alpha)$); donc u est engendré par la rotation R_α. La question VII 3) montre qu'alors, v est aussi engendré par R_α, donc toute suite sturmienne est engendrée par une rotation irrationnelle.

Remarquons la signification géométrique du mot biprolongeable: c'est le mot correspondant à α, qui est biprolongeable à gauche parce que l'image réciproque de α est 0, dont l'appartenance à $I_{\mathbf{a}}$ ou $I_{\mathbf{b}}$ est une question de convention, puisqu'il est sur la frontière des deux intervalles. Une fois choisie cette convention, le codage de $1-\alpha$ est déterminé, puisque, les intervalles étant semi-ouverts, il doit être opposé à celui de 0.

C) Applications.

9) L'algorithme consiste à calculer les n premiers termes de la fraction continue de α, puis le préfixe de $N^J(1-\alpha)$ en itérant les substitutions; en pratique, plutôt que de composer les substitutions, il est plus simple de procéder dans l'ordre inverse : posons $\tau_{n-1} = \sigma_1\ldots\sigma_{n_1}$, $U_{n-1} = \tau_{n-1}(\mathbf{a})$ et $V_{n-1} = \tau_{n-1}(\mathbf{b})$. Si $\sigma_n = \sigma_{\mathbf{a}}^k$, on a $U_n = \tau_{n-1}\sigma_{\mathbf{a}}^k(\mathbf{a}) = \tau_{n-1}(\mathbf{a}) = U_{n-1}$, et $V_n = \tau_{n-1}\sigma_{\mathbf{a}}^k(\mathbf{b}) = \tau_{n-1}(\mathbf{ba}^k) = V_{n-1}U_{n-1}^k$.

On pose donc $U_0 = \mathbf{a}$, $V_0 = \mathbf{b}$, on calcule la suite k donnée par $k_1 = a_1 - 1$, $k_i = a_i$ pour $i > 1$, où (a_i) est la fraction continue de α, et on construit la suite de couples de mots (U_n, V_n) par :

$$U_n = U_{n-1} \quad V_n = V_{n-1}U_{n-1}^{k_n} \quad \text{si } n \text{ est impair}$$
$$U_n = U_{n-1}V_{n-1}^{k_n} \quad V_n = V_{n-1} \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

Comme la suite k_n est strictement positive à partir du rang 2, il est clair que la longueur de U_n et V_n est au moins égale à F_{n-1}, donc la longueur de ces mots croit exponentiellement vite (plus vite que $K((1+\sqrt{5})/2)^n$. Le temps de calcul pour obtenir les n premières lettres est donc en $\log n$, si l'on compte comme opérations le calcul de la fraction continue et les concaténations de mots.
10) Un calcul simple montre que le développement en fraction continue de $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ est $2, 1, 1, 1, \dots$; Le début de $N^J(1-\alpha)$ est donc donné par $\sigma_{\mathbf{a}}\sigma_{\mathbf{b}}\sigma_{\mathbf{a}}\sigma_{\mathbf{b}}\dots(\mathbf{a})$. Autrement dit, si l'on pose $\tau = \sigma_{\mathbf{a}}\sigma_{\mathbf{b}}$, ce mot infini est le point fixe de τ qui commence par **a** (on peut montrer que τ admet exactement 2 points fixes, dont l'un commence par **a** et l'autre par **b**).
11) Le mot que l'on vient de calculer est le point fixe commençant par **a** de la substitution $\tau\ :\ \mathbf{a} \mapsto \mathbf{aba}\quad \mathbf{b} \mapsto \mathbf{ba}$; ce point fixe commence par les préfixes $\tau^n(\mathbf{a})$. Le mot de Fibonacci, lui, est point fixe de la substitution σ définie à la partie IV, ou de son carré $\sigma^2\ :\ \mathbf{a} \mapsto \mathbf{aba}\quad \mathbf{b} \mapsto \mathbf{ab}$, et débute par $\sigma^{2n}(\mathbf{a})$. Ces deux substitutions ne diffèrent que par l'ordre des lettres; donc la proportion $|\tau^n(\mathbf{a})|_{\mathbf{a}}/|\tau^n(\mathbf{a})| = |\sigma^{2n}(\mathbf{a})|_{\mathbf{a}}/|\sigma^{2n}(\mathbf{a})|$ de **a** dans le mot est la même pour $\tau^n(\mathbf{a})$ et $\sigma^{2n}(\mathbf{a})$. La proportion asymptotique de **a** est donc la même pour les deux points fixes. Comme on a vu que ces deux points fixes sont sturmiens, ils appartiennent au même système, puique l'angle α est égal à la proportion asymptotique de **b**. Par construction, le point fixe de τ est le deuxième antécédent du mot biprolongeable du sytème. D'autre part, les mots **aa** et **ba** apparaissent dans le mot de Fibonacci, donc aussi $\sigma^{2n}(\mathbf{a})\sigma^{2n}(\mathbf{a})$ et $\sigma^{2n}(\mathbf{b})\sigma^{2n}(\mathbf{a})$; mais $\sigma^{2n}(\mathbf{a})$ finit par **a**, et $\sigma^{2n}(\mathbf{b})$ finit par **b**, donc les mots $\mathbf{a}\sigma^{2n}(\mathbf{a})$ et $\mathbf{b}\sigma^{2n}(\mathbf{a})$ sont admissibles; on en déduit que tous les mots $\sigma^{2n}(\mathbf{a})$ sont biprolongeables à gauche, donc le mot de Fibonacci est biprolongeable à gauche.

Le mot de Fibonacci est donc le point fixe de τ, privé de ses deux premières lettres, ce qui correspond à $N^J(\alpha)$; on pourrait d'ailleurs donner de ce fait une preuve directe.

Autre démonstration : nous allons montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a $\tau^n(\mathbf{a})\mathbf{ba} = \mathbf{ab}\sigma^{2n}(\mathbf{a})$ et $\tau^n(\mathbf{b})\mathbf{ab} = \mathbf{ba}\sigma^{2n}(\mathbf{b})$. La vérification pour $n = 0, 1$ est immédiate; supposons-le prouvé jusqu'à un ordre $n > 0$. On a alors:

$$
\begin{aligned}
\tau^{n+1}(\mathbf{a})\mathbf{ba} &= \tau^n(\mathbf{aba})\mathbf{ba} = \tau^n(\mathbf{a})\tau^n(\mathbf{b})\tau^n(\mathbf{a})\mathbf{ba} \\
&= \tau^n(\mathbf{a})\tau^n(\mathbf{b})\mathbf{ab}\sigma^{2n}(\mathbf{a}) \\
&= \tau^n(\mathbf{a})\mathbf{ba}\sigma^{2n}(\mathbf{b})\sigma^{2n}(\mathbf{a}) \\
&= \mathbf{ab}\sigma^{2n}(\mathbf{a})\sigma^{2n}(\mathbf{b})\sigma^{2n}(\mathbf{a}) \\
&= \mathbf{ab}\sigma^{2n}(\mathbf{aba}) = \mathbf{ab}\sigma^{2n+2}(\mathbf{a})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau^{n+1}(\mathbf{b})\mathbf{ab} &= \tau^n(\mathbf{ba})\mathbf{ab} = \tau^n(\mathbf{b})\tau^n(\mathbf{a})\mathbf{ab} \\
&= \tau^n(\mathbf{b})\tau^{n-1}(\mathbf{aba})\mathbf{ab} \\
&= \tau^n(\mathbf{b})\tau^{n-1}(\mathbf{a})\tau^n(\mathbf{b})\mathbf{ab} \\
&= \tau^n(\mathbf{b})\tau^{n-1}(\mathbf{a})\mathbf{ba}\sigma^{2n}(\mathbf{b}) \\
&= \tau^n(\mathbf{b})\mathbf{ab}\sigma^{2n-2}(\mathbf{a})\sigma^{2n}(\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{ba}\sigma^{2n}(\mathbf{b})\sigma^{2n-2}(\mathbf{a})\sigma^{2n}(\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{ba}\sigma^{2n-2}(\mathbf{abaab}) = \mathbf{ba}\sigma^{2n+2}(\mathbf{b})
\end{aligned}
$$

ce qui prouve bien le résultat. Or les mots $\tau^n(\mathbf{a})$ sont préfixes les uns des autres, donc sont les préfixes du point fixe u de τ commençant par **a**; de même, les mots $\tau^n(\mathbf{b})$ sont les préfixes du point fixe de τ commençant par $\mathbf{b}$, et les mots $\sigma^{2n}(\mathbf{a})$ sont préfixes du mot λ de Fibonacci. Les relations prouvées ci-dessus entraînent donc à la limite :

$$u = \mathbf{ab}\lambda \qquad v = \mathbf{ba}\lambda$$

References

[B] J. Berstel, *Tracé des droites, fractions continues et morphismes itérés*, Publications du LITP **61** (1987).

[CH] E.M. Coven, G.A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.

[H] G.A. Hedlund, *Sturmian minimal sets*, Amer. J. Math. **66** (1944), 605–620.

[MH] M. Morse, G.A. Hedlund, *Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.

[P] M. Paul, *Minimal symbolic flows having minimal block growth*, Math. Syst. Th. **8** (1974), 309–315.

[R] G. Rauzy, *Mots infinis en arithmétique*, Automata on infinite words, LNCS 192, Springer-Verlag, 1985, pp. 165–171.

AGREGATION DE MATHEMATIQUES
(Session de 1994)

ORGANISATION des EPREUVES ORALES

1°) Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets au choix. A l'issue des trois heures de préparation, il indique au jury celui des deux sujets qu'il a choisi.

Pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place (bibliothèque de l'agrégation). Il peut également utiliser des ouvrages de référence qu'il a apportés lui-même. Ces ouvrages doivent être imprimés, vendus dans le commerce, et ne pas comporter de notes manuscrites. Ils seront contrôlés par le Jury qui peut s'opposer à l'utilisation de certains ouvrages s'il juge qu'elle risque de dénaturer le travail de préparation.

La liste de la bibliothèque de l'agrégation est publiée chaque année dans le rapport du concours précédent.

2°) Sur le sujet choisi le candidat n'a pas à bâtir une leçon détaillée destinée à une classe d'un niveau déterminé ou correspondant à un nombre limité d'heures de cours. Il lui est demandé surtout une étude de synthèse construite à partir d'une base de connaissance ne dépassant pas les limites du programme d'oral. Le candidat a le libre choix du niveau auquel il place son exposé ; le niveau d'une classe de terminale risque cependant d'être insuffisant et d'autre part les connaissances exposées doivent être réellement maîtrisées.

3°) L'épreuve commence par la présentation, en quinze à vingt minutes, d'un plan d'étude qui ne doit être ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations.

Il s'agit de définir avec précision les notions introduites, de donner des énoncés complets des résultats fondamentaux, de citer des exemples et des applications, et d'insister sur l'enchaînement des idées.

4°) Après la présentation du plan le candidat est invité à fournir au jury une liste d'au moins deux points qu'il juge importants dans son étude. C'est parmi ces points que le jury choisit le thème d'un exposé, qui peut être soit le développement détaillé d'une partie bien délimitée du plan, soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif. La netteté et la clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté, constituent pour le jury un facteur important d'appréciation.

5°) L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions abordées dans le plan et l'exposé, et éventuellement sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Cette discussion permet ainsi au candidat de développer, de justifier et d'illustrer son point de vue, en même temps qu'elle met en valeur sa culture mathématique.

Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury.

6°) Les candidats sont invités, notamment pour illustrer et compléter une leçon, à utiliser leurs connaissances en matière de méthodes numériques, d'algorithme, et de programmation des ordinateurs.

Lecons d'ALGEBRE 1994 : Liste des Sujets d'Oral

1 Les séries formelles à une indéterminée, séries génératrices, applications.
2 Exemples de problèmes de dénombrement (on pourra se limiter au cas fini).
3 Groupes abéliens de type fini ; sous-groupes de Zn .
4 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
5 Parties génératrices d'un groupe ; exemples ; applications.
6 Exemples de groupes finis.
7 Groupes opérant sur un ensemble, orbites. Applications.
8 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
9 Groupe linéaire. Exemples de sous-groupes.
10 Sous-groupes finis de O (2 , R) , O (3 , R) . Polygones et polyèdres réguliers.
11 Exemples d'idéaux et d'anneaux quotients d'un anneau commutatif unitaire.
12 Congruences dans Z , Z / nZ . Applications.
13 Anneaux factoriels, anneaux principaux. Exemples.
14 Propriétés élémentaires des nombres premiers.
15 Anneaux principaux : PGCD, PPCM, théorème de Bézout, algorithme de calcul.
16 Exemples de corps.
17 Corps finis. Applications.
18 Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Applications.
19 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Exemples et applications.
20 Corps des nombres complexes.
21 Groupe multiplicatif des nombres complexes. Exponentielle complexe. Racines de l'unité.
22 Racines des polynômes à coefficients réels ou complexes. Localisation des racines.
23 Algèbres des polynômes à n indéterminées ($n \geq 1$) . Applications.
24 Racines des polynômes à une indéterminée. Résultant.
25 Polynômes symétriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.
26 Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Décomposition en éléments simples. Applications.
27 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang d'une application linéaire.
28 Rang d'une application linéaire. Matrices équivalentes.
29 La dualité en algèbre linéaire ; applications (on se limitera au cas de la dimension finie).
30 Résolution d'un système de n équations linéaires à p inconnues. Méthodes pratiques de résolution exactes ou approchées.
31 Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes des matrices. Applications : systèmes linéaires, inversion des matrices ...
32 Déterminant. Applications en algèbre, géométrie ...

33 Vecteurs propres, valeurs propres et réduction des endomorphismes.

34 Applications de la réduction d'un endomorphisme.

35 Polynômes en un endomorphisme. Polynômes minimal et caractéristique.

36 Formes bilinéaires symétriques, orthogonalité, isotropie. Applications.

37 Décompositions en carrés d'une forme quadratique. Applications.

38 Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie). Groupe orthogonal.

39 Espaces vectoriels hermitiens (de dimension finie). Groupe unitaire.

40 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

41 Application de la théorie des formes quadratiques à l'étude affine des quadriques en dimension 3.

42 Réduction des endomorphismes normaux. Applications.

43 Réduction des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.

44 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie ; formes réduites. Cas des dimensions 2 et 3.

45 Exemples de groupes d'isométries en géométrie du plan ou de l'espace.

46 Coniques dans le plan affine euclidien.

47 Quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.

48 Etude métrique locale des surfaces dans un espace euclidien de dimension 3. Courbure. Application de Gauss.

49 Barycentres dans un espace affine. Applications.

50 Angles.

51 Exemples de problèmes d'angles et de distances en géométrie.

52 Exemples de propriétés affines et de propriétés métriques en géométrie plane.

53 L'inversion plane. Le groupe circulaire.

54 La sphère de Riemann. Les homographies.

55 Cercles et sphères. Familles linéaires de cercles.

56 Etude locale des courbes dans le plan ou l'espace de dimension 3. Exemples.

57 Propriétés métriques des courbes dans le plan ou l'espace de dimension 3. Exemples.

58 Exemples de recherche et d'étude d'enveloppes dans le plan.

59 Applications géométriques des nombres complexes.

60 Convexité dans les espaces affines réels de dimension finie.

61 Etude affine locale des surfaces dans l'espace de dimension 3.

62 Recherche de courbes satisfaisant à une condition différentielle.

Épreuve d'algèbre.

De l'utilisation du temps de préparation.

De façon générale, on peut donner aux étudiants le conseil suivant : puisque les trois heures de préparation ne sont que rarement suffisantes pour découvrir des notions totalement neuves, il est préférable pour eux de les consacrer à mettre en ordre leurs connaissances à ce sujet, et à construire un plan cohérent et quelque peu consistant. Sous la pression de l'épreuve, il est peu probable qu'ils pourront assimiler une démonstration entièrement nouvelle, ou les conséquences d'un résultat qu'ils viennent de rencontrer. Des candidats sérieux peuvent obtenir des notes excellentes grâce à une organisation réfléchie de leurs connaissances, sans pour autant faire du funambulisme sur la simplicité de $\mathcal{A}_n$ ou le lemme de Hensel.

Reste le choix du sujet, parmi les deux proposés. Il n'est que trop certain que la géométrie est systématiquement reléguée par les candidats. La cause ? Sans doute le fait que la géométrie n'est enseignée à l'heure actuelle, dans sa version élémentaire, que dans les classes préparatoires (et encore, avec un succès probablement très mitigé). Elle l'est aussi dans les lycées ; mais, pour une raison ou pour une autre, éloignement chronologique ou hiatus intellectuel, les candidats ne maîtrisent pas toujours les programmes de l'actuelle terminale C. Quant à l'université et aux préparations à l'agrégation, elles supposent manifestement connues des notions tout aussi manifestement ignorées. Peut-être conviendrait-il que les candidats décident de ne pas faire l'impasse sur cette matière, qui a parfois été représentée deux fois dans un même tirage. Cela leur permettrait par ailleurs d'éviter le choix forcé d'un sujet d'algèbre pure trop conceptuel pour eux.

Les étudiants ne doivent pas prendre pour argent comptant les affirmations relevées dans les ouvrages. Une coquille, une ellipse, voire une erreur, sont toujours possibles ; qu'elles soient reproduites sans broncher est plus inquiétant que leur simple existence. Le candidat ne doit pas non plus oublier qu'un ouvrage est un tout, qui porte souvent en lui-même ses propres motivations, et qui peut mal supporter de se voir dépecer ; ainsi, il y a un côté absurde à démontrer qu'un sous-corps d'un corps à p^n éléments est un corps à p^m éléments, avec m divisant n, en s'appuyant sur le fait que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique : et cela même si un ouvrage propose cette démonstration ! De même, donner comme exemple d'anneau principal l'anneau $K[X,Y]/(Y-X^2)$ n'a pas de sens, malgré la référence bibliographique. Notons aussi, puisque le jury en fait les frais depuis de longues années, qu'un ouvrage donne du théorème de d'Alembert-Gauss une démonstration très algébrique et fort intéressante, mais laisse dans l'ombre une justification concernant une expression symétrique en une famille de scalaires.

De la présentation au tableau.

L'agrégation étant un concours de recrutement d'enseignants, on comprendra que le jury accorde aux qualités pédagogiques une importance significative. Recopier un plan au tableau est un acte psychologiquement désastreux et pédagogiquement inefficace. Ce comportement induit un désintérêt pour la leçon, d'abord chez le candidat, ensuite chez les auditeurs. Le rythme de la pensée devient disloqué, le ton monocorde, l'écriture mécanique. Le candidat se résume à un dos, muni d'une feuille et d'une craie. Ainsi, il ne peut percevoir les réactions du jury face à d'éventuelles erreurs, et laisse planer un doute sur sa capacité à restituer spontanément le contenu de son plan.

Le désintérêt systématique vis-à-vis d'une langue correcte, pour exceptionnel qu'il soit, peut conduire un candidat à présenter un plan vermoulu de fautes d'orthographe ; se rappelant à nouveau que l'agrégation est destinée à choisir des enseignants, le jury en tirera les conséquences.

Il n'est pas inutile de commencer la leçon par une ou deux phrases de présentation, évoquant les motivations ou les objectifs. Cette période doit néanmoins, compte tenu du temps très limité accordé, être réduite au strict nécessaire.

De la construction des leçons.

Le candidat doit savoir faire appel à des notions ou résultats pédagogiquement et logiquement antérieurs à une leçon donnée. Illustrons ceci au travers du sujet "Espaces hermitiens, groupe unitaire". Il est exclu de commencer cette leçon par de longues considérations sur les formes sesquilinéaires hermitiennes. Une phrase introductive du style : "cette leçon suppose connues les notions de formes sesquilinéaires et quadratiques hermitiennes, ainsi que les résultats généraux qui s'y rapportent dans le cadre des **C**-espaces vectoriels de dimension finie" devrait largement suffire. De la même façon, il convient d'éviter, sur un sujet tel que "Parties génératrices d'un groupe", les attendus que supposerait une leçon sur les groupes. Très généralement, les leçons dont le titre débute par "Applications de la théorie X" doivent commencer là où la théorie X se termine.

De la terminologie.

L'utilisation d'une terminologie adaptée devrait être l'un des soucis des candidats. La leçon "Corps finis, exemples, applications" peut illustrer ce propos. Il n'est pas rare qu'après un paragraphe entier consacré aux corps finis, et notamment à leur description complète, apparaisse le théorème de Wedderburn, énoncé sous la forme suivante : "tout corps fini est commutatif". Cela suggère que les corps considérés au préalable n'étaient pas supposés commutatifs ; or, il est bien nécessaire qu'ils le soient si l'on veut leur appliquer les théorèmes relatifs aux polynômes à une indéterminée, essentiels pour l'étude des corps (commutatifs) finis.

Cette incongruité pourrait être évitée si l'on décidait qu'un corps est nécessairement commutatif, et si l'on désignait par "anneau à division" ou encore "algèbre à division" une structure d'anneau, où tous les éléments non nuls sont inversibles ("algèbre" renvoyant alors à la structure d'algèbre sur le centre). Le théorème de Wedderburn pourrait ainsi s'énoncer : " tout anneau à division, fini, est commutatif", ce qui est tout de même plus parlant que l'énoncé suivant : "tout corps non commutatif fini est commutatif."

Des contenus.

La réduction complète de Jordan, sur un corps algébriquement clos, est parfois présentée par des candidats soit brillants, soit téméraires. Rappelons à ces derniers qu'il est alors nécessaire de bien mesurer sa formulation : par exemple, des blocs distincts peuvent posséder les mêmes termes diagonaux et avoir même taille. L'introduction d'un tel théorème doit être fortement motivée. Il est absurde de l'appliquer au calcul des puissances d'un endomorphisme f, qui ne nécessite que la connaissance d'un polynôme annulateur, ou éventuellement la décomposition souvent désignée par "décomposition de Dunford" (c'est-à-dire : f=d+n, dn=nd, n nilpotent, d diagonalisable). En réalité, la réduction de Jordan ne présente d'intérêt que si l'on recherche les orbites de $M_n(\mathbf{C})$ sous l'action (par conjugaison) de $GL_n(\mathbf{C})$, ou si l'on cherche à résoudre des problèmes complexes tels que la recherche des espaces stables par f, ou encore le commutant de $\mathbf{C}[f]$.

L'introduction du sous-groupe dérivé D(G) d'un groupe G devrait être l'occasion de déterminer certains homomorphismes de G dans un groupe abélien H. On sait en effet qu'un tel homomorphisme se factorise au travers du quotient G/D(G). Par exemple, une fois déterminé le sous-groupe dérivé de $GL_n(K)$, il est plausible de rechercher les homomorphismes de $GL_n(K)$ dans K^*.

Pour traiter la notion de résultant, le candidat pourra par exemple penser à l'élimination, qui illustre pratiquement les résultats théoriques obtenus (existence d'une condition d'élimination). On peut aussi trouver des implications topologiques : par exemple, le fait que les endomorphismes d'un **C**-espace vectoriel de dimension finie n ayant n valeurs propres (distinctes) forment un ouvert de l'espace de tous les endomorphismes.

De certaines leçons.

La leçon "Propriétés élémentaires des nombres premiers" n'est pas nécessairement une leçon facile, quoi qu'en puissent penser les candidats. L'attribut "élémentaire" signifie d'une part que les candidats ne sont pas réputés s'attaquer à la théorie analytique des nombres, et d'autre part que les propriétés les plus ...élémentaires ne doivent pas faire défaut. Il est indispensable à cette occasion de parler de la décomposition en facteurs premiers dans l'anneau des entiers relatifs, et de s'intéresser aux congruences modulo un nombre premier. La nature de la série des inverses des nombres premiers relève elle aussi de techniques élémentaires.

La leçon "Racines des polynômes à coefficients réels ou complexes ; localisation des racines" n'est pas une leçon sur les racines des polynômes à une indéterminée. Elle doit s'appuyer sur les résultats généraux, supposés connus, et mettre en oeuvre les spécificités de **R** (ordre), ou de **C** (caractère algébriquement clos). Dans les deux cas, la structure de corps valué est fondamentale, et doit être mise en valeur au travers de procédés analytiques de recherche des racines. La séparation des racines a parfaitement sa place dans une telle leçon. Elle peut en outre constituer une illustration facile de la notion de discriminant.

La leçon "Racines des polynômes à une indéterminée" débute dans de nombreux cas par : "Soit A un anneau commutatif ; considérons un élément de A[X] ; etc". Le jury frémit. D'expérience, il sait que deux cas sont possibles :
- ou bien le candidat énonce une liste de théorèmes faux (si l'on peut se permettre cet oxymoron), par exemple : "un polynôme non nul de A[X] admet un nombre fini de racines" ;
- ou bien le candidat formule quelques résultats généraux, sans application aucune, et n'entre dans le vif du sujet qu'après avoir réintégré le giron des anneaux intègres, voire des corps. Autant dire qu'il aura perdu son temps.

Bien entendu, on ne peut pas exclure qu'un jour, un candidat illustre le cadre général dans lequel il s'est placé : il pourra alors déterminer les inversibles de A[X], ou bien réduire un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$ modulo un entier non premier. Non, on ne peut pas complètement l'exclure...

A contrario, certains étudiants par trop précautionneux situeront la leçon dans le cadre des corps de caractéristique nulle, puis énonceront le théorème de Wilson.

Ces situations illustrent la double nécessité de se placer dans un cadre suffisamment large pour traiter les applications envisagées, et d'éviter des généralisations sans substance.

La leçon "Groupe linéaire ; exemples de sous-groupes" nécessite certes de parler de l'importante notion d'opération élémentaire, et des matrices associées ; elle ne peut en aucun cas s'y réduire. Si l'on n'oublie pas que la première qualité d'un candidat est de pouvoir investir ses connaissances dans un sujet, il paraît clair que $O_n(\mathbf{R})$, $SO_n(\mathbf{R})$, les groupes des matrices diagonales inversibles, triangulaires supérieures inversibles, triangulaires supérieures inversibles à diagonale formée de 1, le groupe des matrices de permutation, le groupe des matrices inversibles de $\mathbf{R}[A]$, où A est dans $M_n(\mathbf{R})$, sont des exemples de sous-groupes de $GL_n(\mathbf{R})$ immédiatement accessibles.

La leçon "Exemples de propriétés affines et de propriétés métriques en géométrie" doit être l'occasion de comparer deux structures sur un espace réel, une structure affine et une structure euclidienne, ou de manière équivalente d'illustrer les actions de deux groupes sur cet espace. Il est donc indispensable d'examiner au préalable ce qui relève de l'une ou l'autre notion. On peut aussi donner des exemples de situations où ces notions s'éclairent l'une l'autre (groupes d'applications affines laissant stable un sous-ensemble compact). De façon générale, les espaces affines devraient être mieux aimés des candidats, pour que ceux-ci soient mieux appréciés par le jury ; ils sont source de nombreuses questions, et de peu de réponses.

Les leçons contenant des théorèmes d'existence doivent, autant que possible, déboucher sur des procédés effectifs de construction : décomposition de "Dunford" d'une matrice (le jury en proposera peut-être une, de taille petite), écriture d'un élément de $SL_n(K)$ comme produit de matrices de transvection, recherche de bases orthogonales pour une forme quadratique, écriture d'un polynôme symétrique à l'aide des polynômes symétriques élémentaires, calcul d'un polynôme cyclotomique (lorsque le candidat cite cette notion dans son plan), etc.

La leçon sur les enveloppes, dans sa formulation, contient les enveloppes de familles de courbes, qui doivent donc être évoquées. La théorie n'est d'ailleurs pas sensiblement différente de celle élaborée pour les familles de droites. On pourra, dans cette leçon, évoquer les contours apparents de surfaces réglées, les équations tangentielles des coniques, les caustiques par réflexion, et la dualité. Il est nécessaire de donner un cadre théorique satisfaisant, même minimal, de donner des conditions suffisantes d'existence, d'appliquer la théorie aux développées, et de traiter un exemple d'équation différentielle conduisant à ce problème (Clairaut).

Cette année, les candidats ont démontré une meilleure connaissance des règles du concours et, partant, ont amélioré leurs prestations, à contenu scientifique équivalent. Cela traduit un souci réel de la performance, sensible probablement davantage chez les candidats moyens que chez les candidats peu solides, handicapés par des faiblesses souvent rédhibitoires ; mais, curieusement, des candidats *a priori* brillants n'ont pas su exploiter leurs capacités.

Ces candidats commettent ainsi une double erreur : la première, celle de laisser d'eux une image peu flatteuse, voire de se trouver dans la nécessité de se représenter, ce qui, compte tenu du nombre de places pourvues, relève de l'exploit. La seconde est plus lourde de conséquences. Une préparation à l'agrégation devrait être l'occasion, pour ces étudiants munis d'une solidité scientifique manifestement suffisante, de faire un examen de conscience mathématique, en s'interrogeant sur la qualité des relations qu'ils nouent, au cours de leur activité intellectuelle, entre les connaissances acquises. Savoir faire un exposé de synthèse, donner différents éclairages conceptuels à un même objet ou, au contraire, illustrer une notion en élargissant ses horizons, faire miroiter d'un groupe de matrices les différentes facettes, dire de la géométrie, de l'arithmétique et de l'analyse en parlant de formes quadratiques, réaliser un corps fini comme un quotient d'anneau de polynômes, une extension de corps ou une algèbre de matrices, parler d'opérations élémentaires, de déterminants et de réseaux pour discuter des groupes libres de type fini, considérer que les opérations de groupes créent, grâce à un langage approprié, une problématique qui concentre et qui élargit, voilà, dans le cadre d'une planche d'algèbre, des motivations réalistes pour ces candidats. Il ne leur faudrait pas oublier que cette période de leur vie, où ils sont sur le point de franchir la frontière qui les sépare de la spécialisation, est une occasion de se créer une culture, qui soit leur, et qui enrichisse celle des autres.

Les candidats qui, sans survoler le programme de l'agrégation, sont parvenus à en cerner les contours, ont fourni les gros bataillons de l'oral. La plupart d'entre eux ont su suivre une stratégie minimale, consistant à présenter un plan cohérent, à proposer des développements bien appris, et à répondre sans hâte excessive à des questions dont le jury a bien pris soin de mesurer la difficulté. Cette stratégie a indiscutablement été payante.

Tout au plus peut-on regretter que certains des postulants à l'agrégation soient allés jusqu'à écrire durant le plan les démonstrations de leurs développements, camouflées par une ribambelle de lemmes si minuscules que le jury le plus indulgent n'aurait pu manquer d'y voir une manœuvre. Il convient donc de rappeler que le développement doit être l'occasion pour le candidat de montrer une certaine compréhension du sujet traité, ce qui signifie pour l'agrégatif un recours minimal aux notes, et une certaine aptitude à répondre aux questions à ce sujet.

Lecons d' ANALYSE 1994 : Liste des Sujets d' Oral

1 Utilisation de la notion de compacité en analyse.
2 Exemples d'espaces compacts.
3 Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.
4 Connexité : applications.
5 Espaces complets. Exemples et applications.
6 Théorème(s) du point fixe ; applications.
7 Prolongement de fonctions : exemples.
8 Continuité uniforme. Applications, exemples et contre-exemples.
9 Donner une construction de R ; en déduire les principales propriétés de R.
10 Propriétés topologiques de R et sous-ensembles remarquables de R.
11 Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en analyse.
12 Exemples d'utilisation de la notion de parties denses en analyse.
13 Utilisation de la continuité uniforme en analyse.
14 Espaces vectoriels normés. Exemples. Applications.
15 Exemples d'utilisation d'espaces de Hilbert en analyse.
16 Espaces vectoriels normés de dimension finie ; exemples ; propriétés ; applications.
17 Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre et de calcul de leurs normes.
18 Espaces de Hilbert. Exemples et applications.
19 Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemple et contre-exemples.
20 Fonctions convexes d'une variable réelle ; applications.
21 Développements limités, applications.
22 Exemples de développements asymptotiques.
23 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales.
24 Fonctions différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Applications.
25 Théorème des accroissements finis et applications pour les fonctions de plusieurs variables.
26 Différentes formules de Taylor. Majoration des restes. Applications.
27 Problèmes d'extremum.
28 Applications réciproques : théorèmes d'existence ; exemples.
29 Exemples d'étude de fonctions définies implicitement.
30 Exemples d'utilisation du théorème des fonctions implicites.
31 Exemples d'utilisation de changements de variables en analyse et en géométrie.
32 Illustrer par des exemples et contre-exemples la théorie des séries numériques.
33 Exemples d'études de suites de nombres réels ou complexes. Applications.
34 Exemples d'études de suites réelles ou complexes définies par divers types de relations de récurrence. Applications.

35 Séries numériques : différentes notions de convergence ; applications.
36 Exemples d'étude d'une fonction définie par une série.
37 Différentes notions de convergence d'une suite de fonctions. Exemples.
38 Séries de fonctions, convergence uniforme, convergence normale. Exemples.
39 Convergence d'une série entière. Propriétés de la somme.
40 Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.
41 Représentation d'une fonction périodique par une série de Fourier. Applications.
42 Exemples d'applications des séries de Fourier.
43 Equations différentielles $y' = f(x,y)$. Solutions maximales ; exemples.
44 Equations différentielles linéaires.
45 Etude détaillée, sur un petit nombre d'exemples, d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.
46 Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles.
47 Exemples d'étude qualitative des solutions ou des courbes intégrales d'une équation différentielle.
48 Illustrer par des exemples la résolution approchée d'équations différentielles.
49 Intégrales impropres. Exemples.
50 Problèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples.
51 Continuité et dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.
52 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
53 Exemples de calcul d'intégrales.
54 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
55 Exemples de problèmes d'interversion de limites.
56 Etude, sur des exemples, de la rapidité de convergence d'une suite ou d'une série de nombres réels ; applications.
57 Calcul approché de solutions des équations $f(x) = 0$; illustration par des exemples.
58 Calcul approché de la somme d'une série numérique.
59 Méthodes de calcul approché d'intégrales.
60 Théorèmes limites en calcul des probabilités ; applications.
61 Le jeu de pile ou face (suites de variables de Bernoulli indépendantes).
62 Probabilité conditionnelle. Applications.
63 Loi binomiale, loi de Poisson. Applications.
64 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

Rapport sur l'oral d'Analyse

Une remarque sur les sujets

Les leçons portant sur les probabilités ont atteint cette année leur régime « de croisière ». Le jury espère que cette fréquence incitera les candidats à ne pas négliger cet aspect de l'analyse.

Le plan

Sil arrive encore que des candidats mal préparés présentent des plans trop pauvres, le niveau général des plans présentés est en progrès. Cette constatation optimiste doit cependant être tempérée, et les observations des rapports d'oral des années passées restent valables. Trop de candidats dominent mal leur sujet, ou présentent des plans incohérents. Tantôt les énoncés ne sont pas présentés dans l'ordre logique de leur démonstration, tantôt le candidat ne se rend pas compte qu'il formule plusieurs fois de suite le même énoncé, avec une terminologie différente.

Le jury regrette une fois encore la pauvreté de certains exemples proposés. Citer le corps des nombres réels comme seul exemple d'espace complet est très insuffisant. Dans l'étude d'une fonction définie par une intégrale ou une série, étudier une fonction qui s'exprime simplement à l'aide des fonctions usuelles est maladroit.

Les propositions d'exposé

Trop de candidats ont répété cette année des erreurs maintes fois signalées :

— Propositions d'exposé hors sujet (peut-être pour tenter de se replier sur une leçon voisine mieux préparée?)

— Propositions d'exposé triviales, sans rapport avec l'ambition affichée du plan.

— Propositions "avec réserves". Le candidat qui déclare au jury qu'il propose le sujet A, ou, *à la rigueur* le sujet B, ne doit pas s'attendre à beaucoup de compréhension de la part du jury, surtout si l'exposé A est très court ou hors sujet.

L'exposé

Le jury regrette d'avoir dû préciser à de trop nombreux candidats que l'exposé ne se fait pas les yeux fixés sur des notes tenues à la main.

Les raisonnements sont beaucoup trop souvent imprécis : hypothèses et conclusions sont mélangées, les variables sont mal définies, les suites confondues avec leurs termes, les expressions pas ou mal quantifiées. Il ne s'agit pas de noyer l'exposé dans un déluge de quantificateurs—il est toujours préférable de les remplacer par leur équivalent en langage naturel— mais à l'opposé une phrase telle que «soit C l'ensemble des suites telles que pour $\varepsilon > 0$ il existe $\mathbb{N}$...» annonce inéluctablement une démonstration vide de sens. L'accumulation de telles négligences dans un exposé peut lui ôter beaucoup de sa valeur.

Aussi les candidats ne doivent-ils pas se sentir outragés si on les interrompt pour leur faire préciser une hypothèse ou un raisonnement, mais plutôt voir dans cette intervention le désir sincère de valoriser au mieux leur prestation.

Enfin, la crainte de manquer de temps ne doit pas les conduire à abuser des sigles et abréviations, tels que «EDL, TCL, TAF, TFI, TIL, S.W., d'A.G., LASS », que l'on laisse au lecteur le plaisir de déchiffrer.

Remarques sur quelques leçons

Le lecteur futur candidat est invité à relire les rapports des années passées, toujours d'actualité. Voici quelques observations, forcément incomplètes, faites au fil des interrogations.

Corps des réels

Si dans l'intitulé de la leçon une construction des réels est demandée, en donner un schéma précis, mais ne pas en faire l'unique objet du plan. Si la construction n'est pas demandée, préciser clairement les propriétés de $\mathbb{R}$ qui seront postulées ou admises.

Ne pas oublier les homéomorphismes entre intervalles de $\mathbb{R}$.

Fonctions d'une variable réelle

Les plans et les exposés restent souvent trop élémentaires. Sans chercher systématiquement des exemples monstrueux, on peut citer des exemples de fonctions continues non dérivables, etc....

Développements limités et asymptotiques

Les théorèmes d'existence de développements limités, notamment pour les fonctions réciproques, sont trop souvent négligés.

Espaces complets

La précompacité et le théorème de projection sur un convexe complet d'un espace préhilbertien sont fréquemment oubliés.

Uniforme continuité

Les leçons sur ce sujet sont souvent décevantes. Faute d'avoir réfléchi au sujet, beaucoup de candidats sont incapables de résoudre les exercices les plus simples sur le comportement à l'infini des fonctions uniformément continues, sur les fonctions hölderiennes, etc...

Intégration, fonctions définies par des intégrales

Les candidats sont de plus en plus nombreux à utiliser l'intégrale de Lebesgue, et le jury ne peut que les en féliciter. Il faut qu'ils soient conscients, néanmoins, que cela ne leur évitera pas d'avoir à étudier la convergence, éventuellement uniforme par rapport à un paramètre, d'intégrales impropres non absolument convergentes. Le choix de l'intégrale de Riemann peut s'avérer raisonnable pour certains candidats.

Calcul approché d'intégrales

Les candidats semblent éprouver des difficultés à trouver un équilibre entre les méthodes, pratiques mais un peu obsolètes, des trapèzes et de Simpson, et des considérations vagues sur l'interpolation polynomiale. Citons comme autres pistes qu'on pourrait suivre : La méthode de Romberg, épaulée par la formule d'Euler-Maclaurin, et la méthode de Gauss, justifiée par des techniques hilbertiennes.

Formules de Taylor

L'erreur classique qui conduit à utiliser l'égalité de Taylor-Lagrange pour des fonctions vectorielles n'est pas toujours évitée.

Les formules de Taylor pour des fonctions de plusieurs variables, et notamment leur application aux recherches d'extrema, ont mis en difficulté beaucoup de candidats qui dominaient mal le calcul différentiel. Notamment les questions portant sur la signification exacte de $D^n f(x).h$ reçoivent souvent des réponses surprenantes.

Fonctions différentiables

Les candidats ont parfois une vision si abstraite de la différentiabilité qu'ils sont incapables de l'utiliser dans les cas les plus simples. Le théorème de Schwarz, la caractérisation des formes différentielles exactes sont souvent oubliés.

Fonctions définies implicitement.

De nombreux candidats confondent la notion de fonction implicite avec celle de fonction ne s'exprimant pas à l'aide des fonctions usuelles. Précisons que l'étude de la fonction Gamma, par exemple, ne pourra rentrer qu'acrobatiquement dans le cadre de cette leçon, alors qu'au contraire il semblerait naturel d'y voir étudier un exemple de courbe intersection de deux surfaces...

Séries entières

L'étude au bord du disque de convergence, même dans les cas les plus simples, laisse perplexes des candidats qui ont pourtant mis dans leur plan des versions sophistiquées du théorème d'Abel.

Une fois qu'on a établi la continuité et la dérivabilité terme à terme de la somme d'une série entière dans le disque ouvert de convergence, son intégration terme à terme ne mérite plus les longs développements qu'on lui consacre parfois. En revanche les méthodes de recherche de développements en série entière sont souvent négligées.

Rappelons que l'exposé de la notion de série composée demande du soin. Enfin les applications des séries entières au calcul intégral et à la résolution d'équations différentielles sont intéressantes et faciles à expliquer.

Séries de Fourier

La convergence en moyenne quadratique est trop souvent oubliée.

BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Pendant la préparation de l'oral, les candidats peuvent utiliser les ouvrages mis à leur disposition sur place, dont la liste figure ci-après, ou les ouvrages qu'ils ont apportés eux-mêmes, à condition qu'il s'agisse de livres imprimés, diffusés dans le commerce et dépourvus de notes manuscrites.

En outre, les Ecoles Normales Supérieures déposent un nombre important d'ouvrages à la bibliothèque de l'agrégation pendant la durée du concours : ces ouvrages peuvent bien entendu être consultés par tous les candidats.

La documentation utilisée par les candidats ne saurait contenir des ouvrages que ceux-ci n'auraient qu'à recopier, ce qui ôterait toute signification à l'épreuve. Le jury se réserve donc le droit de ne pas autoriser un ouvrage de ce type, même muni du dépôt légal.

D'autre part, la restriction aux ouvrages imprimés et diffusés dans le commerce répond à un souci d'équité : tout candidat doit pouvoir en principe se procurer tout document autorisé.

Pour ces raisons, le jury n'autorise pas l'usage de montages "raisonnés" d'extraits photocopiés d'articles de revues ou d'encyclopédies ; l'utilisation publique de tels montages contrevient en outre aux lois sur le copyright.

Le jury attire enfin l'attention des candidats sur le fait que l'usage ou la tentative d'usage de documents non autorisés pendant la préparation des épreuves orales constitue une fraude ou une tentative de fraude à un concours public et serait sanctionné comme tel.

BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION DE MATHEMATIQUES EN 1994

ARNAUDIES	Cours de Mathématiques, tome 1 : Algèbre	
ARNOLD	Equations différentielles ordinaires	(MIR)
ARTIN	Algèbre Géométrique	(Gauthier-Villars)
BASS	Cours de Mathématiques, tomes 1 et 2	(Masson)
AVEZ	Calcul différentiel	
BERGER	Géométrie, index, tomes 1 à 5	(CEDIC-Nathan)
	Problèmes de Géométrie rédigés et commentés	(Colin)
BERGER et GOSTIAUX	Géométrie différentielle	(Colin)
BIRKHOFF et MACLANE	Algèbre : 1. Structures fondamentale	
	2. Les grands théorèmes	(Gauthier-Villars)
BLANCHARD	Les corps non commutatifs	(P.U.F.)
BOURBAKI	Les volumes suivants :	(Hermann)
	Théorie des ensembles	
	Algèbre	
	Fonctions d'une variable réelle	
	Topologie générale	
	Espaces vectoriels topologiques	
	Intégration	
BOUVIER et RICHARD	Groupes	(Hermann)
BREZIS	Analyse fonctionnelle	
BROUSSE	Mécanique	(Colin)
CABANNES	Cours de mécanique générale	(Dunod)
CAGNAC, RAMIS, COMMEAU	Nouveau cours de Mathématiques Spéciales	(Masson)
CAGNAC et THIBERGE	Géométrie, classes terminales C	(Masson)
CARTAN	Fonctions analytiques	(Hermann)
CARTAN	Formes différentielles	(Hermann)
	Calcul différentiel	(Hermann)
CHAMBADAL et OVAERT	Cours de Mathématiques, tomes 1 et 2	(Gauthier-Villars)
CHEVALLARD et ROLLAND	Théorie des séries	(CEDIC)
CHOQUET	Cours d'analyse	(Masson)
	L'enseignement de la géométrie	(Hermann)
CIARLET	Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation	(Masson)
COUTY	Analyse	(Colin)
CROUZEL et MIGNOT	Analyse numérique des équations différentielles	(Masson)

DEHEUVELS	Formes Quadratiques et Groupes classiques	(P.U.F.)
DIEUDONNE	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	(Hermann)
	Sur les groupes classiques	(Hermann)
	Calcul infinitésimal	(Hermann),
	Eléments d'analyse, tomes 1 et 2	(Gauthier-Villars)
DIXMIER	Analyse M.P.	(Gauthier-Villars)
DUBREIL	Leçons d'algèbre moderne	(Dunod)
DUBUC	Géométrie plane	(P.U.F.)
EXBRAYAT et MAZET	Algèbre, Analyse, Topologie	
FADEEV et SOMINSKY	Recueil d'exercices d'algèbre supérieure	(MIR)
FELLER	An introduction to probability theory and its applications, tomes 1 et 2	(Wiley)
FERRIÈR	Mathématiques pour la licence	
FLORY	Exercices de Topologie et d'Analyse, tomes 1 à 4	(Vuibert)
FRENKEL	Algèbre et Géométrie	(Hermann)
	Géométrie pour l'élève professeur	
GANTMACHER	Théorie des matrices	(Dunod)
GENET	Mesure et intégration	(Vuibert)
GODEMENT	Algèbre	(Hermann)
HARDY et WRIGHT	An introduction to the theory of numbers (5th edition)	(Oxford)
HENNEQUIN et TORTRAT	Théorie des probabilités et quelques applications	(Masson)
HERVE	Les fonctions analytiques	(P.U.F.)
JACOBSON	Basic algebra, tomes 1 et 2	(Freeman)
KERBRAT	Géométrie des courbes et des surfaces	(Hermann)
KNUTH	The art of computer programming, (vol. 1,2,3)	(Addison-Wesley)
KREE	Introduction aux mathématiques appliquées	(Dunod)
KRIVINE	Théorie axiomatique des ensembles	(P.U.F.)
LANG	Introduction aux variétés différentiables	
	Algèbre	
	Linear Algebra	(Addison-Wesley)
LEBORGNE	Calcul différentiel et géométrie	
D. LEHMANN-C. SACRE	Géométrie différentielle des surfaces	(P.U.F.)
LELONG-FERRAND et ARNAUDIES	Cours de mathématiques, tomes 1 à 4	(Dunod)
LELONG-FERRAND	Géométrie différentielle	(Masson)
LINDSAY	A concrete introduction to higher algebra	
MALLIAVIN	Géométrie différentielle intrinsèque	(Hermann)

MARTIN	Géométrie	(Colin)
METIVIER	Introduction à la théorie des probabilités	(Dunod)
MUTAFIAN	Le défi algébrique (tomes 1 et 2)	(Vuibert)
NEVEU	Bases mathématiques du calcul des probabilités	(Masson)
OVAERT et VERLEY	Exercices et Problèmes, Classes Préparatoires et 1er cycle, Algèbre (vol. 1), Analyse (vol. 1)	(CEDIC-Nathan)
PERRIN	Cours d'algèbre	(E.N.S.J.F.)
POLYA et SZEGO	Problems and theorems in analysis (tomes 1 et 2)	(Springer)
PRAT	Eléments de révision pour le programme d'analyse à l'écrit de l'Agrégation	(Univ. PARIS VI)
QUERRE	Cours d'analyse	(Masson)
QUEYSANNE	Algèbre	(Colin)
RALSTON et RABINOWITZ	A first course in numerical analysis	(Mac Graw-Hill)
RAMIS,DESCHAPS et ODOUX	Mathématiques spéciales (tomes 1 à 5)	(Masson)
RIDEAU	Exercices de calcul différentiel	(Hermann)
RIESZ et NAGNY	Leçons d'analyse fonctionnelle	(Gauthier-Villars)
RUDIN	Real and complex analysis	(Mac Graw-Hill)
SAMUEL	Théorie algébrique des nombres	(Hermann)
SCHWARTZ	Cours d'analyse (tomes 1 et 2)	(Hermann)
	Topologie Générale et Analyse fonctionnelle	(Hermann)
SEDGEWICK	Algorithms	(Addison-Wesley)
SERRE	Cours d'arithmétique	(P.U.F.)
SAMUEL	Géométrie projective	(P.U.F.)
TAUVEL	Quelques points de Mathématiques généralesl pour l'Agrégation	(Univ. PARIS VI)
TITCHMARSH	The theory of functions (2nd edition)	(Oxford)
VALIRON	Cours d'analyse (tomes 1 et 2)	(Masson)
VAUQUOIS	Les probabilités	(Hermann)
WARUSFEL	Structures algébriques finies	(Hachette)
WITTAKER	"A course of modern analysis"	
ARNAUDIES	"Cours de Mathématiques"	(Edition Dunod)
BAKHALOV	"Methodes numériques"	(Edition Mir)
BENDER	"Advanced mathematics for scientists	(Mc Graw hill)
ARNOLD	"Compléments sur les équations différentielles"	(Edition Mir)

BERGER	Géométrie 1 et 2	(Nathan)
P.M.COHN	Algebra , tome 1	(J.Wiley)
J.P.DEMAILLY	Analyse numérique et équations différentielles	(P.U.G.)
DEVANEY	An introduction to chaotic dynamical systems	(Addison Wesley)
T.W.KORNER	Fourier Analysis	(Cambridge Univ.Press)
LESIEUR- MEYER-JOULAIN-LEFEBVRE	Algèbre linéaire ,géométrie	(Armand Collin)
MNEIMNE-TESTARD	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	(Armand Collin)
L.SCHWARTZ	Analyse I et II (nouvelle édition)	(Hermann)
I.STEWART	Galois theory	(Chapmann & Hall)
IRELAND-ROSEN	A classical introduction to modern number theory	SPRINGER GTM
J.MAWHIN	Analyse .Fondements,techniques,évolution.	DE BOECK
G.TENENBAUM	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Inst. E.CARTAN -Nancy .
P.NAUDIN C.QUITTE	Algorithmique algébrique	(Masson)
A.POMMELET	Cours d'Analyse	(Ellipses)
H.S.WILF	Generatingfunctionology	(Acad.Press)

120 CENTRES DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUE AU SERVICE DE L'ÉDUCATION

Points de vente du Centre National de Documentation Pédagogique
Librairie : 13, rue du Four - 75270 Paris Cedex 06 / Tél. : 46 34 54 80
Vente par correspondance : CNDP - 77568 Lieusaint Cedex / Tél. : 64 88 46 29

Points de vente des Centres Régionaux et Départementaux
Légende : ex. MARSEILLE : CRDP
ex. *Vaucluse* : CDDP

01 *Ain*
8, rue Magenta
01011 Bourg-en-Bresse Cedex
74 23 69 55

02 *Aisne*
Avenue de la République
02000 Laon - 23 20 45 60

03 *Allier*
Château de Bellevue - BP 111
03403 Yzeure - 70 46 07 66

04 *Alpes de Haute-Provence*
22, avenue des Charrois
04000 Digne - 92 31 05 87

05 *Hautes-Alpes*
14, avenue du Maréchal-Foch
05000 Gap - 92 51 36 84

06 NICE
51ter, avenue Cap-de-Croix - BP 11
06101 Nice Cedex 2 - 93 53 71 98

06 *Alpes-Maritimes*
51ter, avenue Cap-de-Croix - BP 11
06101 Nice Cedex 2 - 93 53 72 16

07 *Ardèche*
23, avenue de la Gare - BP 713
07007 Privas Cedex - 75 64 04 15

08 *Ardennes*
8, rue Voltaire
08109 Charleville-Mézières Cedex
24 57 51 58

09 *Ariège*
31bis, av. du Général-de-Gaulle
BP 124 - 09007 Foix Cedex
61 65 08 48

10 *Aube*
8, avenue des Lombards - BP 1068
10009 Troyes Cedex - 25 75 20 79

11 *Aude*
56, avenue du Docteur-Henri-Gout
BP 583 - 11009 Carcassonne Cedex
68 47 05 02

12 *Aveyron*
1, boulevard François-Fabié
12006 Rodez Cedex - 65 68 13 53

13 AIX-MARSEILLE
31, boulevard d'Athènes
13232 Marseille Cedex 1 - 91 91 92 17

13 *Bouches-du-Rhône*
Collège Pythéas - 15, rue des Gardians
13014 Marseille -91 67 90 56

14 CAEN
21, rue du Moulin-au-Roy - BP 5152
14040 Caen Cedex - 31 47 16 05

15 *Cantal*
Rue de l'École normale
15013 Aurillac Cedex - 71 48 60 26

16 *Charente*
Château de l'Oisellerie - BP 42
16400 La Couronne - 45 67 74 74

17 *Charente-Maritime*
2, rue Louis-Braille
17028 La Rochelle Cedex - 46 43 95 95

18 *Cher*
9, rue Edouard-Branly
18000 Bourges - 48 24 54 91

19 *Corrèze*
Rue Sylvain-Combes - BP 225
19012 Tulle Cedex - 55 26 32 88

20 CORSE
8, cours Général-Leclerc - BP 836
20192 Ajaccio Cedex - 95 21 70 68

20 *Haute-Corse*
Boulevard Benoite-Danesi
20200 Bastia - 95 31 17 92

21 DIJON
Campus universitaire de Montmuzard
Boulevard Gabriel - BP 490
21013 Dijon Cedex - 80 73 85 00

22 *Côtes-d'Armor*
30, rue Brizeux
22015 Saint-Brieux Cedex
96 61 90 31

23 *Creuse*
2 bis, avenue de la République
23011 Guéret Cédex - 55 52 35 56

24 *Dordogne*
39, rue Paul Mazy
24000 Périgueux - 53 09 85 83

25 BESANÇON
6, rue des Fusillés - BP 1153
25003 Besançon Cedex - 81 83 41 33

25 *Doubs*
Place Dorian - Les Halles - BP 296
25205 Montbéliard Cedex - 81 91 15 75

26 *Drôme*
10, rue de la Manutention - BP 2110
26021 Valence Cedex - 75 43 41 33

27 *Eure*
3 bis, rue de Verdun
27000 Evreux - 32 39 00 91

28 *Eure-et-Loir*
1, rue du 14 juillet - BP 27
28001 Chartres Cedex - 37 35 69 88

29 *Finistère*
26, place de la Tour-d'Auvergne
29000 Quimper - 98 55 31 04

29 *Brest*
16, avenue Clémenceau
29283 Brest Cedex - 98 80 06 95

30 *Gard*
58, rue Rouget-de-Lisle
30000 Nîmes - 66 67 85 19

31 TOULOUSE
3, rue Roquelaine
31069 Toulouse Cedex - 61 99 48 48

31 *Haute-Garonne*
3, rue Roquelaine
31069 Toulouse Cedex - 61 99 48 78

32 *Gers*
Centre administratif
Rue Boissy-d'Anglas
32011 Auch Cedex - 62 05 86 11

33 BORDEAUX
75, cours d'Alsace-Lorraine
33075 Bordeaux Cedex - 56 81 12 92

33 *Gironde*
Rue Veyri - BP 267
33698 Mérignac Cedex - 56 47 05 81

34 MONTPELLIER
Allée de la Citadelle
34064 Montpellier Cedex - 67 60 74 66

34 *Hérault*
17, rue de l'Abbé-de-l'Épée
34000 Montpellier - 67 72 06 20

35 RENNES
92, rue d'Antrain - BP 158
35003 Rennes Cedex - 99 28 78 58

36 *Indre*
1, boulevard Saint-Denis
36000 Châteauroux - 54 22 24 24

37 *Indre-et-loire*
Quartier Beaujardin - 3, place Raspail
37000 Tours - 47 05 42 94

38 GRENOBLE
11, avenue du Général-Champon
38031 Grenoble Cedex - 76 74 74 74

39 *Jura*
1, rue Anne-Frank - BP 324
39015 Lons-le-Saunier - 84 47 22 86

40 *Landes*
École du Peyrouat - BP 401
40012 Mont-de-Marsan - 58 75 43 11

41 *Loir-et-Cher*
39, rue des écoles
41000 Blois - 54 78 04 34

42 *Loire*
Jardin des Plantes - Allée Michel-Ange
42031 Saint-Etienne Cedex 02
77 25 20 91

43 *Haute-Loire*
10, rue Jules-Vallès - BP 340
43012 Le Puy Cedex - 71 09 26 82

44 NANTES
Chemin de l'Herbergement
44072 Nantes Cedex 03 - 40 74 85 19

45 ORLÉANS-TOURS
55, rue N.D.-de-la-Recouvrance
BP 2219
45012 Orléans Cedex 1 - 38 62 23 90

46 *Lot*
48, rue Montaudié
46000 Cahors - 65 35 16 87

47 *Lot-et-Garonne*
48 bis, rue René-Cassin
47000 Agen - 53 98 06 83

48 *Lozère*
12, avenue du Père-Coudrin - BP 118
48005 Mende Cedex - 66 49 10 32

49 *Maine-et-Loire*
14, rue Anne-Frank
49043 Angers Cedex - 41 66 91 31

50 *Manche*
Rue des Palliers - BP 490
50010 Saint-Lô Cedex - 33 57 52 34

51 REIMS
47, rue Simon - BP 387
51063 Reims Cedex - 26 49 58 58

51 *Marne*
1, rue du Dr-Calmette - BP 518
51007 Châlons-sur-Marne Cedex
26 64 52 96

52 *Haute-Marne*
20, rue Haeusler
52000 Chaumont - 25 03 12 85

53 *Mayenne*
22, rue du Docteur Corre
53000 Laval - 43 68 08 83

54 NANCY-METZ
99, rue de Metz - CO 3320
54014 Nancy Cedex - 83 35 07 79

55 *Meuse*
Place de l'École normale, Pilviteuil
55000 Bar-le-Duc - 29 45 32 73

56 *Morbihan*
20, rue Jean-Gougaud - BP 1110
56014 Vannes Cedex - 97 63 21 37

57 *Moselle*
58, rue de Reims - BP 829
57158 Montigny-lès-Metz - 87 50 75 83

58 *Nièvre*
1 bis, rue Charles-Roy
58000 Nevers - 86 61 45 90

59 LILLE
3, rue Jean-Bart - BP 199
59018 Lille Cedex - 20 57 78 02

59 *Nord*
3, rue Jean-Bart - BP 199
59018 Lille Cedex - 20 57 78 02

60 *Oise*
22,avenue Victor-Hugo - BP 321
60030 Beauvais Cedex - 44 45 25 30

61 *Orne*
29, rue de l'École normale
61000 Alençon - 33 29 58 77

62 *Pas-de-Calais*
39, rue aux Ours
62012 Arras Cedex - 21 71 60 10

63 CLERMONT-FERRAND
15, rue d'Amboise
63037 Clermont-Ferrand Cedex 1
73 91 86 90

64 *Pyrénées-Atlantiques*
3,avenue Nitot - BP 1605
64016 Pau Cedex - 59 30 23 18

65 *Hautes-Pyrénées*
11, rue Georges-Magnoac - BP 1615
65016 Tarbes Cedex - 62 93 07 18

66 *Pyrénées-Orientales*
Place Jean-Moulin
66000 Perpignan - 68 50 76 80

67 STRASBOURG
23, rue du Maréchal-Juin - BP 279-R7
67007 Srasbourg Cedex - 88 61 49 94

68 *Haut-Rhin*
École normale - 12, rue Messimy
68025 Colmar - 89 23 30 51

69 LYON
47, rue Philippe-de-Lassalle
69316 Lyon Cedex 04 - 72 00 76 00

70 *Haute-Saône*
5, cours François-Villon - BP 2 AN 1
70000 Vesoul - 84 75 14 34

71 *Saône-et-Loire*
2, rue Jean-Bouvet
71000 Mâcon - 85 38 71 77

72 *Sarthe*
21, boulevard Lyautey
72016 Le Mans Cedex - 43 81 43 70

73 *Savoie*
289, rue Marcoz
73000 Chambéry - 79 69 50 72

74 *Haute-Savoie*
2, rue des Aravis
74000 Annecy - 50 23 79 36

75 PARIS
37, rue Jacob
75270 Paris Cedex 06 - 42 60 37 01

76 ROUEN
2, rue du Dr-Fleury - BP 88
76132 Mont-St-Aignan Cedex
35 74 16 85

76 *Seine-Maritime*
14, rue Clovis
76600 Le Havre - 35 42 13 53

77 *Seine-et-Marne*
8, rue de l'Hôpital
77007 Melun Cedex - 64 52 52 28

78 *Versailles*
3, boulevard de Lesseps
78000 Versailles -30 83 41 01

78 *Yvelines*
10, rue de l'Armorique
78180 Montigny-le-Bretonneux
30 43 89 79

79 *Deux-Sèvres*
4, rue Camille-Desmoulins
79009 Niort Cedex - 49 79 42 65

80 AMIENS
45, rue Saint-Leu - BP 2605
80026 Amiens Cedex - 22 92 07 08

81 *Tarn*
97, boulevard Soult
81013 Albi Cedex - 63 54 26 97

82 *Tarn-et-Garonne*
65, avenue de Beausoleil - BP 751
82013 Montauban Cedex - 63 03 51 18

83 *Var*
Ilot de la Visitation - Rue des Remparts
83000 Toulon - 94 09 73 73

84 *Vaucluse*
8, rue Frédéric-Mistral
84000 Avignon - 90 86 49 12

85 *Vendée*
18, rue Luneau
85000 La Roche-sur-Yon - 51 62 71 88

86 POITIERS
6, rue Sainte-Catherine
86034 Poitiers Cedex - 49 60 67 00

87 LIMOGES
23, avenue Alexis-Carrel
87036 Limoges Cedex - 55 01 32 50

87 *Haute-Vienne*
44, cours Gay-Lussac
87031 Limoges Cedex - 55 79 89 79

88 *Vosges*
2, rue de l'École normale
88025 Épinal Cedex - 29 34 22 36

89 *Yonne*
28, rueThéodore-de-Bèze BP 84
89011 Auxerre Cedex - 86 52 57 14

90 *Territoire de Belfort*
Tour des Quatre-As
Rue de l'As-de-Carreau - BP 27
90001 Belfort Cedex - 84 28 50 27

91 *Essonne*
110, place de l'Agora - BP 163
91006 Évry Cedex - 64 97 83 83

92 *Hauts-de-Seine*
41, avenue du Roule
92200 Neuilly-sur-Seine - 47 45 53 53

93 *Seine-Saint-Denis*
48 - 50, rue Anizan-Cadillon
93350 Le Bourget - 49 92 17 17

94 CRÉTEIL
20, rue Danièle-Casanova
94170 Le Perreux-sur-Marne
48 72 70 70

94 *Val-de Marne*
Quartier du Palais
14, rue Raymond-Poincaré
94000 Créteil
42 07 86 35 et 42 07 27 37

95 *Val-d'Oise*
2, boulevard des Cordeliers
95300 Pontoise - 34 24 08 88

97 ANTILLES-GUYANE
Route du Phare
(Pointe-des-Nègres) - BP 529
97262 Fort-de-France Cedex
(19 596) 61 45 79 et 61 48 79

97 *Guadeloupe*
Petit-Pérou Abymes - BP 378
97162 Pointe-à-Pitre Cedex
(19 590) 82 09 56

97 *Guyane*
Boulevard de la République - BP 762
97305 Cayenne - (19 594) 30 24 90

97 LA RÉUNION
16, rue Jean-Chatel
97489 Saint-Denis Cedex
(19 262) 21 35 97

Imprimerie Bialec S.A., 54000 Nancy - D.L. n° 41314 - 4e trimestre 1994
D'après documents fournis
Maquette de couverture : Marcel Bosch

Plus de 550 brochures administratives

à votre disposition

Éditées par le Service des publications administratives
du Centre national de documentation pédagogique
en étroite collaboration
avec le ministère de l'Éducation nationale.

une documentation
de base sur l'Éducation nationale

une information
sur les horaires, programmes, examens,
toutes disciplines et tous niveaux
(enseignements général, professionnel, technologique).

Renseignements et vente

dans votre CRDP, CDDP, CLDP de votre académie

◀▶

Vente par correspondance

CNDP 77568 LIEUSAINT CEDEX

◀▶

Vente à la librairie du CNDP

13, rue du Four - 75006 PARIS
(Métro Mabillon - ouverte le lundi de 14h à 19h,
du mardi au samedi de 10 h à 19h)

CENTRE NATIONAL
DE DOCUMENTATION
PÉDAGOGIQUE

cndp

Code tarif D

ISBN 2-240-70911-1

755 00554

9 782240 709110