

composition de mathématiques appliquées

Durée : 6 heures

ANALYSE NUMÉRIQUE

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction (y compris l'orthographe et la présentation) constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies.

L'objet du problème est l'étude d'un algorithme d'encadrement de toutes les racines d'un polynôme à coefficients complexes avec une précision arbitrairement choisie.

Dans tout le problème on notera \mathcal{C} le corps des complexes, \mathbb{R} le corps des réels.

Chaque fois qu'il est question de nombre de zéros d'un polynôme, il faut tenir compte des ordres de multiplicité de ces zéros.

Sauf mention contraire, les termes *boule* et *disque* signifient respectivement *boule ouverte* et *disque ouvert*.

Les parties II et III (sauf III 8) sont indépendantes de la partie I; II 3 et II 4 ne sont pas nécessaires pour la suite du problème; IV 2 et IV 3 sont indépendantes de II et III mais utilisent I 1 et I 2.

I Arithmétique circulaire

On étudie dans cette partie la propagation des incertitudes dans les opérations arithmétiques élémentaires sur \mathcal{C} . On représentera un complexe z connu avec une incertitude par un disque fermé $Z_{a,r}$ de centre a , rayon r , contenant toutes les valeurs possibles de z .

$$\begin{array}{lll} \text{I 1)} & \text{Montrer que} & \forall z \in Z_{a,r} \quad \forall z' \in Z_{a',r'} \quad z + z' \in Z_{a+a',r+r'} \\ & & \forall z \in Z_{a,r} \quad \forall z' \in Z_{a',r'} \quad zz' \in Z_{aa',|a|r'+|a'|r+rr'} \\ & \text{et si } 0 \notin Z_{a,r} & \forall z \in Z_{a,r} \quad 1/z \in Z_{\frac{\bar{a}}{|a|^2-r^2}, \frac{r}{|a|^2-r^2}} \end{array}$$

pour la troisième formule on pourra étudier l'image du bord du disque par la transformation $z \rightarrow 1/z$.

On prendra ces inclusions pour définitions de trois opérations arithmétiques sur les disques d'incertitudes, analogues aux opérations sur \mathcal{C} :

$$Z_{a,r} + Z_{a',r'} \quad Z_{a,r} Z_{a',r'} \quad Z_{a,r}^{-1}$$

cette dernière opération n'est définie que si $0 \notin Z_{a,r}$. Un complexe sera assimilé à un disque de rayon nul.

L'addition et la multiplication définies ci dessus sur les disques d'incertitude sont manifestement commutatives, on admettra sans démonstration qu'elles sont associatives.

I 2) Que peut on dire de la distributivité?

I 3) Calculer $(Z_{a,r})^n$. Montrer qu'on peut définir $\sqrt[n]{Z_{a,r}}$ par $Z_{0, \sqrt[n]{r+|a|}}$ si $|a| \leq r$, par la réunion des n disques $Z_{\alpha_i, \rho}$, où $\rho = \sqrt[n]{|a|} - \sqrt[n]{|a|} - |r|$ et les α_i sont les n racines nièmes de a , lorsque $|a| > r$. Cette définition n'est pas optimale; on ne cherchera pas à l'améliorer.

Si $Z_{a,r}$ est un disque d'incertitude, déterminer un disque d'incertitude pour $\exp(z)$ lorsque $z \in Z_{a,r}$.

II Perturbation d'un polynôme: Influence sur les racines.

II 1) Soit D un disque fermé du plan complexe, Γ son bord, f une fonction holomorphe sur un voisinage de D , qui ne s'annule pas sur Γ . Montrer que le nombre de racines de f contenues dans D est égal à $\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. (Les candidats peuvent supposer s'ils le souhaitent f polynomiale).

II 2) Soit D un disque fermé du plan complexe, Γ son bord, f et g deux fonctions holomorphes sur un voisinage de D , telles que $\forall z \in \Gamma \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Montrer que f et g ont le même nombre de zéros dans D . (Les candidats peuvent supposer s'ils le souhaitent f et g polynomiales, mais cela ne simplifie pas sensiblement la démonstration). (Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Rouché).

Options 2/27

II 3) On suppose que la racine $z_0 \neq 0$ du polynôme $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0$ est simple. Soit ε , $0 < \varepsilon < |z_0|$ tel que le disque ouvert de centre z_0 , rayon ε , ne contienne aucune autre racine de P . Soit $k \leq n$ un entier fixé. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $h \in \mathcal{C}$ tel que $|h| < \rho$ le polynôme $Q(z) = P(z) + hz^k$ ait une racine et une seule ζ dans le disque de centre z_0 , rayon ε , et que l'application $h \mapsto \zeta$ est C^∞ , et même holomorphe. Calculer $\frac{d\zeta}{dh}$ au point $h = 0$.

Application au polynôme $(z+1)(z+2)(z+3)\dots(z+19)(z+20)$ pour $k = 19$: Estimer numériquement $\frac{d\zeta}{dh}$ pour la racine $z_0 = -20$. Que conclure de ce résultat?

II 4) Soient z_0, z_1, \dots, z_{n-1} n complexes distincts. On pose $P(z) = (z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_{n-1}) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0$. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ et ε , $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |z_i - z_j|$ tels que, pour tout élément $(\alpha_i)_{i=0 \dots n-1}$ de \mathcal{C}^n vérifiant $\forall i \in [0 \dots n-1] \quad |a_i - \alpha_i| < \rho$ le polynôme $Q(z) = z^n + \sum_{0 \leq k \leq n-1} \alpha_k z^k$ ait pour tout i une racine ζ_i et une seule dans le disque de centre z_i et rayon ε . Montrer que l'application de la boule de centre (z_i) rayon ρ de \mathcal{C}^n dans \mathcal{C}^n définie par $(\alpha_i) \mapsto (\zeta_i)$ est de classe C^∞ .

III Localisation des zéros d'un polynôme complexe

A certaines étapes des algorithmes étudiés ci dessous, il pourra arriver que, alors qu'on attend un polynôme Q de degré d , une annulation accidentelle du coefficient du terme de degré d donne en fait un polynôme de degré $d' < d$. Pour éviter de traiter à part un grand nombre de cas particuliers, on dira que Q est de degré *formel* d et on appliquera l'algorithme avec des coefficients nuls pour $X^d, X^{d-1}, \dots, X^{d'+1}$. Par abus de langage, on dira qu'un polynôme de degré formel d et degré effectif d' ($d' < d$) admet ∞ pour zéro de multiplicité $d - d'$ et on posera $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.

Pour tout polynôme Q , on notera $Z(Q)$ le nombre de zéros de Q de module strictement inférieur à 1.

Soit d un entier positif et $Q(z) = \sum_{k=0}^d a_k z^k$ un polynôme de degré formel d . On appelle polynôme d -réciproque

de Q le polynôme $Q^*(z) = \sum_{k=0}^d \bar{a}_k z^{d-k}$, et on appelle transformée de Schur d'ordre d de Q le polynôme de degré formel $d-1$: $T_d Q = \bar{a}_0 Q - a_d Q^*$. On utilisera aussi les itérés de la transformation définis par récurrence par $T_d^{k+1} Q = T_{d-k} T_d^k Q$, où k est un entier positif.

Dans toute cette partie n est un entier strictement positif fixé et P un polynôme de degré n .

III 1) Montrer que si $w_1 \dots w_n$ sont les zéros d'un polynôme Q de degré formel n , les zéros de Q^* sont les $1/\bar{w}_k$, les ordres de multiplicité étant conservés.

III 2) Montrer que $\forall z \quad |z| = 1 \Rightarrow |P^*(z)| = |P(z)|$

III 3) Vérifier que pour tout $k > 0$ $T_n^k P(0)$ est réel. Montrer que si P n'a pas de racine dans le disque $D = \{z \mid |z| \leq 1\}$, alors si $0 \leq k \leq n$, $T_n^k P(0)$ est strictement positif. On pourra montrer d'abord que $T_n P(0) > 0$ puis montrer à l'aide du théorème de Rouché que $T_n P$ ne s'annule pas sur D .

III 4) Réciproquement, montrer que si pour tout $k \in [1 \dots n]$ $T_n^k P(0) > 0$, P ne s'annule pas sur D . On pourra commencer par étudier $T_n P$.

III 5) Montrer que si $T_n P(0) \neq 0$, aucun des polynômes $T_n^k P$, $0 \leq k \leq n$ ne s'annule sur le cercle $\Gamma: |z| = 1$

III 6) Montrer que

$$\begin{cases} T_n^k P(0) > 0 \implies Z(T_n^k P) = Z(T_n^{k-1} P) \\ T_n^k P(0) < 0 \implies Z(T_n^k P) = Z((T_n^{k-1} P)^*) \end{cases}$$

III 7) On note k_j , $j = 1 \dots m$ les indices k pour lesquels $T_n^k P(0) < 0$. Montrer que si tous les $T_n^k P(0)$ sont non nuls

$$Z(P) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} (n+1-k_j)$$

III 8) En présence d'incertitudes, comment peut-on exploiter la partie I pour savoir si le résultat de la formule III 7 est digne de confiance?

III 9) Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes. Montrer qu'il existe un unique $R > 0$ tel que $R^n = |a_0| + |a_1| R + \dots + |a_{n-1}| R^{n-1}$. Montrer que tous les zéros de P sont contenus dans $D(0, R)$.

Déterminer un majorant de R s'exprimant de façon simple en fonction des a_i .

IV Encadrement simultané des racines, Algorithme de Newton-Henrici

IV 1) Méthode de Newton classique, Accélération de convergence

ζ étant une racine simple d'un polynôme P telle que $P''(\zeta) \neq 0$, montrer que si le complexe ζ_0 est assez proche de ζ la suite (ζ_k) définie pour $k > 0$ par $\zeta_k = \zeta_{k-1} - \frac{P(\zeta_{k-1})}{P'(\zeta_{k-1})}$ converge vers ζ . Montrer que la suite $(\hat{\zeta}_k)$ définie par $\hat{\zeta}_k = \zeta_k - \frac{(\zeta_{k-1} - \zeta_k)^3}{(\zeta_{k-2} - \zeta_{k-1})^2}$ converge vers ζ < plus vite que (ζ_k) > c'est à dire que $|\hat{\zeta}_k - \zeta| = |\zeta_k - \zeta| \varepsilon_k$ où la suite (ε_k) tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini.

Dans toute la suite de cette partie P est un polynôme de degré n dont toutes les racines, notées $z_1 \dots z_n$, sont simples. On suppose connus des disques d'incertitude deux à deux disjoints pour toutes les racines $z_i, i = 1 \dots n$, notés Z_{a_i, r_i} , ou plus brièvement Z_i . Les opérations sur les disques d'incertitude ont été définies à la partie I.

IV 2) Montrer que, sous réserve de conditions sur les a_i et les r_i que l'on précisera, si $z \in Z_n$

$$Z'_n = z - \frac{P(z)}{P'(z) - P(z) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{z - Z_i}}$$

est un disque d'incertitude pour z_n .

IV 3) On définit pour chaque racine $z_i, i = 1 \dots n$ une suite de disques d'incertitude $Z_i^{(m)} = Z_{a_i^{(m)}, r_i^{(m)}}$ par le procédé itératif suivant (algorithme de Newton-Henrici) :

$$\begin{aligned} \bullet Z_i^0 &= Z_i \quad i = 1 \dots n \\ \bullet Z_i^{m+1} &= a_i^{(m)} - \frac{P(a_i^{(m)})}{P'(a_i^{(m)}) - P(a_i^{(m)}) \sum_{j \neq i} \frac{1}{a_i^{(m)} - Z_j^{(m)}}} \quad i = 1 \dots n \end{aligned}$$

On pose $\epsilon_m = \max\{r_i^{(m)} \mid i = 1 \dots n\}$ $\rho_m = \min\{|a_i^{(m)} - a_j^{(m)}| \mid i = 1 \dots n, j = 1 \dots n, i \neq j\}$

Montrer que, sous réserve d'une condition qu'on précisera sur ϵ_0 et ρ_0 , la suite ϵ_m vérifie $\forall n \quad \epsilon_{m+1} < \lambda \epsilon_m^3$ où λ est une constante qu'on déterminera.

Comparer à la méthode de Newton classique.

IV 4) Si P est un polynôme n'ayant que des racines simples, comment peut-on utiliser les techniques étudiées dans la partie III pour construire les encadrements initiaux Z_i utilisés au démarrage de l'algorithme de Newton-Henrici? La méthode peut-elle échouer?

Peut-on adapter à l'algorithme de Newton-Henrici en arithmétique circulaire le procédé d'accélération de convergence étudiée en IV 1 pour la méthode de Newton classique?

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Rappels et notations

1. *Angles d'Euler.* On note (X_0, Y_0, Z_0) la base canonique de \mathbf{R}^3 , et on suppose \mathbf{R}^3 muni du produit scalaire usuel, et de l'orientation définie par (X_0, Y_0, Z_0) . Si (X, Y, Z) est une autre base orthonormée directe, telle que le plan défini par (X, Y) intersecte le plan défini par (X_0, Y_0) en une droite \mathcal{D} , on introduit la base intermédiaire (n, v, Z) , où n est le vecteur directeur unitaire de \mathcal{D} tel que l'angle ψ défini par (X_0, n) soit dans $[-\pi/2, \pi/2[$, et où $v = Z \wedge n$. On note θ l'angle (Z_0, Z) , (donc $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$), et on note φ l'angle (n, X) , que l'on suppose dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ (tous ces angles étant comptés avec les orientations usuelles des plans correspondants).

2. Soient $M \in \mathbf{N}^*$ et O un ouvert de \mathbf{R}^M . Si f est une fonction dérivable d'un intervalle ouvert I de \mathbf{R} dans O , on note \hat{f} la fonction de I dans $O \times \mathbf{R}^M$ définie pour $t \in I$ par $\hat{f}(t) = (f(t), f'(t))$, la fonction f' de I dans \mathbf{R}^M étant la dérivée de f .

3. On appellera *lagrangien* dans $O \times \mathbf{R}^M$ une fonction F de $O \times \mathbf{R}^M$ dans \mathbf{R} , de classe C^∞ . Notons $q = (q_m)$ un point courant de O et $\dot{q} = (\dot{q}_m)$ un point courant de \mathbf{R}^M . Soit f une fonction deux fois dérivable d'un intervalle I dans O , on notera $[F]^f$ l'application de I dans \mathbf{R}^M dont les composantes $[F]^f_m$ sont données par l'expression suivante (dans laquelle le signe ' désigne la dérivée), où $m \in \{1, \dots, M\}$:

$$[F]^f_m = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_m} \circ \hat{f} \right)' - \frac{\partial F}{\partial q_m} \circ \hat{f}$$

On rappelle que la fonction f est *solution des équations de Lagrange associées à F* lorsque la fonction $[F]^f$ est nulle dans I .

4. Un lagrangien F dans $O \times \mathbf{R}^M$ sera dit *classique* s'il s'écrit $F(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$, où U est une fonction de classe C^∞ de O dans \mathbf{R} et T une fonction de classe C^∞ de $O \times \mathbf{R}^M$ dans \mathbf{R} telle que pour tout $q \in O$, la fonction partielle définie par $\dot{q} \mapsto T(q, \dot{q})$ soit une forme quadratique définie positive dans \mathbf{R}^M .

5. Dans la première partie du problème, N sera un entier ≥ 2 , et K sera un entier vérifiant $1 \leq K \leq N - 1$. On réservera les lettres l, m, n pour désigner des indices variant entre 1 et N , les lettres i, j, k pour désigner des indices variant entre 1 et K , enfin les lettres α, β, γ pour les indices variant entre $K + 1$ et N . On demande au candidat de respecter ces conventions.

6.a. Soit $\mathcal{E} = \{A_\alpha, K + 1 \leq \alpha \leq N\}$ un ensemble de $N - K$ fonctions A_α , définies et de classe C^∞ dans un ouvert O de \mathbf{R}^N , à valeurs dans \mathbf{R}^N . On note $A_{\alpha n}$ la composante d'ordre n de A_α , soit $A_\alpha = (A_{\alpha n})_{1 \leq n \leq N}$. Les *relations de liaison* (non holonomes en général) associées aux fonctions A_α sont définies par les $N - K$ égalités suivantes

$$\sum_{n=1}^N A_{\alpha n}(q) \dot{q}_n = 0, \quad (q \in O, \dot{q} = (\dot{q}_n) \in \mathbf{R}^N), \quad K + 1 \leq \alpha \leq N$$

On notera $\mathcal{N}(\mathcal{E})$, ou seulement \mathcal{N} , l'ensemble des relations de liaison ainsi définies.

6.b. Soit L un lagrangien dans $O \times \mathbf{R}^N$ (où O est un ouvert de \mathbf{R}^N). On rappelle qu'une fonction f deux fois dérivable d'un intervalle I de \mathbf{R} dans O est solution des *équations de Lagrange associées à L en présence des liaisons \mathcal{N}* lorsqu'il existe $N - K$ fonctions λ_α , $K + 1 \leq \alpha \leq N$, de I dans \mathbf{R} telles que

$$(i) \quad [L]^f(t) = \sum_{\alpha=K+1}^N \lambda_\alpha(t) \cdot A_\alpha \circ f(t), \quad \forall t \in I$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^N (A_{\alpha n} \circ f(t)) \cdot f'_n(t) = 0, \quad \forall t \in I; \quad K + 1 \leq \alpha \leq N$$

Première partie

Dans cette partie, O désigne un pavé ouvert de \mathbf{R}^N , de la forme $O = \prod_{n=1}^N J_n$, où les J_n sont des intervalles ouverts de \mathbf{R} . On considère un lagrangien classique L défini dans $O \times \mathbf{R}^N$. On a donc $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$. On suppose de plus que T et U ne dépendent pas des coordonnées q_α , pour $K + 1 \leq \alpha \leq N$, il en est donc de même de L . On notera $W = \prod_{k=1}^K J_k$, et $\tilde{L}, \tilde{T}, \tilde{U}$ les fonctions définies dans $W \times \mathbf{R}^N$, $W \times \mathbf{R}^N$ et W respectivement, naturellement déduites de L, T, U .

Les points de $O \times \mathbf{R}^N$ seront notés (q, \dot{q}) , avec $q = (q_n)$ et $\dot{q} = (\dot{q}_n)$, $1 \leq n \leq N$. Les points de $W \times \mathbf{R}^N$ seront notés (y, \dot{y}) , avec $y = (y_k)$ et $\dot{y} = (\dot{y}_n)$, $1 \leq k \leq K$ et $1 \leq n \leq N$. Les points de $W \times \mathbf{R}^K$ seront notés (x, \dot{x}) , avec $x = (x_k)$ et $\dot{x} = (\dot{x}_k)$, $1 \leq k \leq K$. Les points de W seront indifféremment notés $x = (x_k)$ ou $y = (y_k)$.

On donne comme dans les rappels un ensemble $\mathcal{E} = \{A_\alpha, K + 1 \leq \alpha \leq N\}$ de fonctions de classe C^∞ de O dans \mathbf{R}^N , et on note encore \mathcal{N} l'ensemble des relations de liaison associées à \mathcal{E} . On suppose de plus que $A_{\alpha\alpha} = -1$ (fonction constante) pour $\alpha \in \{K + 1, \dots, N\}$ et $A_{\alpha\beta} = 0$ pour $(\alpha, \beta) \in \{K + 1, \dots, N\}^2$, avec $\alpha \neq \beta$. Les relations de liaison s'écrivent donc

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{i=1}^K A_{\alpha i}(q) \dot{q}_i$$

On supposera enfin chaque fonction A_α indépendante des q_β , pour $\beta \in \{K + 1, \dots, N\}$, et on notera $\tilde{A}_\alpha = (\tilde{A}_{\alpha n})$ les fonctions de W dans \mathbf{R}^N naturellement déduites des A_α , pour $\alpha \in \{K + 1, \dots, N\}$.

On note φ l'application de $W \times \mathbf{R}^K$ dans $W \times \mathbf{R}^N$ définie par $\varphi(x, \dot{x}) = (y, \dot{y})$, avec $y = x$, $\dot{y}_k = \dot{x}_k$ pour $1 \leq k \leq K$, et $\dot{y}_\alpha = \sum_{i=1}^K \tilde{A}_{\alpha i}(x) \dot{x}_i$ pour $K + 1 \leq \alpha \leq N$. On note \mathcal{T} la fonction de $W \times \mathbf{R}^K$ dans \mathbf{R} définie par $\mathcal{T} = \tilde{T} \circ \varphi$, et on note \mathcal{L} la fonction de $W \times \mathbf{R}^K$ dans \mathbf{R} définie par $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - \tilde{U}(x)$.

I.1. Démontrer que \mathcal{L} est un lagrangien classique dans $W \times \mathbf{R}^K$.

I.2. Soit $g = (g_k)$ une fonction deux fois dérivable d'un intervalle ouvert I de \mathbf{R} dans W . On pose $\hat{g} = (g, g')$ et $h = \varphi \circ \hat{g}$.

I.2.a. Démontrer que pour $1 \leq k \leq K$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k} \circ \hat{g} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}_k} \circ h + \sum_{\alpha=K+1}^N \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{y}_\alpha} \circ h \right) (\tilde{A}_{\alpha k} \circ g)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} \circ \hat{g} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y_k} \circ h + \sum_{\alpha=K+1}^N \sum_{j=1}^K \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{y}_\alpha} \circ h \right) \left(\frac{\partial \tilde{A}_{\alpha j}}{\partial x_k} \circ g \right) g'_j$$

I.2.b. On pose $B_{\alpha jk} = \frac{\partial \tilde{A}_{\alpha k}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{A}_{\alpha j}}{\partial x_k}$. Démontrer que pour $1 \leq k \leq K$,

$$[\mathcal{L}]_k^g = \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}_k} \circ h \right)' - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y_k} \circ h + \sum_{\alpha=K+1}^N \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{y}_\alpha} \circ h \right)' (\tilde{A}_{\alpha k} \circ g) + \sum_{\alpha=K+1}^N \sum_{j=1}^K \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{y}_\alpha} \circ h \right) (B_{\alpha jk} \circ g) g'_j$$

I.3. On conserve les notations de I.2, et on note $h = (h_k, \dot{h}_n)$, $1 \leq k \leq K$ et $1 \leq n \leq N$ les composantes de la fonction h . Soient c_{K+1}, \dots, c_N des constantes réelles, et t_0 un point donné de I . A la fonction g , on associe la fonction f de I dans O définie par $f_k = g_k$ pour $1 \leq k \leq K$, et

$$f_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \dot{h}_\alpha(s) ds + c_\alpha, \quad \alpha \in \{K+1, \dots, N\}$$

I.3.a. Montrer que si f est solution des équations de Lagrange associées à L en présence des liaisons \mathcal{N} , avec les notations des rappels,

$$[L]_\beta^f = -\lambda_\beta = \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{y}_\beta} \circ h \right)', \quad \forall \beta \in \{K+1, \dots, N\}$$

En déduire qu'alors :

$$[\mathcal{L}]_k^g = \sum_{\alpha=K+1}^N \sum_{j=1}^K \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{y}_\alpha} \circ h \right) (B_{\alpha jk} \circ g) g'_j, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \tag{E}$$

I.3.b. Réciproquement, montrer que si g est solution des équations (E), et si f est construite comme au début de la question pour des constantes arbitraires c_α , la fonction f est solution des équations de Lagrange associées à L en présence des liaisons \mathcal{N} .

I.4. On suppose maintenant que $\tilde{T}(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \tilde{T}_{nm}(y) \dot{y}_n \dot{y}_m$, les fonctions \tilde{T}_{nm} étant de classe C^∞ dans l'ouvert W et vérifiant $\tilde{T}_{nm} = \tilde{T}_{mn}$ pour $(n, m) \in \{1, \dots, N\}^2$. On donne de plus un réel $\mu > 0$, et on suppose que $\tilde{T}_{\alpha\alpha} = \mu$ (fonction constante) et $\tilde{T}_{\alpha n} = 0$ si $\alpha \neq n$, pour $K+1 \leq \alpha \leq N$ et $1 \leq n \leq N$. On pose $C_{ijk} = \mu \left(\sum_{\alpha=K+1}^N \tilde{A}_{\alpha i} B_{\alpha jk} \right)$. Vérifier que $C_{ijk} = -C_{ikj}$, pour $(i, j, k) \in \{1, \dots, K\}^3$. Montrer que les équations (E) s'écrivent

$$[\mathcal{L}]_k^g = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K (C_{ijk} \circ g) g'_i g'_j$$

Deuxième partie

Dans cette partie, on note K un entier ≥ 1 , $W = \prod_{k=1}^K J_k$ un pavé ouvert de \mathbf{R}^K (les J_k sont des intervalles de \mathbf{R}), (x, \dot{x}) un point courant de $W \times \mathbf{R}^K$; et on donne un lagrangien classique \mathcal{L} dans $W \times \mathbf{R}^K$. On note $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - \mathcal{U}(x)$, avec \mathcal{U} de classe C^∞ et

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K T_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j$$

où les fonctions T_{ij} sont de classe C^∞ de W dans \mathbf{R} et vérifient $T_{ij} = T_{ji}$ pour $(i, j) \in \{1, \dots, K\}^2$. On donne de plus un ensemble $\mathcal{C} = \{C_{ijk}, (i, j, k) \in \{1, \dots, K\}^3\}$ de fonctions de classe C^∞ de W dans \mathbf{R} , qui vérifient $C_{ijk} = -C_{ikj}$, pour $(i, j, k) \in \{1, \dots, K\}^3$.

On se propose dans cette partie d'étudier les points d'équilibre et certaines solutions particulières des équations différentielles (où l'inconnue est la fonction g) :

$$[\mathcal{L}]_k^g = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K (C_{ijk} \circ g) g'_i g'_j, \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad (*)$$

II.1. Démontrer que le point $x_e \in W$ est un point d'équilibre pour l'équation (*) (i.e. la fonction constante $t \mapsto x_e$ est solution) si et seulement si la différentielle de \mathcal{U} au point x_e est nulle.

II.2. Soit x_e un point d'équilibre. Vérifier que les équations linéarisées autour de x_e (obtenues ici en posant $g = x_e + u$, écrivant que la fonction g est solution, et négligeant les termes d'ordre au moins 2 en u et ses dérivées) sont données par

$$\sum_{i=1}^K T_{ik}(x_e) u_i'' + \sum_{i=1}^K \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x_i \partial x_k}(x_e) u_i = 0, \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad (**)$$

II.3. On note toujours x_e un point d'équilibre. On suppose dans cette question que $T_{ik}(x_e) = 0$ si $i \neq k$. On pose $u_i' = v_i$, $1 \leq i \leq K$.

II.3.a. Ecrire les équations (**) comme système différentiel d'ordre 1 dans \mathbf{R}^{2K} , de la forme $w' = \mathcal{M}w$, où w est la matrice colonne de composantes $u_1, \dots, u_K, v_1, \dots, v_K$, et où \mathcal{M} est une matrice carrée d'ordre $2K$. Montrer que le polynôme caractéristique de ce système est bicarré.

II.3.b. Montrer qu'une condition nécessaire pour que le système linéaire (**) soit stable pour $t \rightarrow +\infty$ (dans un sens à préciser) est que toutes ses valeurs propres aient une partie réelle nulle.

II.4. On suppose maintenant que $K \geq 2$ et que les fonctions T, \mathcal{U}, C_{ijk} ne dépendent pas de la première coordonnée x_1 . On note $x_0 = (x_{0i})$ un point de W , et $\omega \in \mathbf{R}$.

II.4.a. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction g de \mathbf{R} dans W , définie par $g_1(t) = \omega t + x_{01}$, $g_i(t) = x_{0i}$ pour $2 \leq i \leq K$, soit solution des équations (*).

II.4.b. On suppose les conditions précédentes vérifiées. Montrer que les équations linéarisées autour de la solution g , obtenues ici en posant $f = g + u$, écrivant que f est solution de (*), et négligeant les termes d'ordre au moins 2 en u et ses dérivées, sont données par

$$\sum_{i=1}^K T_{ik}(x_0)u_i'' + \omega \sum_{i=1}^K \left[\left(\frac{\partial T_{1k}}{\partial x_i} - \frac{\partial T_{1i}}{\partial x_k} - C_{1ik} - C_{i1k} \right)(x_0) \right] u_i' + \sum_{i=2}^K \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_k \partial x_i} - \omega^2 \frac{\partial C_{11k}}{\partial x_i} \right)(x_0) \right] u_i = 0, \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad (***)$$

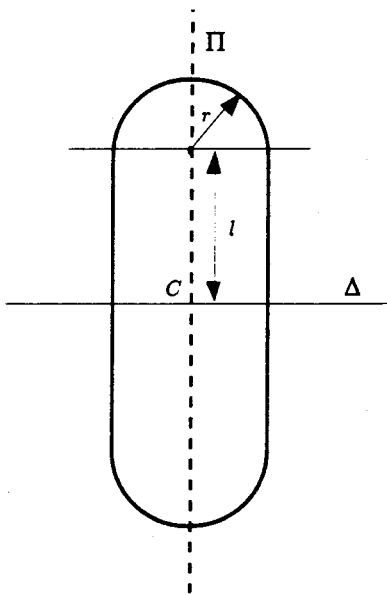
Note. Cette question exige d'assez longs calculs, qui devront être rédigés avec la plus grande clarté pour être pris en compte.

Le deuxième terme des équations (***) laisse supposer que leur stabilité dépend du signe de ω . On donne dans la suite du problème un exemple de système mécanique concret dans lequel cette propriété se rencontre.

Troisième partie

Dans cette partie, on note (X_0, Y_0, Z_0) la base canonique de \mathbf{R}^3 , que l'on suppose muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par la base (X_0, Y_0, Z_0) . On identifie l'espace physique à \mathbf{R}^3 , on suppose qu'il existe un champ de pesanteur constant défini par $-gZ_0$. On note Θ l'origine de \mathbf{R}^3 et \mathcal{H}_0 le plan horizontal défini par (Θ, X_0, Y_0) . On note \mathcal{R}_0 le repère fixe (Θ, X_0, Y_0, Z_0) .

On considère un solide de révolution S , dont la section méridienne est décrite dans la figure ci-dessous. Cette section est composée d'un rectangle de longueur $2l > 0$ et de largeur $2r > 0$, auquel



sont accolés deux demi-disques de rayon r . Le solide géométrique S a pour axe de révolution Δ , et est symétrique par rapport au plan Π , dont l'intersection avec le plan de la figure est tracée en pointillés. Le solide S est donc symétrique par rapport au point C , intersection de Π et Δ . On notera μ la masse de S et Σ son centre d'inertie, que l'on suppose situé dans le plan Π ; la distance $C\Sigma$ sera notée d . On notera $R = l + r$ (rayon de S autour de Δ), et $h = R - d$ (distance de Σ au cercle frontière de $S \cap \Pi$).

On définit un premier repère orthonormé direct lié au solide, \mathcal{R}_S , d'origine Σ et de base (X_S, Y_S, Z_S) , où Y_S est le vecteur de Π défini par $Y_S = \frac{1}{d} \overrightarrow{\Sigma C}$, où Z_S est un vecteur directeur unitaire (quelconque) de Δ , et $X_S = Y_S \wedge Z_S$.

On définit un second repère orthonormé direct \mathcal{R} , d'origine Σ , et de base (X, Y, Z) telle que l'opérateur d'inertie I de S s'écrive dans (X, Y, Z) sous forme diagonale. On note I_x, I_y, I_z les moments d'inertie de S relatifs aux axes $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ respectivement. On suppose que les vecteurs Y_S et Y sont égaux, les vecteurs X et Z sont donc dans le plan orthogonal à Y_S , on notera γ l'angle défini par $(Z, Z_S) (= (X, X_S))$, le plan orthogonal à Y étant orienté par la base (Z, X) , on

suppose enfin que $\gamma \in [0, \pi/2[$. On remarquera donc que si $\gamma \neq 0$ et si $I_x \neq I_z$, la répartition de masse du solide S n'est pas symétrique relativement à Π .

On suppose que le solide S est astreint à rouler sans glisser sur le plan \mathcal{H}_0 . On se propose dans les trois parties suivantes d'étudier quelques propriétés de son mouvement.

III.1. On suppose que la position du solide permet d'utiliser les angles d'Euler définis en rappel 1. On note $(\psi_S, \theta_S, \varphi_S)$ les angles d'Euler repérant la base (X_S, Y_S, Z_S) relativement à (X_0, Y_0, Z_0) . On note (ψ, θ, φ) les angles d'Euler repérant (X, Y, Z) relativement à (X_0, Y_0, Z_0) .

III.1.a. Vérifier que $(\theta_S, \varphi_S) = (\pi/2, 0)$ lorsque $(\theta, \varphi) = (\pi/2, 0)$. Montrer que lorsque $(\varphi, \varphi_S) \in]-\pi/2, \pi/2[^2$, $\cos \theta_S = \sin \gamma \sin \theta \sin \varphi + \cos \gamma \cos \theta$, et $\tan \varphi_S = \cos \gamma \tan \varphi - \sin \gamma \frac{\cotg \theta}{\cos \varphi}$.

III.1.b. En déduire les développements de Taylor à l'ordre 2 (c'est à dire contenant tous les termes d'ordre ≤ 2) des fonctions $\sin \theta_S(\theta, \varphi)$, $\cos \theta_S(\theta, \varphi)$, $\sin \varphi_S(\theta, \varphi)$, $\cos \varphi_S(\theta, \varphi)$ au voisinage de $(\theta, \varphi) = (\pi/2, 0)$.

III.1.c. Vérifier que pour tout rectangle Λ de la forme $]\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \theta_0[\times]-\varphi_0, \varphi_0[$ contenu dans le rectangle $]0, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et assez petit, l'application \mathcal{A} de Λ dans \mathbf{R}^2 définie par $\mathcal{A}(\theta, \varphi) = (\theta_S(\theta, \varphi), \varphi_S(\theta, \varphi))$, est un difféomorphisme de classe C^∞ sur son image.

Dans la suite du problème, on supposera que (θ, φ) appartient à un tel rectangle Λ .

III.2. On note P le point de contact de S sur \mathcal{H}_0 . Exprimer les coordonnées (x_P, y_P, z_P) du point P dans le repère \mathcal{R}_S , en fonction de $r, l, d, \theta_S, \varphi_S$.

III.3. On pose pour toute la suite du problème $\tilde{\theta} = \theta - \pi/2$, $E = R \sin^2 \gamma + r \cos^2 \gamma$, $F = l \sin \gamma \cos \gamma$, $G = R \cos^2 \gamma + r \sin^2 \gamma$.

III.3.a. Exprimer les coordonnées (ξ, η, ζ) de P dans le repère $\mathcal{R} = (\Sigma, X, Y, Z)$.

III.3.b. Montrer que

$$\begin{cases} \xi(\theta, \varphi) = -F\tilde{\theta} - G\varphi + O_3 \\ \eta(\theta, \varphi) = -h + \frac{1}{2}(E\tilde{\theta}^2 + 2F\tilde{\theta}\varphi + G\varphi^2) + O_3 \\ \zeta(\theta, \varphi) = E\tilde{\theta} + F\varphi + O_3 \end{cases}$$

la notation O_3 désignant les restes d'ordre au moins trois dans les développements.

III.4. On note (n, v, Z) la base intermédiaire associée à la base (X, Y, Z) (voir rappels 1.).

III.4.a. Déterminer les coordonnées (a, b, c) du point P dans le repère (Σ, n, v, Z) , en fonction de (ξ, η, ζ) .

III.4.b. Montrer que

$$\begin{cases} a(\theta, \varphi) = -F\tilde{\theta} - (G - h)\varphi + O_3 \\ b(\theta, \varphi) = -h + \frac{1}{2}(E\tilde{\theta}^2 - (G - h)\varphi^2) + O_3 \\ c(\theta, \varphi) = E\tilde{\theta} + F\varphi + O_3 \end{cases}$$

III.5. On note (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du centre d'inertie Σ de S dans le repère fixe \mathcal{R}_0 , et $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ les coordonnées de son vecteur vitesse par rapport à \mathcal{R}_0 , écrites dans ce même repère. On note Ω le vecteur rotation instantanée de S relativement au repère fixe. On note enfin $\Omega = \dot{\psi}Z_0 + \dot{\theta}n + \dot{\varphi}Z$.

Options 10/27

III.5.a. Montrer que les équations de liaison exprimant le roulement sans glissement de S sur le plan \mathcal{H}_0 ont la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = (a \sin \psi + (b \cos \theta - c \sin \theta) \cos \psi) \dot{\psi} - (b \sin \theta + c \cos \theta) \sin \psi \dot{\theta} + (a \cos \theta \sin \psi + b \cos \psi) \dot{\varphi} \\ \dot{y}_0 = (-a \cos \psi + (b \cos \theta - c \sin \theta) \sin \psi) \dot{\psi} + (b \sin \theta + c \cos \theta) \cos \psi \dot{\theta} + (-a \cos \theta \cos \psi + b \sin \psi) \dot{\varphi} \\ \dot{z}_0 = (c \sin \theta - b \cos \theta) \dot{\theta} - a \sin \theta \dot{\varphi} \end{cases}$$

III.5.b. Vérifier que la dernière de ces relations est en fait holonome.

III.5.c. Vérifier que $\dot{x}_0 = \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial \psi}$ et que $\dot{y}_0 = -\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \psi}$.

III.6. On rappelle que g désigne l'accélération de la pesanteur.

III.6.a. Vérifier que l'énergie potentielle du système, en présence de la seule liaison holonome traduisant le contact sur \mathcal{H}_0 , est donnée par

$$U(\psi, \theta, \varphi, x_0, y_0) = -\mu g (b(\theta, \varphi) \sin \theta + c(\theta, \varphi) \cos \theta)$$

Vérifier que U ne dépend pas de ψ, x_0, y_0 .

III.6.b. Etablir que le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction U au voisinage de $(\theta, \varphi) = (\pi/2, 0)$ s'écrit

$$U = \mu g h + \frac{\mu g}{2} [(E - h)\tilde{\theta}^2 + 2F\tilde{\theta}\varphi + (G - h)\varphi^2] + O_3$$

III.7. Etablir que l'énergie cinétique du système, en présence de la seule liaison holonome traduisant le contact sur \mathcal{H}_0 , est donnée par

$$\begin{aligned} T(\psi, \theta, \varphi, x_0, y_0, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{x}_0, \dot{y}_0) &= \frac{\mu}{2} \left[((c \sin \theta - b \cos \theta) \dot{\theta} - a \sin \theta \dot{\varphi})^2 + \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[I_x (\sin \theta \sin \varphi \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\theta})^2 + I_y (\sin \theta \cos \varphi \dot{\psi} - \sin \varphi \dot{\theta})^2 + I_z (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\varphi})^2 \right] \end{aligned}$$

Vérifier que T ne dépend pas de ψ, x_0, y_0 .

III.8. On reprend maintenant les notations de la première partie, avec $N = 5$ et $K = 3$, les variables q_1, q_2, q_3 sont respectivement ici ψ, θ, φ , et les variables q_4, q_5 sont x_0 et y_0 .

III.8.a. Montrer que le lagrangien classique \mathcal{L} , obtenu en tenant compte (comme dans la première partie) des liaisons non-holonomes dans l'énergie cinétique T , est indépendant de ψ .

III.8.b. Vérifier que

$$T(\psi, \pi/2, 0, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{I_y}{2} \dot{\psi}^2 + \frac{I_x + \mu h^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_z + \mu h^2}{2} \dot{\varphi}^2$$

III.8.c. On conserve les notations de la première partie pour les deux relations de liaison non holonomes, que l'on écrit

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \tilde{A}_{41}(\psi, \theta, \varphi) \dot{\psi} + \tilde{A}_{42}(\psi, \theta, \varphi) \dot{\theta} + \tilde{A}_{43}(\psi, \theta, \varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y}_0 &= \tilde{A}_{51}(\psi, \theta, \varphi) \dot{\psi} + \tilde{A}_{52}(\psi, \theta, \varphi) \dot{\theta} + \tilde{A}_{53}(\psi, \theta, \varphi) \dot{\varphi} \end{aligned}$$

On note encore $B_{\alpha j k}$ et $C_{i j k}$ les fonctions qui s'en déduisent, définies dans les questions I.2. et I.4. Démontrer que les fonctions $C_{i j k}$ sont indépendantes de ψ .

Quatrième partie

Le but de cette partie est d'étudier le point d'équilibre du système mécanique précédent, obtenu lorsque le centre d'inertie Σ est à la hauteur minimale. On conserve les hypothèses et les notations de la partie III, en particulier de la question III.8.

IV.1. Montrer que le point $(\psi, \theta, \varphi) = (0, \pi/2, 0)$ est un point d'équilibre pour le système (*) (voir la partie II) défini par \mathcal{L} et les fonctions C_{ijk} .

IV.2. Déterminer les équations linéarisées (***) autour de ce point fixe, les écrire comme système différentiel du premier ordre $w' = \mathcal{M}w$, où w est la matrice colonne de composantes $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$, avec $v_i = u'_i$. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice de ce système s'écrit

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^4 + \tau\lambda^2 + \delta)$$

où $\tau = \frac{\mu g}{I'_x I'_z} (I'_x(G-h) + I'_z(E-h))$ et $\delta = \left[\frac{\mu g}{I'_x I'_z} \right]^2 (R-h)(r-h)$, avec $I'_x = \mu h^2 + I_x$ et $I'_z = \mu h^2 + I_z$.

IV.3. Etablir qu'une condition nécessaire de stabilité du système linéarisé est $r \geq h$, en donner une interprétation mécanique.

Cinquième partie

Le but de cette partie est de mettre en évidence un comportement dissymétrique pour le mouvement du solide S en rotation autour d'un axe vertical D contenant Σ , le point Σ étant à la hauteur minimale. On conserve les hypothèses et les notations de la partie III, en particulier de la question III.8.

V.1. Indiquer comment modifier la définition des angles d'Euler pour que l'étude de la partie III garde un sens lorsque $\psi \in \mathbf{R}$, dans le cas de mouvements voisins de la rotation autour de l'axe D . Montrer alors que pour $\omega \in \mathbf{R}^*$, la fonction g définie dans \mathbf{R} par ses composantes : $\psi(t) = \omega t$, $\theta(t) = \pi/2$, $\varphi(t) = 0$, est solution du système d'équations (*) de la partie II.

V.2. Montrer que les équations (***) associées à la fonction g se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u''_1 = 0 \\ u''_2 + Q_{22}u'_2 + Q_{23}u'_3 + R_{22}u_2 + R_{23}u_3 = 0 \\ u''_3 + Q_{32}u'_2 + Q_{33}u'_3 + R_{32}u_2 + R_{33}u_3 = 0 \end{cases}$$

où les Q_{ij} et R_{ij} sont des coefficients qu'on ne cherchera pas à expliciter dans cette question.

V.3. Ecrire le système précédent sous forme d'un système du premier ordre $w' = \mathcal{B}w$, où w est la matrice colonne de composantes $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$, avec $v_i = u'_i$. Montrer que le polynôme caractéristique de \mathcal{B} s'écrit

$$Q(\lambda) = \lambda^2(\lambda^4 + d_3\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda + d_0)$$

avec $d_3 = \omega \frac{I_x - I_z}{I'_x I'_z} \mu h F$, où $I'_x = \mu h^2 + I_x$ et $I'_z = \mu h^2 + I_z$.

V.4. Etudier l'influence du signe de ω sur la stabilité du système linéaire précédent. Interprétation mécanique.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Notations, Définitions, Rappels.

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

1. v.a.r. est l'abréviation de *variable aléatoire réelle*.
2. Si X est une v.a.r. intégrable ou positive, on note $E(X)$ l'espérance mathématique de X , $E(X) = \int X dP$.
3. Si \mathcal{F} est une sous-tribu de \mathcal{A} , le symbole $E(X | \mathcal{F})$ désigne l'espérance conditionnelle de la v.a.r. intégrable X par rapport à la tribu \mathcal{F} , ou plutôt un représentant de cette espérance conditionnelle.

On rappelle l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles: si ϕ est une fonction convexe, si X est une v.a.r. intégrable telle que $\phi(X)$ soit intégrable, alors p.s.

$$\phi(E(X | \mathcal{F})) \leq E(\phi(X) | \mathcal{F}).$$

4. Pour tout $p \geq 1$, L^p désigne l'espace des v.a.r. X telles que $|X|^p$ soit intégrable. Pour tout $p \geq 1$ et pour toute mesure de probabilité μ sur \mathbf{R} , $\mathcal{L}^p(d\mu)$ désigne l'espace des fonctions f de \mathbf{R} dans lui-même telles que $|f|^p$ soit intégrable sur \mathbf{R} muni de la mesure μ .

Pour une fonction f bornée on note $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbf{R}\}$. Pour une probabilité μ sur \mathbf{R} , on note $\tilde{\mu}$ la probabilité image de μ par l'application $x \mapsto -x$.

5. Si $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est une suite de sous-tribus de \mathcal{A} , croissante pour l'inclusion ($\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$), et si $(X_n, n \geq 0)$ est une suite de v.a.r. intégrables, on dit que $(X_n, n \geq 0)$ est une *martingale* adaptée à $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ si chaque X_n est un représentant de l'espérance conditionnelle $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ p.s. . On admettra sans le démontrer le résultat suivant: toute martingale positive converge p.s..

6. On dit qu'une loi de probabilité μ sur \mathbf{R} est de classe *ME* si son support est \mathbf{R} (c'est-à-dire si on a $\mu([a, +\infty[) > 0$ et $\mu(]-\infty, a]) > 0$ pour tout a réel) et si elle vérifie: $\int e^{\theta x} d\mu(x) < \infty$ pour tout θ réel. On dit qu'une v.a.r X est de classe *ME* si sa loi est de classe *ME*. Si X , de loi μ , est de classe *ME* on définit la fonction L_μ de \mathbf{R} dans \mathbf{R} (dite *log-Laplace* de μ) par la formule:

$$L_\mu(\theta) = \ln E e^{\theta X} = \ln \int e^{\theta x} d\mu(x).$$

On admettra que l'application qui à tout μ de classe *ME* associe L_μ est injective.

On définit la fonction h_μ de \mathbf{R} dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ (dite *transformée de Cramer* de μ) par la formule:

$$h_\mu(x) = \sup_{\theta \in \mathbf{R}} \{\theta x - L_\mu(\theta)\}.$$

7. Si μ et ν sont deux mesures positives on note $\mu \star \nu$ leur produit de convolution, c'est-à-dire la mesure telle que

$$\int f(x) d(\mu \star \nu)(x) = \iint f(x + y) d\mu(x) d\nu(y)$$

pour toute f mesurable positive. On définit par récurrence $\mu^{\star(k+1)} = \mu^{\star k} \star \mu$. Si μ est une probabilité et f un élément de $\mathcal{L}^1(d\mu)$ on note $\mu \star f$ la fonction définie par

$$\mu \star f(x) = \int f(x - y) d\mu(y).$$

8. Un espace mesuré (E, \mathcal{E}, m) est dit σ -fini si E s'exprime comme réunion au plus dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie.

On rappelle l'énoncé du théorème de Fubini pour une fonction positive:

soit $(E_i, \mathcal{E}_i, m_i)_{i=1,2}$ deux espaces mesurés σ -finis et f une application mesurable et positive, définie sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$, alors les applications

$$f_1 : x_1 \mapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2) dm_2(x_2), \quad f_2 : x_2 \mapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2) dm_1(x_1)$$

sont mesurables. De plus

$$\int_{E_1 \times E_2} f d(m_1 \otimes m_2) = \int_{E_1} f_1 dm_1 = \int_{E_2} f_2 dm_2.$$

Préliminaires

A

Dans toute cette partie on considère une v.a.r. X de loi μ de classe ME . Pour simplifier on notera L au lieu de L_μ et h au lieu de h_μ .

1) Montrer que X appartient à tous les \mathbf{L}^p pour $p \geq 1$, et que pour tout θ réel et $p \geq 1$, la v.a. $|X|^p e^{\theta X}$ appartient à \mathbf{L}^1 .

2)

a) Montrer que L est indéfiniment dérivable.

b) Calculer EX en fonction de L .

c) Calculer la dérivée seconde L'' , et montrer qu'elle est strictement positive.

3) Montrer que $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \frac{L(\theta)}{|\theta|} = +\infty$ et que L' est une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .

4)

a) Montrer que h est finie, convexe et que dans la formule de définition de $h(x)$ le sup est atteint en un unique point qu'on notera $\theta(x)$.

b) En déduire que h est indéfiniment dérivable. Si on désigne par h' la dérivée de h , montrer que h' est la bijection de \mathbf{R} sur lui-même réciproque de L' .

c) Montrer que h est une fonction positive s'annulant uniquement en EX .

d) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ on a:

$$L(\theta) = \sup_{x \in \mathbf{R}} \{\theta x - h(x)\}.$$

e) En déduire que deux lois μ et ν sur \mathbf{R} de classe ME ayant même transformée de Cramer sont identiques.

5) Calculer L et h si X suit une loi normale d'espérance m et de variance σ^2 .

B

Dans toute cette partie, on se donne $p \in]1, 2]$.

1) Montrer que pour tout $a > 0$ la fonction $x \mapsto (x+a)^p - x^p$ est croissante et concave sur $[0, +\infty[$.

Options 14/27

2) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires positives, appartenant à \mathbf{L}^p et indépendantes, alors $E[(X + Y)^p] - E(X^p) \leq E[(Y + EX)^p] - (EX)^p$.

3) On note pour $T \in \mathbf{L}^p$, $v_p(T) = E(T^p) - (ET)^p$. Montrer alors que si T_1 et T_2 sont positives, indépendantes et dans \mathbf{L}^p alors

$$v_p(T_1 + T_2) \leq v_p(T_1) + v_p(T_2).$$

4) En déduire que si T_1, \dots, T_n sont positives, indépendantes et dans \mathbf{L}^p et si les c_i sont des réels positifs, alors

$$v_p\left(\sum_{i=1}^n c_i T_i\right) \leq \sum_{i=1}^n (c_i)^p v_p(T_i).$$

Première Partie

On se propose dans cette partie de démontrer des résultats de grandes déviations par rapport à la moyenne.

1) Montrer que si X est une v.a.r., alors pour tout $\theta > 0$, on a $P(X \geq 0) \leq E(e^{\theta X})$.

Jusqu'à la fin de cette première partie on supposera que $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sont des v.a.r. indépendantes de même loi μ de classe ME .

2)

a) Montrer que pour tout $\theta > 0$ et tout $a \in \mathbf{R}$,

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \geq a\right) \leq \exp -n(\theta a - L_\mu(\theta)).$$

b) En déduire, pour $a \geq EX$,

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \geq a\right) \leq \exp -nh_\mu(a).$$

et pour $a \leq EX$,

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \leq a\right) \leq \exp -nh_\mu(a).$$

3) On pose pour $\theta \in \mathbf{R}$, $d\mu_\theta(x) = \exp(\theta x - L_\mu(\theta)) d\mu(x)$.

a) Calculer la log-Laplace de la loi μ_θ , son espérance et sa transformée de Cramer.

b) Exprimer $(\mu_\theta)^{*n}$ en fonction de μ^{*n} .

c) Montrer pour tout $\theta > 0$ et tous $c > b$,

$$\mu^{*n}([nb, nc]) \geq (\mu_\theta)^{*n}([nb, nc]) \exp -n[\theta c - L_\mu(\theta)].$$

d) Montrer que pour tout $d \in]b, c[$, il existe une constante K telle que pour tout $n > 0$ on ait,

$$(\mu_{\theta(d)})^{*n}([nb, nc]) \geq 1 - 2e^{-Kn}.$$

e) En déduire, pour $a \geq EX$,

$$\underline{\lim} \frac{1}{n} \ln P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} > a\right) \geq -h_\mu(a)$$

et pour $a \leq EX$,

$$\underline{\lim} \frac{1}{n} \ln P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} < a\right) \geq -h_\mu(a).$$

Deuxième Partie

On se propose d'étudier désormais des sommes de v.a.r. définies sur un arbre dyadique.

On désigne par \mathbf{U} l'ensemble des suites finies d'éléments de $\{0, 1\}$. La longueur d'un élément u de \mathbf{U} , notée $|u|$ est le cardinal associé: si $u = u_1 u_2 \dots u_n$ avec $u_i = 0$ ou 1 pour tout $i \in [1, \dots, n]$ on a $|u| = n$. Pour tout $n > 0$, on note z_n l'ensemble des u de \mathbf{U} de longueur n . Soit $\Omega = \mathbf{R}^{\mathbf{U}}$ l'ensemble des fonctions de \mathbf{U} dans \mathbf{R} . Pour $u \in \mathbf{U}$, on désigne par X_u l'application coordonnée $X_u(\omega) = \omega(u)$. On munit Ω de la tribu \mathcal{F} engendrée par les $X_u, u \in \mathbf{U}$ et on note pour tout $n > 0$: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_u; |u| \leq n)$. On se donne une loi μ sur \mathbf{R} de classe ME et on munit l'espace (Ω, \mathcal{F}) de la probabilité produit $P = \mu^{\otimes \mathbf{U}}$. Pour tout $n > 0$ et tout $u = u_1 u_2 \dots u_n$, on note $S_u = X_{u_1} + X_{u_1 u_2} + \dots + X_{u_1 u_2 \dots u_n}$. Pour simplifier on notera ici aussi L au lieu de L_μ et h au lieu de h_μ . Si δ_a désigne la masse de Dirac au point $a \in \mathbf{R}$, on note $Z_0 = \delta_0$ et pour $n > 0$

$$Z_n = \sum_{u \in z_n} \delta_{S_u}$$

de sorte que si B est un borélien de \mathbf{R} , on a:

$$Z_n(B) = \text{card} \{u \in z_n : S_u \in B\}.$$

On notera pour f mesurable positive,

$$Z_n(f) = \int f(x) dZ_n(x) = \sum_{u \in z_n} f(S_u).$$

Enfin, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ on note $W_n(\theta) = 2^{-n} \sum_{u \in z_n} \exp[\theta S_u - nL(\theta)]$.

A

1

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et toute fonction g mesurable positive, on a:

$$E(Z_n(g)) = 2^n \mu^{*n}(g).$$

b) Montrer que l'égalité p.s.:

$$E[Z_n(g) | \mathcal{F}_{n-1}] = 2Z_{n-1}(\check{\mu} * g) = 2 \int g d(\mu * Z_{n-1})$$

Options 16/27

est vraie dans les deux cas suivants:

g est continue bornée,

il existe θ réel tel que $g(x) = e^{\theta x}$ pour tout x réel.

c) Montrer que l'inégalité p.s.:

$$E[(Z_n(g))^p | \mathcal{F}_{n-1}] \leq [2Z_{n-1}(\check{\mu} * g)]^p + 2Z_{n-1}(\check{\mu} * (g)^p)$$

est vraie dans les deux cas suivants:

$p = 2$ et g est continue bornée,

$p \in]1, 2[$ et g est positive et appartient à $\mathcal{L}^p(d\mu)$.

d) Montrer que pour toute fonction g continue bornée et tout $n \geq 1$, on a:

$$E[Z_n(g) - 2Z_{n-1}(\check{\mu} * g)]^2 \leq 2^n \|g\|^2.$$

2) Montrer que pour $\theta \in \mathbf{R}$ fixé la suite $W_n(\theta), n > 0$ est une \mathcal{F}_n -martingale. En déduire que $W_n(\theta)$ converge p.s. quand $n \rightarrow +\infty$ vers une v.a. notée $W(\theta)$.

3) Montrer que pour tout a tel que $h(a) < \ln 2$, il existe $p > 1$ tel que la martingale $W_n(\theta(a))$ soit bornée dans \mathbf{L}^p c'est-à-dire que $\sup_{n>0} E[W_n(\theta(a))^p] < \infty$. En déduire que dans ce cas $W_n(\theta(a))$ converge dans \mathbf{L}^1 vers $W(\theta(a))$.

4) On pose, pour tout $n > 0, t \geq 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$: $\varphi_n(t, \theta) = E[\exp -tW_n(\theta)]$. Donner une expression de $E[\exp -tW_n(\theta) | \mathcal{F}_1]$. En déduire que pour tout $n > 0$ on a:

$$\varphi_n(t, \theta) = \left[\int \varphi_{n-1} \left(\frac{t}{2} e^{\theta x} - L(\theta), \theta \right) d\mu(x) \right]^2.$$

5) Montrer que pour $h(a) < \ln 2$ on a: $P(W(\theta(a)) = 0) = 0$.

6) a) Montrer que pour tout $p > 1$ et tout $\theta > 0$ on a:

$$[W_n(\theta)]^p \geq W_n(p\theta) \exp [n(L(p\theta) - pL(\theta) + (1-p)\ln 2)].$$

b) En déduire que si $h(a) > \ln 2$, alors p.s. quand $n \rightarrow \infty, W_n(\theta(a)) \rightarrow 0$.

B

Dans toute la suite du problème on suppose μ centrée c'est-à-dire vérifiant $\int x d\mu(x) = 0$.

1) Montrer que si $a > 0$ et $h(a) > \ln 2$, pour P-presque tout ω il existe n_0 tel que $Z_n([na, +\infty[) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.

2) Montrer que pour tout $a > 0$ et tout n on a: $Z_n([na, +\infty[) \leq 2^n e^{-nh(a)} W_n(\theta(a))$.

3) En déduire que si $a > 0$ et $h(a) < \ln 2$ on a p.s.:

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \ln Z_n([na, +\infty[) \leq -h(a) + \ln 2.$$

4) On se propose de montrer une minoration similaire.

a) On se donne $a > 0$ et $0 < \epsilon < a$. On pose

$$\Gamma_n = \sum_{u \in z_n : S_u \notin [n(a - \epsilon), n(a + \epsilon)]} \exp[\theta(a)S_u - nL(\theta(a))].$$

Montrer que

$$2^n W_n(\theta(a)) \leq Z_n([n(a - \epsilon), +\infty[) \exp[n(a + \epsilon)\theta(a) - nL(\theta(a))] + \Gamma_n$$

et que $\sum_n 2^{-n} E(\Gamma_n) < \infty$. (On pourra penser à utiliser la question 3) de la Première partie)

b) En déduire que si $a > 0$ et $h(a) < \ln 2$ on a p.s.:

$$\liminf \frac{1}{n} \ln Z_n([na, +\infty[) \geq -h(a) + \ln 2.$$

5)

a) Montrer qu'il existe un unique $c > 0$ tel que $h(c) = \ln 2$.

b) Soit $M_n = \max\{S_u; u \in z_n\}$. Prouver que p.s. quand $n \rightarrow +\infty$, $\lim M_n/n = c$.

C

On se propose dans cette partie de montrer un théorème du type limite centrale.

On suppose que la loi μ , centrée, a une variance $\sigma^2 := \int x^2 d\mu(x)$ et on pose pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\varphi_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$

Soit g une fonction continue bornée de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

1)

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a, quand $k \rightarrow +\infty$:

$$\int g\left(\frac{x+y}{\sqrt{n+k}}\right) d\mu^{*k}(y) \rightarrow \int g(y)\varphi_\sigma(y) dy.$$

b) En déduire que pour tout n , p.s. quand $k \rightarrow +\infty$:

$$2^{-n} \iint g\left(\frac{x+y}{\sqrt{n+k}}\right) d\mu^{*k}(y) dZ_n(x) \rightarrow \int g(x)\varphi_\sigma(x) dx.$$

c) Montrer que pour tout n , quand $k \rightarrow +\infty$:

$$E\left[2^{-n} \iint g\left(\frac{x+y}{\sqrt{n+k}}\right) d\mu^{*k}(y) dZ_n(x) - \int g(x)\varphi_\sigma(x) dx\right]^2 \rightarrow 0.$$

2) On fixe n et $k > 0$, et pour $0 \leq j \leq k-1$, on pose

$$\gamma_j = 2^{-(n+j+1)} Z_{n+j+1}(\check{\mu}^{*(k-1-j)} \star g) - 2^{-(n+j)} Z_{n+j}(\check{\mu}^{*(k-j)} \star g).$$

(Par convention, $\check{\mu}^{*0} \star g = g$).

a) Montrer que les v.a.r. γ_j sont orthogonales, c'est-à-dire qu'elles vérifient $E\gamma_i\gamma_j = 0$ pour i et j différents.

b) En déduire que pour tout n et tout k on a:

$$E[2^{-(n+k)} Z_{n+k}(g) - 2^{-n} Z_n(\check{\mu}^{*k} \star g)]^2 \leq 2^{-n} \|g\|^2.$$

3) Montrer que lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$E\left[2^{-n} \int g(x/\sqrt{n}) dZ_n(x) - \int g(x)\varphi_\sigma(x) dx\right]^2 \rightarrow 0.$$

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Le problème est consacré à l'étude des algorithmes d'approximation de nombres irrationnels définis par certains développements en fraction continue.

On note \mathbf{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbf{Z} l'anneau des entiers rationnels, et \mathbf{Q} (resp. \mathbf{R}) le corps des nombres rationnels (resp. réels). Si M et N sont dans \mathbf{Z} , avec $M \leq N$, on note $[M, N]$ l'ensemble des $m \in \mathbf{Z}$ tels que $M \leq m \leq N$.

Un *tableau* T indexé de M à N à valeurs dans un ensemble X est une application $T : m \mapsto a_m$ de $[M, N]$ dans X . La *longueur* de T est égale à $N - M + 1$. On écrit aussi $T = \{a_M, \dots, a_N\}$.

- 1 -

Cette partie définit les fractions continues et donne les procédures de calcul des réduites.

La procédure $\text{Réd}(S, T, n)$ ci-dessous a pour entrées une variable S prenant les valeurs $\{+, -\}$, un tableau $T = \{a_0, \dots, a_n\}$ à valeurs dans l'ensemble des nombres réels ≥ 1 (resp. > 1), et une variable $n \in \mathbf{N}$. Elle utilise comme variables internes une variable z prenant les valeurs $\{+1, -1\}$ et un entier $m \in \mathbf{N}$. Elle a pour sortie le nombre $\xi = \xi_n^S(T) \in \mathbf{R}$.

```

procédure Réd(S, T, n);
début
  si S = + alors z := + 1;
  si S = - alors z := - 1;
  x = a_n;
  pour m := n - 1 à 0 faire
    x := a_m + (z/x);
   $\xi := x$ ;
fin;
    
```

Les nombres $\xi_n^+(T)$ (resp. $\xi_n^-(T)$) s'appellent les *réduites d'ordre n à signes positifs* (resp. à *signes négatifs*) définies par le tableau T .

a) pour $n \geq 0$, on pose

$$[a_0, \dots, a_n]^+ = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}, \quad [a_0, \dots, a_n]^- = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_n}}};$$

montrer que $\xi_n^S(T) = [a_0, \dots, a_n]^S$ pour $S \in \{+, -\}$ et pour $n \geq 0$ (procéder par récurrence sur la longueur de T , et considérer le tableau $T' = \{a_1, \dots, a_n\}$).

La procédure Suite(S, T, F) ci-dessous a pour entrées une variable S prenant les valeurs (+, -), un tableau $T = (a_0, \dots, a_N)$ à valeurs dans la partie N^+ (resp. N^-) de N formé des entiers naturels ≥ 1 (resp. ≥ 2), et une variable F prenant les valeurs (Num, Dén). Elle utilise comme variables internes une variable z prenant les valeurs (+1, -1), deux variables u_{-2} et u_{-1} à valeurs dans N , et une variable n prenant ses valeurs dans $[0, N]$. La sortie est le tableau

$$U^S(T, F) = \{u_0^S(T, F), \dots, u_N^S(T, F)\}.$$

procédure Suite(S, T, F) ;
début
 si S = + alors z := +1 ;
 si S = - alors z := -1 ;
 si F = Num alors
 début
 $u_{-2} := 0$;
 $u_{-1} := 1$;
 fin ;
 si F = Dén alors
 début
 $u_{-2} := z$;
 $u_{-1} := 0$;
 fin ;
 pour n := 0 à N faire
 $u_n := a_n u_{n-1} + z u_{n-2}$;
fin ;

Si $T = (a_0, \dots, a_N)$ est un tableau à valeurs dans N^S , et si $0 \leq n \leq N$, on pose

$$\begin{aligned} p_n &= u_n^+(T, \text{Num}), & q_n &= u_n^+(T, \text{Dén}), & x_n^+ &= \frac{p_n}{q_n}, \\ r_n &= u_n^-(T, \text{Num}), & s_n &= u_n^-(T, \text{Dén}), & x_n^- &= \frac{r_n}{s_n} \end{aligned}$$

b) Calculer x_0^S et x_1^S pour $S \in \{+, -\}$. Montrer que pour $0 \leq n \leq N$ et pour $S \in \{+, -\}$, les nombres x_n^S sont les réduites du tableau T, c'est-à-dire que l'on a

$$x_n^S = [a_0, \dots, a_n]^S$$

(On pourra procéder comme suit. Les définitions précédentes gardent un sens si $T = (a_0, \dots, a_n)$ est un tableau à valeurs dans l'ensemble des nombres rationnels ≥ 1 (resp. > 1). Pour $0 \leq n \leq N-1$, considérer le tableau

$$T' = (a_0, \dots, a'_n) \quad \text{où} \quad a'_n = a_n \pm \frac{1}{a_{n+1}},$$

montrer que $a_{n+1} u^S(T', F, n) = u^S(T, F, n+1)$, remarquer que $[a_0, \dots, a_{n+1}]^S = [a_0, \dots, a'_n]^S$, puis établir le résultat par récurrence).

Options 20/27

c) *Application numérique.* — Exécuter la procédure Suite(S, T, F) pour les deux valeurs de F et pour

$$S = +, T = \{3, 7, 15, 1\}, \quad \text{et} \quad S = -, T = \{4, 2, 2, 2, 2, 2, 17\}.$$

Calculer les réduites. Qu'observe-t-on ?

— II —

Cette partie est consacrée au développement en fraction continue d'un nombre irrationnel.

On note I l'ensemble des nombres irrationnels > 1 . Si $\alpha \in I$, le *plafond* de α est l'unique entier $[\alpha]^- \in \mathbb{N}^-$ tel que

$$[\alpha]^- - 1 < \alpha \leq [\alpha]^-,$$

et le *plancher* de α est l'unique entier $[\alpha]^+ \in \mathbb{N}^+$ tel que

$$[\alpha]^+ \leq \alpha < [\alpha]^+ + 1.$$

La procédure $\text{FracCont}(S, \alpha, n)$ ci-dessous a pour entrées une variable S prenant les valeurs (+, -), un nombre $\alpha \in I$, un entier $n \in \mathbb{N}$, et pour sorties un tableau $\text{FC}^S(\alpha, n) = \{a_0^S, \dots, a_n^S\}$ à valeurs dans \mathbb{N}^S et un nombre $\alpha_{n+1}^S \in I$.

Procédure $\text{FracCont}(S, \alpha, n)$;

début

$x := \alpha$;

pour $m := 0$ à n **faire**

début

$a_m^S := [x]^S$;

$x := 1 / |a_m^S - x|$;

fin ;

$\alpha_{n+1}^S := x$;

fin ;

a) Exprimer α_n^S en fonction de α_{n+1}^S pour $n \geq 0$ et pour $S \in \{+, -\}$. En déduire que

$$\alpha = [a_0^S, \dots, a_n^S, \alpha_{n+1}^S]^S.$$

b) *Application numérique.* — On prend $\alpha = \pi = 3,1415927\dots$; exécuter la procédure $\text{FracCont}(S, \alpha, n)$ avec $S = +, n = 3$ d'une part et $S = -, n = 7$ d'autre part. Pour quels indices n et k a-t-on $\alpha_n^- = \alpha_k^+ + 1$?

c) *Application numérique.* — Exécuter la procédure $\text{FracCont}(S, \alpha, n)$ pour $\alpha = \sqrt{7}$ avec $S = +, n = 5$ d'une part et $S = -, n = 3$ d'autre part, en calculant les valeurs exactes des nombres α_n^S dans le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$. Pour quels indices n et k a-t-on $\alpha_n^- = \alpha_k^+ + 1$? Pour quels indices p et q a-t-on $\alpha_p^S = \alpha_q^S$?

Ondit qu'une suite $(b_n)_{n \geq 0}$ est *périodique* de période $m \geq 1$ à partir du terme d'ordre s si

$$b_{s+km+c} = b_{s+c}$$

pour $0 \leq c \leq m-1$ et pour $k \geq 1$, autrement dit si le tableau T défini par cette suite s'écrit

$$T = \{ b_0, \dots, b_{s-1}, b_s, \dots, b_{s+m-1}, b_s, \dots, b_{s+m-1}, \dots \}$$

d) *Application numérique.* — Montrer en utilisant les résultats de la question précédente que les tableaux $FC^-(\sqrt{7}, n)$ et $FC^+(\sqrt{7}, n)$ sont périodiques à partir du deuxième terme.

e) *Application numérique.* — Exécuter la procédure Suite(S, T, F) pour les deux valeurs de F et pour

$$S = +, T = \text{FracCont}(+, \sqrt{7}, 5) \quad \text{et} \quad S = -, T = \text{FracCont}(-, \sqrt{7}, 3).$$

Calculer les réduites correspondantes. Qu'observe-t-on ?

— III —

Cette partie traduit la notion de fraction continue en termes de matrices.

On note $GL(2, \mathbf{Z})$ le groupe des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes à coefficients dans \mathbf{Z} et de déterminant ± 1 , et $SL(2, \mathbf{Z})$ le sous-groupe de $GL(2, \mathbf{Z})$ formé des matrices de déterminant 1. Si $a \in \mathbf{Z}$ et si $S \in \{+, -\}$, on pose

$$M^S(a) = \begin{bmatrix} a \pm 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

suivant la valeur de S . Si $T = \{a_0, \dots, a_n\}$ est un tableau à valeurs dans \mathbf{N}^S , on pose, pour $n \geq 1$:

$$D^S(T) = M^S(a_0) \dots M^S(a_n).$$

a) Montrer que l'on a, avec les notations de la partie I :

$$D^+(T) = \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix}, \quad D^-(T) = \begin{bmatrix} r_n & -r_{n-1} \\ s_n & -s_{n-1} \end{bmatrix}.$$

b) Montrer que pour $n \geq 0$, les nombres p_n et q_n (resp. r_n et s_n) sont premiers entre eux.

Si $\alpha \in \mathbf{I}$, et si $M \in GL(2, \mathbf{Z})$, on pose

$$M.\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \quad \text{si} \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{Z}).$$

Options 22/27

c) Montrer que $M^S(a). \beta \in I$ si $S \in \{+, -\}$, si $\beta \in I$ et $a \in \mathbb{N}^S$. Si $\alpha \in I$, si $S \in \{+, -\}$, et si $n \geq 0$, montrer que

$$\alpha_n^S = M^S(a_n). \alpha_{n+1}^S \text{ si } FC^S(\alpha, n) = \{a_0, \dots, a_n\}.$$

d) Soient $T = \{a_0, \dots, a_n\}$ un tableau à valeurs dans \mathbb{N}^S , où $S \in \{+, -\}$, et $\beta \in I$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $FC^S(\alpha, n) = T$, et $\beta = \alpha_{n+1}^S$;

(ii) $\alpha = D^S(T). \beta$.

(pour montrer que (i) \Rightarrow (ii), poser $\beta_m = M^S(a_m) \dots M^S(a_n). \beta$ pour $0 \leq m \leq n$; montrer que $\beta_m \in I$, et établir par récurrence que $FC^S(\alpha, m) = \{a_0, \dots, a_m\}$ et $\beta_{m+1} = \alpha_{m+1}^S$).

- IV -

Dans cette partie, on établit comment un nombre est approché par les réduites de sa fraction continue.

Si $\alpha \in I$, soient r_n et s_n le numérateur et le dénominateur de la réduite x_n^- à signes négatifs définie par le tableau $FC^-(\alpha, n) = \{b_0, \dots, b_n\}$ défini dans la question II.

a) Montrer que les suites d'entiers $(r_n)_{n \geq -1}$ et $(s_n)_{n \geq -1}$ sont strictement croissantes (remarquer que $b_n \geq 2$ pour $n \geq 0$).

b) Montrer que la suite $(x_n^-)_{n \geq 0}$ est décroissante.

c) En utilisant le résultat de la question III.d, montrer que pour $n \geq 0$ on a

$$r_n - s_n \alpha = \frac{1}{s_n \alpha_{n+1}^- - s_{n-1}}.$$

d) Montrer que pour $n \geq 0$ on a

$$r_n - s_n \alpha = \frac{1}{\alpha_1^- \dots \alpha_{n+1}^-}.$$

e) Montrer que $0 < r_n - s_n \alpha < 1$ pour tout $n \geq 0$, et que la suite $(r_n - s_n \alpha)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante.

f) Montrer que la suite $(r_n - s_n \alpha)_{n \geq 0}$ tend vers 0 (on peut remarquer que $b_n \geq 3$ pour une infinité d'entiers n).

- V -

On compare dans cette partie le développement d'un nombre en fraction continue à signes positifs et en fraction continue à signes négatifs.

On pose

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit $c \in \mathbf{N}$.

a) Montrer que $M^+(c+1) = KUV^c$ et $M^-(2)^c = UV^cU^{-1}$.

b) Montrer que $M^+(c) = M^-(c+1)K = KM^-(2)^{c-1}U$.

c) Soit k un entier pair ≥ 0 ; montrer que l'on a

$$M^+(c_0) M^+(c_1) \dots M^+(c_k) M^+(c) = M^-(c_0+1) M^-(2)^{c_1-1} \dots M^-(c_k+2) M^-(2)^{c-1} U$$

quels que soient les entiers naturels c_0, \dots, c_k .

d) Soit $\alpha \in \mathbf{I}$ et k un entier pair. On pose, pour $k \geq 2$:

$$FC^+(\alpha, k-1) = \{c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_{k-2}, c_{k-1}\}, \quad v(k) = c_1 + c_3 + \dots + c_{k-1}.$$

Montrer que $\alpha_{v(k)}^- = \alpha_k^+ + 1$, et

$$FC^-(\alpha, v(k)-1) = \{c_0 + 1, \overbrace{2, \dots, 2}^{c_1-1}, c_2 + 2, \dots, c_k + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{c_k-1-1}\}.$$

e) Montrer que $x_{v(k)-1}^- = x_k^+ - 1$.

f) *Application numérique.* — Vérifier les calculs faits en II.b, c'est-à-dire calculer $FC^-(\pi, 7)$ connaissant $FC^+(\pi, 3)$; expliquer les constatations faites en I.c et II.b.

g) *Application numérique.* — Calculer $v(k)$ pour tout k pair ≥ 2 lorsque $\alpha = \sqrt{7}$. Vérifier les calculs faits en II.c, c'est-à-dire calculer $FC^-(\sqrt{7}, 3)$ connaissant $FC^+(\sqrt{7}, 7)$; expliquer les constatations faites en II.c.

h) *Application numérique.* — Comparer les longueurs des tableaux $FC^+(\alpha, k-1)$ et $FC^-(\alpha, v(k)-1)$ pour

$$\alpha = \sqrt{7}, \quad \alpha = \sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]^+, \quad \alpha = \sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \dots]^+.$$

Calculer les tableaux $FC^-(\alpha, n)$ pour ces valeurs de α , et comparer les vitesses d'approximation vers α des suites de réduites $(x_n^+)_{n \geq 0}$ et $(x_n^-)_{n \geq 0}$.

- VI -

Dans cette partie, on étudie comment le développement en fraction continue d'un nombre irrationnel α peut s'interpréter géométriquement comme l'approximation de la droite de pente α par des vecteurs à coordonnées entières.

Soit $\alpha \in \mathbb{I}$; on note $D(\alpha)$ la droite de \mathbb{R}^2 engendrée par le vecteur $(1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, et pour $n \geq 0$ on pose

$$\mathbf{X}_n^- = (s_n, r_n) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{X}_n^+ = (q_n, p_n) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Montrer que les vecteurs \mathbf{X}_n^- sont situés au-dessus de la droite $D(\alpha)$, et que la distance euclidienne des vecteurs \mathbf{X}_n^- à cette droite tend vers 0.

b) Soit k un entier pair ≥ 0 . Pour $S \in \{+, -\}$, on pose $\text{FC}^S(\alpha, n) = T_n^S$. Montrer en utilisant V.c et V.d que si $c \geq 1$ on a

$$D^+(T_k^+)M^+(c) = D^-(T_v^-)U \quad \text{où } v = v(k) + c - 1,$$

où on a posé $v(0) = 0$, et où les matrices $D^S(T_n^S)$ sont définies en III.a.

c) En observant que pour $n \geq 0$ et pour $S \in \{+, -\}$, on a

$$\mathbf{X}_n^S = W D^S(T_n^S) \mathbf{e}_1 \quad \text{où } \mathbf{e}_1 = (1, 0) \quad \text{et} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

montrer que si $0 \leq c \leq c_{k+1}$, on a

$$\mathbf{X}_v^- = \mathbf{X}_{k-1}^+ + c \mathbf{X}_k^+,$$

et que les vecteurs \mathbf{X}_v^- sont alignés sur le segment d'origine \mathbf{X}_{k-1}^+ et d'extrémité \mathbf{X}_{k+1}^+ .

d) Pour $0 \leq c \leq c_{k+1}$, calculer la réduite x_v^- en fonction des numérateurs et des dénominateurs des réduites x_{k-1}^+ et x_k^+ .

e) *Application numérique.* — Calculer les vecteurs \mathbf{X}_n^- lorsque $\alpha = \pi$ pour $-1 \leq n \leq 7$ à partir des vecteurs \mathbf{X}_n^+ pour $-1 \leq n \leq 3$.

- VII -

On établit un lien entre les formes quadratiques et le développement en fraction continue de leurs racines à travers la notion de forme dérivée.

Soit $D \in \mathbb{N}$ non carré. On note $\mathcal{Q}(D)$ l'ensemble des formes quadratiques

$$Q(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2$$

avec $A, B, C \in \mathbf{Z}$ et $B^2 - 4AC = D$. On note aussi $Q = [A, B, C]$ une telle forme quadratique. Si on pose

$$\alpha(Q) = \frac{B + \sqrt{D}}{2C} = \frac{2A}{B - \sqrt{D}}, \quad \alpha'(Q) = \frac{B - \sqrt{D}}{2C} = \frac{2A}{B + \sqrt{D}},$$

les formules de résolution de l'équation du second degré impliquent $Q = C(\alpha(Q)X + Y)(\alpha'(Q)X + Y)$.

Si $Q \in \mathbf{Q}(D)$, on pose

$$Q \circ M(X, Y) = Q(aX + bY, cX + dY) \quad \text{si} \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbf{Z}).$$

La forme dérivée ∂Q d'une forme $Q \in \mathbf{Q}(D)$ est la forme

$$\partial Q = Q \circ T(b), \quad \text{où} \quad b = [\alpha(Q)]^- \quad \text{et} \quad T(b) = {}^t M^-(b)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

(cette notion n'a rien à voir avec la notion de dérivée introduite en analyse).

a) Montrer que $\partial Q = [A^*, B^*, C^*]$, où

$$A^* = C; \quad B^* = 2bC - B; \quad C^* = A - Bb + Cb^2.$$

b) Si $Q \in \mathbf{Q}(D)$, montrer que $\alpha(\partial^n Q) = \alpha(Q)_n^-$ pour tout $n \geq 0$.

c) Pour $n \geq 0$ on pose $D_n^- = D^-(T_n^-)$ et $F_n^- = {}^t(D_n^-)^{-1}$, où $T_n^- = FC^-(\alpha, n)$, de telle sorte que

$$F_n^- = \begin{bmatrix} -s_{n-1} & -s_n \\ r_{n-1} & r_n \end{bmatrix}.$$

Montrer que $\partial^n Q = Q \circ F_{n-1}^-$ pour $n \geq 1$.

d) Si $Q \in \mathbf{Q}(D)$ et si $n \geq 0$, on pose $\partial^n Q = [A_n, B_n, C_n]$. Montrer que

$$A_n = Q(-s_{n-2}, r_{n-2}) = C_{n-1}.$$

- VIII -

On étudie ici la réduction des formes quadratiques binaires de discriminant positif.

On dit qu'une forme $Q = [A, B, C] \in \mathbf{Q}(D)$ est *réduite* si

$$A > 0, \quad C > 0, \quad B > A + C.$$

a) montrer qu'une forme $Q \in \mathbf{Q}(D)$ est réduite si et seulement si

$$C > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha'(Q) < 1 < \alpha(Q)$$

(On pourra remarquer que $A = Q(1, 0)$, $C = Q(0, 1)$, $A + C - B = Q(-1, 1)$).

b) Montrer que les formes réduites sont celles qui s'écrivent

$$Q_{K,A} = [A, K + 2A, K + A - \frac{D - K^2}{4A}],$$

où $K \in \mathbf{Z}$ vérifie

$$|K| \leq \sqrt{D}, \quad K^2 \equiv D \pmod{4}, \quad A \mid \frac{D - K^2}{4}, \quad A > \frac{\sqrt{D} - K}{2}.$$

c) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de formes réduites dans $\mathbf{Q}(D)$.

d) *Application numérique.* — Calculer toutes les formes réduites de discriminant 28 (il y en a 7).

e) Montrer que ∂Q est réduite si Q est réduite.

f) Si $Q = [A, B, C] \in \mathbf{Q}(D)$, on pose $\tilde{Q} = [C, B, A]$. Si Q et Q' sont deux formes réduites de $\mathbf{Q}(D)$, montrer que $Q_1 = \partial Q$ si et seulement si $\tilde{Q} = \partial \tilde{Q}_1$. (Puisque l'application $Q \mapsto \tilde{Q}$ est une involution, il suffit d'établir que si $Q_1 = \partial Q$, alors $\tilde{Q} = \partial \tilde{Q}_1$; on montrera pour cela que $\alpha(\tilde{Q}_1) = b - \alpha'(Q)$ où $b = [\alpha(Q)]^-$, et on utilisera la relation

$$T(b)^{-1} = WT(b)W \quad \text{où} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

g) Montrer que si $Q \in \mathbf{Q}(D)$ est réduite, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\partial^m Q = Q$. (utiliser c) et e) pour montrer qu'il existe deux entiers $m \geq 1$ et $n \geq 0$ tels que $\partial^{m+n} Q = \partial^n Q$; utiliser f) pour montrer que l'on peut prendre $n = 0$).

h) On note $\mathbf{Q}_{\text{réd}}(D)$ l'ensemble des formes réduites de $\mathbf{Q}(D)$. Une *classe* de $\mathbf{Q}_{\text{réd}}(D)$ est une suite finie $(Q, \partial Q, \dots, \partial^{m-1} Q)$ où $\partial^m Q = Q$. Montrer que l'ensemble $\mathbf{Q}_{\text{réd}}(D)$ est réunion disjointe de ses classes.

i) *Application numérique.* — Calculer les classes de $\mathbf{Q}_{\text{réd}}(28)$.

- IX -

Dans ce qui suit, on prend $d \in \mathbf{N}$ non carré. Cette partie est consacrée à la résolution de l'équation de Pell $Y^2 - dX^2 = 1$.

a) Si $Q(X, Y) = Y^2 - dX^2$, montrer que ∂Q est réduite.

b) Soit $d \in \mathbf{N}$ non carré. Montrer en utilisant la question VIII.h que pour un certain entier $m \geq 1$, le tableau $FC^{-1}(\sqrt{d}, n)$ est périodique de période m à partir du deuxième terme.

c) On note r_m et s_m le numérateur et le dénominateur de la réduite x_m de \sqrt{d} . Montrer que

$$r_{km-1}^2 - ds_{km-1}^2 = 1 \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

d) *Application numérique.* — Calculer une solution de l'équation $X^2 - 7Y^2 = 1$.

e) On prend $\alpha = \sqrt{d}$ et on pose $\eta = \alpha_1^- \dots \alpha_m^-$. Montrer en utilisant IV.d que l'on a

$$\eta = r_{m-1} + s_{m-1} \sqrt{d}.$$

f) Montrer que la vitesse de convergence de la suite $(r_{km-1} - \alpha s_{km-1})_{k \geq 0}$ vers 0 est exponentielle ; de façon précise, montrer en utilisant encore IV.d que pour tout $k \geq 0$, on a

$$0 < r_{km-1} - \alpha s_{km-1} < \frac{1}{\eta^k}.$$

g) On pose $FC^-(\sqrt{d}, n) = T_n = \{b_0, \dots, b_n\}$. Montrer que pour tout $k \geq 0$, on a

$$D^-(T_{km}) = M^-(b_0)M^m \quad \text{où} \quad M = M^-(b_1) \dots M^-(b_m).$$

En déduire un algorithme de calcul du vecteur $X_{km-1}^- = (s_{km-1}, r_{km-1})$ en fonction de M , k et b_0 .

h) *Application numérique.* — Calculer η et M pour $\alpha = \sqrt{7}$.

— X —

On étudie un algorithme rapide de calcul de la racine carrée.

On pose, pour $t > 0$: $f(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{d}{t} \right)$.

On pose aussi $t_0 = [d]^-$ et on définit par récurrence la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ en posant $t_{n+1} = f(t_n)$.

a) Montrer que cette suite est un algorithme d'approximation de \sqrt{d} .

b) Etablir successivement que l'on a $f(t)^2 - d = \left(\frac{t^2 - d}{2t} \right)^2$,

$$\frac{t^2 - d}{2t} < t - \sqrt{d} \quad \text{si } t > \sqrt{d},$$

$$0 < f(t) - \sqrt{d} < \frac{(t - \sqrt{d})^2}{2\sqrt{d}} \quad \text{si } t > \sqrt{d};$$

en déduire que si on pose $\varepsilon_n = t_n - \sqrt{d}$ pour $n \geq 0$, on a

$$0 < \varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{d}}.$$

c) Montrer que la vitesse de convergence de la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ vers \sqrt{d} est doublement exponentielle. On pourra établir à cette fin que pour $n \geq 0$, on a $\varepsilon_n \leq \eta_n$ avec

$$\eta_n = 2\sqrt{d} \left(\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{d}} \right)^{2^n}.$$

d) *Application numérique.* — Calculer $\sqrt{7}$ avec une erreur inférieure à deux dix-millièmes. Comparer t_0 , t_1 et t_2 aux réduites de $\sqrt{7}$ calculées en II.e.