

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

Direction des personnels enseignants des lycées et collèges

AGREGATION

MATHEMATIQUES

Rapport de Monsieur DABLANC
Inspecteur général de l'Education nationale
Président

1987

1. COMPOSITION DU JURY

M.	Jacques DABLANC	Inspecteur général de l'Education nationale, Président
M.	Paul ATTALI	Inspecteur général de l'Education nationale, Vice-Président
M.	Guy RENAULT	Professeur à l'Université de Poitiers, Vice-Président
M.	Jacques CAMUS	Professeur à l'Université de Rennes I, Vice-Président
Melle	Françoise BOIGEY	Maître de conférences à l'Université de Paris VI
M.	Jean-Pierre BOREL	Maître de conférences à l'Université de Limoges
M.	Claude-Michel BRAUNER	Professeur à l'Ecole centrale de Lyon
M.	François BRODEAU	Professeur à l'Université des Sciences sociales à Grenoble
M.	Claude CARASSO	Professeur à l'Université de Saint-Etienne
M.	Roger DALLARD	Professeur au lycée Pasteur à Neuilly
M.	Paul DEHEUVELS	Professeur à l'Université de Paris VI
M.	Patrick DEHORNOY	Professeur à l'Université de Caen
M.	Jean-Paul DURUISSEAU	Maître de conférences à l'Université de Paris VI
M.	Jean-Pierre FERRIER	Professeur à l'Université de Nancy I
M.	Philippe FLAJOLET	Directeur de recherches à l'Institut national de recherches en informatique et automatique
M.	Michel GONNORD	Professeur au lycée Pierre de Fermat à Toulouse
M.	Guy HENNIART	Professeur à l'Université de Paris XI
M.	Francis HUMMEL	Professeur au lycée Thiers à Marseille
M.	Thierry JEULIN	Professeur à l'Université de Paris VII
Mme	Michèle LODAY-RICHAUD	Maître de conférences à l'Université de Strasbourg I
M.	Charles MARLE	Professeur à l'Université de Paris VI
M.	Maurice MIGNOTTE	Professeur à l'Université de Strasbourg I
M.	Jacques MOISAN	Professeur au lycée Descartes à Tours
M.	Jean-Yves OUVRARD	Maître de conférences à l'Université de Grenoble
M.	Hervé PEPIN	Professeur au lycée Condorcet à Paris

M. Jean-Eric PIN
Mme Geneviève POURCIN
M. Marc PREVOST
M. Jean-Luc QUEVA
M. Jean-Claude RAOULT
M. Francis ROUVIERE
Mme Michelle SCHATZMAN
M. Denis SERRE
M. Alain TISSIER
M. VERNOTTE
M. Jean-Pierre VIAL
Mme Annie VOGEL

Chargé de recherches à l'Université de Paris VI
Professeur à l'Université d'Angers
Professeur au lycée Branly à Boulogne-sur-Mer
Professeur au lycée technique Gaston Berger à Lille
Professeur à l'Université de Rennes
Professeur à l'Université de Nice
Professeur à l'Université de Lyon I
Enseignant à l'Université de Saint-Etienne
Professeur au lycée Albert Schweitzer au Raincy
Professeur au lycée Victor Hugo à Besançon
Professeur au lycée Buffon à Paris
Maître de conférences à l'Université de Nantes.

2. CALENDRIER DES EPREUVES

2.1. Epreuves écrites

. Elles ont eu lieu aux dates suivantes : 22-23-24 avril 1987

Mathématiques générales :
Analyse
Mathématiques appliquées.

. La liste d'admissibilité a été affichée le 5 juin 1987 au lycée Montaigne et 34, rue de Châteaudun.

2.2. Epreuves orales

Elles se sont déroulées du 14 juin au 15 juillet 1987 au lycée Montaigne à Paris.

La liste d'admission a été affichée le 15 juillet 1987.

3. STATISTIQUES DIVERSES

3.1. Résultats généraux

Postes mis au concours.....	230
Candidats inscrits.....	1 538
Candidats présents à la première épreuve.....	1 044
Candidats présents à la dernière épreuve.....	944
Admissibles.....	349
Admis.....	230
Proposés pour l'équivalence des épreuves théoriques du CAPES.....	6
Moyenne sur 20 des points obtenus par :	
Le premier admissible.....	20
Le dernier admissible.....	7,5
Le premier agrégé.....	12,6
Le dernier agrégé.....	7,5.

3.2. Répartition des notes d'écrit

Le tableau ci-dessous indique le nombre $N(m)$ des candidats ayant obtenu aux épreuves écrites une moyenne, sur 20, supérieure (au sens large) à m .

m	20	18	16	14	12	10	9	8
$N(m)$	2	12	29	61	100	187	246	314
m	7	6	5	4	2			
$N(m)$	387	466	555	630	853			

3.3. Répartition entre les options

	INFORMATIQUE	ANALYSE NUMERIQUE	MECANIQUE	PROBABILITES
Inscrits	188	552	186	612
Admissibles	47	137	39	126
Admis	38	93	25	74

3.4. Situation universitaire des candidats

Dans le tableau suivant, les notations U, J, C, F, T, correspondent aux candidats des E.N.S., Ulm, Jourdan, Saint-Cloud, Fontenay et ENSET.

Les autres abréviations sont les suivantes :

E.....	Etudiants
C.P.R.....	Stagiaires de C.P.R.
B.A.....	Professeurs bi-admissibles
P.C.....	Certifiés ; certifiés stagiaires
A.....	Assistants
CO.....	Coopérants ou détachés
S.N.....	Professeurs au service militaire en congé, en sursis ou en disponibilité
D.....	A.E., PEGC, Instituteurs, M.I.-S divers
M.A.....	Maîtres auxiliaires
P.....	Enseignement privé
I.....	Ingénieur.

CANDIDATS	U	J	C	F	T	E	CPR	B.A.	PC
Inscrits	16	6	15	24	34	102	119	66	770
Admissibles	13	6	15	22	33	41	19	39	97
Admis	12	6	15	20	33	27	9	27	46

CANDIDATS	A	OO	S N	M A	P	D	I	TOTAL
Inscrits	10	45	56	39	151	74	11	1 538
Admissibles	3	10	20	6	10	14	1	349
Admis	3	4	16	3	4	4	1	230

3.5. Répartition entre candidats et candidates

	CANDIDATS	CANDIDATES
Inscrits	1 045	493
Admissibles	256	93
Admis	167	63

res

aire,
spo-

L.-S

3.6. Répartition suivant les centres d'écrit

CANDIDATS CENTRES	INSCRITS	AYANT COMPOSÉ AUX TROIS ÉPREUVES	ADMISSIBLES	ADMIS
Aix-Marseille	56	33	10	8
Amiens	52	30	7	2
Besançon	5	4	2	1
Bordeaux-Pau	38	26	7	2
Caen	34	19	2	1
Cl-Ferrand	13	8	1	0
Dijon	40	21	3	2
Grenoble	43	25	6	4
Lille	122	82	21	12
Limoges	7	4	1	1
Lyon-St-Etienne	69	37	16	7
Montpellier	32	20	6	3
Nancy-Metz	69	45	14	4
Nantes	72	36	15	11
Nice	22	15	4	1
Orléans-Tours	57	33	7	3
Paris	411	274	163	132
Poitiers	13	7	0	0
Reims	44	23	6	4
Rennes-Brest	67	37	8	6
Rouen	57	33	9	4
Strasbourg Mulhouse	39	28	8	4
Toulouse	35	21	11	6
Corse	7	2	2	2
Autres centres	134	81	20	10

RECUS PAR CENTRES D'ECRIT

	Etudiants SE	Certifiés inadmissibles MA	Stagiaires CPR	Congé pour études Report de stage	Enseignement privé	Divers	TOTAL
PARIS-CRETEIL-VERSAILLES (Hors ENS)	12	18	4	7	2	3	46
AJACCIO		2					2
ATX-MARSEILLE	1	7					8
AMIENS		2					2
BESANCON		1					1
BORDEAUX-PAU		1		1			2
CAEN				1			1
CLERMONT-FERRAND							0
DLJON	1	1					2
GRENOBLE	1	3					4
LILLE	1	7		2	1	1	12
LIMOGES						1	1
LYON SAINT-ETIENNE	3	3		1			7
MONTPELLIER	1	2					3
NANCY-METZ		2	1	1			4
NANTES	2	6	1		1	1	11
NICE		1					1
ORLEANS-TOURS	1	2					3
POTTIERS							0
REIMS		3	1				4
RENNES	2	2	2				6
ROUEN	1	3					4
STRASBOURG		3		1			4
TOULOUSE	2	2		1		1	6
ANTILLES-GUYANE-REUNION		5					5
ETRANGER				1		4	5
	28	76	9	16	4	11	144

+ ENS 230

Normaliens	Ulm	12
	Jourdan	6
	St Cloud	15
	Fontenay	20
	Cachan	33
	Total	86

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Dans tout le problème, on fixe un entier n strictement positif, et on note E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n sur le corps \mathbb{R} des nombres réels.

On munit E de sa structure standard d'espace euclidien. Pour x et y dans E , on note $\|x\|$ la norme de x et $x \cdot y$ le produit scalaire de x et y ; si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on a donc :

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad \|x\|^2 = x \cdot x.$$

On note O l'élément neutre de $(E, +)$.

On note \mathcal{I}_s le groupe des applications *affines* isométriques de E dans lui-même, \mathcal{O} le sous-groupe de \mathcal{I}_s formé des applications *linéaires* isométriques (le groupe orthogonal de E), \mathcal{T} le sous-groupe formé des translations; si x appartient à E , on note t_x la translation de vecteur x ; si X est une partie de E , on note \mathcal{T}_x l'ensemble des translations dont les vecteurs sont dans X ; on note I l'application identité de E , translation de vecteur nul.

On note \mathcal{L} l'algèbre $\text{End}(E)$ des applications linéaires de E dans E . On munit \mathcal{L} de la norme des opérateurs : la norme d'un élément f de \mathcal{L} est

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| / \|x\| \mid x \in E, x \neq 0 \}.$$

On munit \mathcal{L} et ses sous-ensembles de la topologie induite par cette norme.

Si Γ est un groupe et α, β deux éléments de Γ , on note $[\alpha, \beta]$ le commutateur $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ de α et β . On rappelle qu'un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* (ou *normal*) si, quels que soient α dans Δ et β dans Γ , alors $\beta\alpha\beta^{-1}$ appartient à Δ .

Pour tout entier g strictement positif, on note \mathbb{N}_g l'ensemble des entiers de 1 jusqu'à g .

Un sous-groupe G de \mathcal{I}_s est dit *cristallographique* s'il vérifie les deux conditions C1 et C2 suivantes :

C1. — Il existe un nombre réel d tel que, pour tout vecteur x de E , il existe un élément α de G vérifiant

$$\|\alpha(O) - x\| \leq d.$$

C2. — Quel que soit le nombre réel T , il existe seulement un nombre fini d'éléments α de G vérifiant

$$\|\alpha(O)\| \leq T.$$

Le but du problème est la démonstration du théorème suivant, dû à L. BIEBERBACH.

THÉORÈME : Tout sous-groupe cristallographique de \mathcal{I}_s contient n translations linéairement indépendantes.

I. PRÉLIMINAIRES

A. DÉCOMPOSITION DES ÉLÉMENTS DE \mathfrak{S} .

1. Soit α un élément de \mathfrak{S} ; montrer qu'il existe un et un seul élément (a, A) de $E \times \mathcal{O}$ tel que $\alpha = t_a \circ A$.
 NOTATION : on pose $a = \tau(\alpha)$, $A = \pi(\alpha)$, et on note π l'application $\alpha \mapsto \pi(\alpha)$ de \mathfrak{S} dans \mathcal{O} , τ l'application $\alpha \mapsto \tau(\alpha)$ de \mathfrak{S} dans E .

2. Prouver que π est un morphisme de groupes de \mathfrak{S} dans \mathcal{O} .
 Déterminer son image et son noyau.

3. Si G est un sous-groupe de \mathfrak{S} , prouver que $G \cap \mathfrak{C}$ est un sous-groupe abélien distingué de G .
 Soit α un élément de \mathfrak{S} . Posons $a = \tau(\alpha)$ et $A = \pi(\alpha)$.

4. Soit x un vecteur de E ; prouver qu'on a

$$\alpha \circ t_x \circ \alpha^{-1} = t_{A(x)}.$$

Soit β un autre élément de \mathfrak{S} . Posons $b = \tau(\beta)$ et $B = \pi(\beta)$.

5. Calculer $\tau(\alpha\beta)$ en fonction de a, A, b et B .
 6. Calculer $\tau(\alpha^{-1})$ et $\pi(\alpha^{-1})$ en fonction de a et A .
 7. Posons $\gamma = [\alpha, \beta]$. Prouver qu'on a

$$\begin{aligned} \pi(\gamma) &= [A, B] \\ \text{et } \tau(\gamma) &= (A - I)(b) + (I - [A, B])b + A(I - B)A^{-1}(a). \end{aligned}$$

B. ÉTUDE DE LA NORME D'OPÉRATEURS.

Si f est un élément de \mathcal{L} , on note f^* l'endomorphisme adjoint de f .

1. Montrer que l'application $f \mapsto f^*f$ de \mathcal{L} dans lui-même est continue. Prouver que \mathcal{O} est compact et que les applications $(A, B) \mapsto AB$ de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans \mathcal{O} et $A \mapsto A^{-1}$ de \mathcal{O} dans \mathcal{O} sont continues.
 2. Soit f un élément de \mathcal{L} . Montrer que f^*f est diagonalisable dans une base orthonormale de E , que ses valeurs propres sont des nombres réels positifs et que $\|f\|^2$ est la plus grande valeur propre de f^*f .
 Pour tout élément f de \mathcal{L} , on note E_f l'ensemble des vecteurs x de E vérifiant $\|f(x)\| = \|f\| \cdot \|x\|$.
 3. Soit f un élément de \mathcal{L} . Prouver que E_f est un sous-espace vectoriel de E , non réduit à $\{0\}$.
 4. Quels sont les éléments f de \mathcal{L} pour lesquels E_f est E tout entier ?
 5. Soient f dans \mathcal{L} et A dans \mathcal{O} . Prouver qu'on a

$$\|f\| = \|fA\| = \|Af\|.$$

Pour tout élément A de \mathcal{O} , on pose $m(A) = \|A - I\|$ et on note M_A l'espace vectoriel E_{A-I} , M_A^\perp son orthogonal dans E .

6. Soit A un élément de \mathcal{O} , prouver que M_A et M_A^\perp sont stables par A .
 7. Soient A et B dans \mathcal{O} , prouver qu'on a

$$m([A, B]) = \|AB - BA\|$$

et en déduire l'inégalité

$$m([A, B]) \leq 2 m(A) m(B).$$

Soit A dans \mathcal{O} ; si M_A^\perp est réduit à $\{0\}$ on pose $m^\perp(A) = 0$, sinon, on pose

$$m^\perp(A) = \sup \{ \|A(x) - x\| / \|x\| \mid x \in M_A^\perp, x \neq 0 \}.$$

8. Soit A dans \mathcal{O} ; prouver qu'on a

$$0 \leq m(A) - m^\perp(A) \leq 2.$$

9. Quels sont les éléments A de \mathcal{O} tels que $m(A) = m^\perp(A)$?

10. Quels sont ceux vérifiant $m(A) = m^\perp(A) + 2$?

II. ÉTUDE DES SOUS-GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES FORMÉS DE TRANSLATIONS

On dit qu'un sous-groupe de $(E, +)$ est un *réseau* s'il est engendré par les vecteurs d'une base de E . Dans cette partie II, on considère un sous-groupe L de $(E, +)$ et on note \mathcal{C}_L le sous-groupe de \mathcal{C} associé à L . On veut prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{C}_L soit cristallographique est que L soit un réseau.

A. On suppose d'abord que L est un réseau. Prouver que \mathcal{C}_L est cristallographique.

B. Soit maintenant L un sous-groupe quelconque de $(E, +)$. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs de L .

1. Prouver que si F est distinct de E , \mathcal{C}_L n'est pas cristallographique.

2. En déduire que si \mathcal{C}_L est cristallographique, alors L contient n vecteurs de E linéairement indépendants.

C. Soient L un sous-groupe de $(E, +)$ tel que \mathcal{C}_L est cristallographique et w_1, \dots, w_n n vecteurs de E , linéairement indépendants, contenus dans L . On note l_1, \dots, l_n les applications coordonnées dans la base (w_1, \dots, w_n) de E .

Soient x et y deux éléments de E ; nous dirons qu'on a $x \leq y$ si $x = y$ ou s'il existe k dans \mathbb{N}_n tel qu'on ait $l_i(x) = l_i(y)$ pour tout i dans \mathbb{N}_n strictement plus *grand* que k et $l_k(x) < l_k(y)$.

1. Prouver que la relation \leq est une relation d'ordre sur E et que tout sous-ensemble fini non vide de E admet un plus petit élément pour cet ordre.

Soit V l'ensemble des vecteurs *non nuls* de L vérifiant $0 \leq l_i(x) \leq 1$ pour tout i dans \mathbb{N}_n .

2. Prouver que V est fini et qu'il existe une suite v_1, \dots, v_n de vecteurs dans V , uniquement déterminée par les conditions (i) et (ii) suivantes :

(i) v_1 est le plus petit élément de V ;

(ii) pour tout k dans \mathbb{N}_{n-1} , si on note F_k le sous-espace vectoriel de E engendré par v_1, \dots, v_k , alors v_{k+1} est le plus petit élément de V n'appartenant pas à F_k .

3. Montrer que (v_1, \dots, v_n) est une base de E et qu'on a

$$0 < l_j(v_j) \leq 1$$

et $l_i(v_j) = 0$

pour tout j dans \mathbb{N}_n et tout i dans \mathbb{N}_n tels que $i > j$.

On note L' le réseau de E engendré par v_1, \dots, v_n .

4. Prouver que pour tout x dans L , il existe x' dans L' tel que, pour tout j dans \mathbb{N}_n , on ait

$$0 \leq l_j(x - x') < l_j(v_j).$$

5. Montrer qu'on a $L = L'$.

III. RÉSEAUX ET GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

Pour tout sous-groupe L de $(E, +)$, on note S_L le stabilisateur de L dans \mathcal{O} , Σ_L le stabilisateur de L dans $\mathcal{I}s$:

$$S_L = \{ A \in \mathcal{O}, A(L) = L \}$$

$$\Sigma_L = \{ \alpha \in \mathcal{I}s, \alpha(L) = L \}.$$

A. Soit L un sous-groupe de $(E, +)$.

1. Prouver qu'on a $\Sigma_L \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.

2. Soit G un sous-groupe de $\mathcal{I}s$ tel que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.

Montrer que $\pi(G)$ est inclus dans S_L .

3. Soit G un sous-groupe de $\mathcal{I}s$ tel que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.

Supposons en outre que G est inclus dans Σ_L .

Prouver que l'application (τ, π) de $\mathcal{I}s$ dans $E \times \mathcal{O}$ induit une bijection de G dans $L \times \pi(G)$. Expliciter la loi de groupe sur $L \times \pi(G)$ transportée de celle de G par cette bijection.

B. Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de $\mathcal{I}s$ tel que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.

1. Montrer que S_L est fini.

2. Montrer que \mathcal{C}_L est d'indice fini dans G .

3. Prouver que G est cristallographique.

C.1. Pour cette question seulement, supposons $n = 1$ et prenons pour L le réseau \mathbb{Z} de $E = \mathbb{R}$. Décrire les sous-groupes G de $\mathcal{I}s$ tels que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$.

2. Pour cette question seulement, supposons $n = 2$ et prenons pour L le réseau \mathbb{Z}^2 de $E = \mathbb{R}^2$. Calculer le cardinal de S_L .

D. Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de $\mathcal{I}s$ tel que $G \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_L$. Soit H un sous-groupe abélien de G , distingué dans G .

1. Pour x dans L et A dans $\pi(H)$ prouver qu'on a $(A - I)^2(x) = 0$ (on pourra utiliser le fait que si un élément x de G vérifie $A = \pi(\alpha)$, alors α commute à $t_x \alpha t_{-x}$).

2. Prouver qu'on a $H \subset \mathcal{C}$.

3. Que peut-on dire si G est abélien ?

IV. PREUVE DU THÉORÈME

Dans cette partie IV du problème, on fixe un sous-groupe cristallographique G de $\mathcal{I}s$ et on choisit un nombre réel $d > 0$ tel que la condition C1 soit vérifiée.

A. Soit u un vecteur unitaire de E .

1. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$ et une suite $(\beta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telles que

(i) pour tout entier naturel q , on ait $\| \tau(\beta_q) - k_q u \| \leq d$;

(ii) la suite $(\pi(\beta_q))_{q \in \mathbb{N}}$ converge.

2. En déduire qu'il existe une suite $(\beta'_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que $\tau(\beta'_q)$ soit non nul à partir d'un certain rang, que $\pi(\beta'_q)$ converge vers Γ et que $\frac{u \cdot \tau(\beta'_q)}{\|\tau(\beta'_q)\|}$ converge vers 1.

(On pourra prendre β'_q de la forme $\beta_r \beta_q^{-1}$, où l'entier r est convenablement choisi.)

B. Pour toute partie non vide X de G , on pose $\delta(X) = \inf_{\alpha \in X} \|\tau(\alpha)\|$.

1. Soit X une partie non vide de G . Prouver qu'il existe un élément α de X tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(X)$.
Dans la suite de cette partie IV.B, on note Y l'ensemble des éléments α de G tels que $0 < m(\pi(\alpha)) \leq 1/2$.
On désire prouver par l'absurde que Y est vide.
2. Jusqu'en IV.B.5, supposons que Y est non vide et choisissons α dans Y tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(Y)$. Posons $A = \pi(\alpha)$, $a = \tau(\alpha)$ et notons p, q les projecteurs orthogonaux sur les espaces M_A et M_A^\perp respectivement, sous-espaces de E associés à A en I.B.

Prouver qu'il existe un élément β de G tel que, posant $B = \pi(\beta)$ et $b = \tau(\beta)$, on ait

$$\|q(b)\| < \|p(b)\| \quad \text{et} \quad m(B) \leq \frac{1}{8} (m(A) - m^\perp(A)).$$

(On pourra choisir un vecteur unitaire u de E et utiliser II.A.)

Soit Z l'ensemble des éléments de G vérifiant ces conditions, et choisissons $\beta \in Z$ tel que $\|\tau(\beta)\| = \delta(Z)$.

Posons $B = \pi(\beta)$, $b = \tau(\beta)$, $\gamma = [\alpha, \beta]$. On pose $C = \pi(\gamma)$, $c = \tau(\gamma)$ (calculés en I.A.7) et $r = c - (A - I)b$.

3. Prouver qu'on a $m(C) \leq m(B)$.
4. Si β est une translation, vérifier qu'on a $r = 0$, $\|q(c)\| < \|p(c)\|$ et $\|c\| < \|b\|$.
5. Supposons que β n'est pas une translation; prouver successivement :

(i) $\|a\| \leq \|b\|$

(ii) $\|r\| \leq 2 m(B) \|b\|$

(iii) $\|r\| < \frac{1}{2} (m(A) - m^\perp(A)) \|p(b)\|$

(iv) $\|q(c)\| < \frac{1}{2} (m(A) + m^\perp(A)) \|p(b)\| < \|p(c)\|$

(v) $\|c\| < \|b\|$

6. Déduire de ce qui précède que Y est vide.
7. En choisissant une base de E formée de vecteurs unitaires, prouver qu'il existe une base (w_1, \dots, w_n) de E telle que tw_i soit dans G pour tout entier i dans \mathbb{N}_n .
8. Posant $L = \tau(G \cap \mathcal{E})$, prouver que L est un réseau de E .

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Comme annoncé dans le préambule, ce problème avait pour but de démontrer un résultat dû à L. Bieberbach (1910), à savoir que tout sous-groupe cristallographique (i.e. discret à domaine fondamental compact) du groupe \mathcal{I}_n des isométries d'un espace affine euclidien E_n de dimension n , contient n translations linéairement indépendantes, les translations d'un réseau de E_n . La démonstration originale de L. Bieberbach [2] est assez difficile, mais Frobenius donna, dès 1911 [6], une preuve basée sur la considération de sous-groupes commutatifs du groupe unitaire ; cette démonstration de Frobenius est restée la preuve élémentaire standard. On peut cependant simplifier les arguments, si on utilise un peu de théorie des groupes de Lie [1,8]. Le problème présentait une preuve d'un type nouveau, due à M. Gromov et popularisée par P. Buser et H. Karcher [4]. Nous avons suivi d'assez près l'article élémentaire de P. Buser [3].

On peut compléter le résultat obtenu dans le problème par deux autres, également dus à L. Bieberbach [2] : les sous-groupes cristallographiques de \mathcal{I}_n forment un nombre fini de classes d'isomorphismes, cf. [3,7], et d'autre part un isomorphisme entre deux tels sous-groupes de \mathcal{I}_n peut être réalisé par la conjugaison par une bijection affine de E_n , cf. [7]. Pour l'intérêt actuel des résultats de Bieberbach, on peut consulter [5].

La démonstration de M. Gromov est basée sur la considération de commutateurs, qui permet de prouver que tout élément d'un sous-groupe cristallographique de \mathcal{I}_n , dont la partie linéaire est suffisamment proche de l'identité de E_n , est en fait une translation. La première partie du problème, de nature préliminaire, examine quelques calculs relatifs aux commutateurs dans \mathcal{I}_n , et quelques propriétés de la norme de $\mathcal{L}(E_n)$. La seconde partie traite le cas simple de sous-groupes de \mathcal{I}_n formés de translations : pour qu'un tel sous-groupe soit cristallographique, il est nécessaire et suffisant qu'il soit engendré par n translations indépendantes. La troisième partie examine les liens, élémentaires, entre un sous-groupe cristallographique G de \mathcal{I}_n et son sous-groupe T formé des translations appartenant à G . La dernière partie comporte la preuve du théorème.

Quelques erreurs typographiques mineures s'étaient glissées dans l'énoncé définitif, ce dont le jury s'excuse ; elles ne semblent pas avoir gêné les candidats.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. AUSLANDER.- An account of the theory of crystallographic groups, Proc. A.M.S. 16 (1956) 1230-1236.
- [2] L. BIEBERBACH.- Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, Math. Ann. 70 (1910) 297-336
II, Math. Ann. 72 (1912) 400-412
- [3] P. BUSER.- A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups, l'Enseign. math 31 (1985) 137-145.
- [4] P. BUSER & H. KARCHER.- The Bieberbach case in Gromov's almost flat manifold theorem in global differential geometry and global analysis (Berlin 1979), LN in Maths 838, Springer-Verlag (1981).
- [5] R. CHARLAP.- Bieberbach groups and flat manifolds, Springer-Verlag Universitext (1987).
- [6] C. FROBENIUS.- Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin 29 (1911) 654-665
- [7] W. RINOW.- Die inner geometrie der metrischen Räume, Berlin, Springer Verlag grundl (1961).
- [8] J. WOLF.- Spaces of constant curvature, Mc Graw-Hill, New York (1967).

REMARQUES GÉNÉRALES

Les trois premières parties ne faisaient appel qu'à des connaissances standard d'algèbre et de topologie, et les raisonnements étaient élémentaires ; en particulier, suivant P. Buser [4], nous avons pris une définition très simple de la notion de sous-groupe cristallographique. La quatrième partie ne nécessitait pas de connaissances plus élaborées, mais les raisonnements étaient plus techniques. En fait, seules les parties I et II ont été abordées par la majorité des candidats.

Le problème a révélé que les candidats sont plus à l'aise dans des manipulations algébriques formelles que pour des considérations géométriques et topologiques simples.

Si l'on peut considérer que le niveau des candidats est globalement satisfaisant (voir en appendice la répartition des notes), on peut néanmoins relever des erreurs assez surprenantes à ce niveau : défauts de connaissance ou même fautes de logique ("l'image réciproque d'un espace compact par une application continue est compacte" ou " $A \leq T$ et $B \leq T$ impliquent $A \leq B$ ") ; légèreté dans l'énoncé des théorèmes utilisés et surtout dans la vérification de leurs hypothèses ; points importants d'un argument, passés sous silence ; manque d'intuition géométrique (en I.B. 10 ou III 7 par exemple) ; lacunes fréquentes en topologie (I B).

La rédaction pêche fréquemment par manque d'articulation : suites de calculs sans liens ni commentaires, résultats précédemment obtenus utilisés sans mention, défaut de conclusion ou manque de précision dans les raisonnements.

COMMENTAIRES SUR QUELQUES POINTS PARTICULIERS

I. La partie A ne présentait aucune difficulté et une grande majorité des candidats y a répondu avec succès. On pouvait, soit utiliser des connaissances de cours sur l'application $\mathcal{I}_s \rightarrow \mathcal{C}$ qui à toute isométrie associe sa partie linéaire (encore fallait-il exprimer clairement et précisément ces connaissances), soit effectuer des calculs directs. Cependant, certains croient que tout sous-groupe abélien d'un groupe est distingué ou que les translations commutent à toutes les isométries (même quand des calculs subséquents leur prouvent le contraire).

La partie B est sans doute celle qui a suscité le plus d'erreurs, ce qui souligne la faiblesse des candidats en topologie.

B 1 : La continuité de $f \mapsto f^* \circ f$ est facile si on utilise le fait que la composition des endomorphismes et le passage à l'adjoint sont des applications entre espaces vectoriels réels de dimension finie, qui sont bilinéaires ou linéaires, donc continues. Beaucoup trop de candidats se contentent de vérifier la continuité en 0 de $f \mapsto f^* \circ f$. Certains utilisent l'égalité $\|f\| = \|f^*\|$ pour $f \in \mathcal{L}(E)$; les arguments invoqués pour prouver cette égalité sont souvent incomplets.

Certains candidats prétendent que l'image réciproque d'un espace compact par une application continue est compacte, d'autres que \mathcal{O} est $\det^{-1}(\{\pm 1\})$. Signalons que l'application $(A, B) \mapsto AB$ de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans \mathcal{O} n'est ni linéaire, ni bilinéaire, \mathcal{O} n'étant pas un espace vectoriel.

B 2 : Malgré la présence de questions similaires ces dernières années lors des épreuves écrites de l'Agrégation, trop de candidats pensent encore qu'un endomorphisme autoadjoint a automatiquement ses valeurs propres réelles et positives. Pour prouver que E_f est un sous-espace vectoriel de E , on peut utiliser une base de vecteurs propres pour $f^* \circ f$, ce qui montre immédiatement que E_f est le sous-espace propre pour $f^* \circ f$ attaché à la valeur propre $\|f\|^2$. On peut aussi prouver la stabilité de E_f par somme et différence en utilisant l'identité de la médiane, et la non-nullité en invoquant que l'application continue $x \mapsto \|f(x)\|$ atteint son maximum sur la boule unité de E , qui est compacte.

B 5 : Il ne fallait pas se contenter de prouver des inégalités du genre $\|f\| \leq \|fA\|$, ou ne prouver qu'une seule des égalités demandées. Parfois les candidats pensent, implicitement ou explicitement, qu'on a $\|fg\| = \|f\| \cdot \|g\|$ quels que soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

B 6 : Pour prouver que M_A^\perp est stable par A , on est souvent amené à prouver que M_A est stable par A^{-1} .

B 7 : Référer à B 5.

B 9 : Si beaucoup de candidats trouvent que le seul élément possible est I , bien peu fournissent un raisonnement complet.

B 10 : Cette question simple a donné des résultats catastrophiques, ce qui atteste le manque de vision géométrique de nombreux candidats. On a forcément $m^\perp(A) = 0$ et $m(A) = 2$. Pour x dans M_A^\perp , on a donc $A(x) = x$; pour x dans M_A , on a $\|A(x) - x\| = 2\|x\|$ ce qui implique, par les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, qu'on a $A(x) = -x$. Ainsi A est la symétrie orthogonale par rapport à M_A^\perp . Inversement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel distinct de E convient.

II. Cette partie établissait qu'un sous-groupe cristallographique de \mathcal{I}_s fermé de translations est formé des translations d'un réseau de E .

La partie A était plus facile si l'on se souvenait que toutes les normes sur espace vectoriel réel de dimension finie sont équivalentes. On rencontre plusieurs fois ici une faute surprenante, équivalant à dire "si $A \leq T$ et $B \leq T$, alors $A \leq B$!". Certains candidats supposent qu'une base d'une espace euclidien est forcément orthonormale.

En B 1, le raisonnement, simple, est souvent incomplet. Des locutions comme "il est clair que", "on voit que" ne sauraient constituer une démonstration.

C 1 : Assez peu de candidats voient que le point important à vérifier est que $V \setminus F_k$ est non vide pour $k \leq n-1$.

C 3 : Pour ce résultat, il est utile de constater que F_k est engendré par w_1, \dots, w_k .

C 4 : Il ne fallait pas essayer, d'un seul coup, de réaliser les inégalités pour tout j , mais d'abord soustraire à x un multiple convenable de v_n pour obtenir les inégalités pour $j = n$, puis retrancher un multiple de v_{n-1} , etc.

III. Cette partie examinait quelques liens entre groupes cristallographiques et réseaux. De même que la partie II, elle aurait pu être placée après la démonstration du théorème. Mais les raisonnements sont moins techniques qu'en IV.

A 2 : Utiliser l'action de G sur \mathcal{C}_L par conjugaison.

A 3 : Plusieurs points sont à vérifier : $\tau(G)$ est inclus dans L , l'application est injective, elle est surjective.

C 1 : Le résultat n'est pas si immédiat qu'on pense. On trouve le groupe $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ et pour chaque classe K de \mathbb{R}/\mathbb{Z} , le groupe formé des éléments de $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ et des symétries $x \mapsto -x + \alpha$ où α parcourt K .

C 2 : S'il est "clair" (sur une figure en particulier, ce qui est très rare) que S_L est de cardinal 8, encore faut-il en donner une démonstration.

D 1 : Pour être sûr a priori que α commute à $t_x \alpha t_{-x}$, il faut prendre α dans H . Ce sera vrai a posteriori pour tout α dans G .

D 2 : Comme L contient une base de E , on a $(A-I)^2 = 0$ à cause de D 1 ; donc A a pour seule valeur propre 1 et, comme A est orthogonal, on a $A = I$.

IV. Cette partie n'a été abordée que par très peu de candidats.

RÉSULTATS

(sur 1043 Copies)

de 0 à 4	84 copies
de 5 à 9	94 copies
de 10 à 14	154 copies
de 15 à 19	186 copies
de 20 à 24	144 copies
de 25 à 29	123 copies
de 30 à 34	93 copies
de 35 à 39	65 copies
de 40 à 44	45 copies
de 45 à 49	36 copies
de 50 à 54	10 copies
de 55 à 60	9 copies

COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

NOTATIONS

On note $x = (x_1, x_2)$ un point du plan euclidien \mathbb{R}^2 , avec le produit scalaire canonique $x \cdot x' = x_1 x_1' + x_2 x_2'$ et la norme euclidienne $\|x\|$. On désigne par $D(x, r)$, respectivement $C(x, r)$, le disque fermé, respectivement cercle, de centre x et de rayon $r \geq 0$; on écrira $D(0, 1) = D$ et $C(0, 1) = C$ pour abrégé. On dit que $C(x', r')$ entoure $D(x, r)$ si $D(x, r)$ est contenu dans l'intérieur de $D(x', r')$, c'est-à-dire si $\|x' - x\| < r' - r$. On note R_θ pour θ réel, la rotation d'angle θ autour de l'origine.

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles. On note $\text{supp } f$ le support d'une fonction, adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) \neq 0$. On note $dx = dx_1 dx_2$ la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 . Une fonction f sur \mathbb{R}^2 est dite radiale si $f(R_\theta x) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit L la droite affine de \mathbb{R}^2 d'équation $x \cdot u_\alpha = p$, avec $p, \alpha \in \mathbb{R}$, et $u_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in C$. Si f est une fonction définie sur \mathbb{R}^2 , on note f_L , ou $\hat{f}(p, \alpha)$, l'intégrale :

$$f_L = \hat{f}(p, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f\left(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right) dt,$$

lorsque cela a un sens. De manière analogue, pour $\Gamma = C(a, r)$, on pose :

$$f_\Gamma = \int_0^{2\pi} f(a + ru_\theta) d\theta,$$

avec $a \in \mathbb{R}^2$, $r \geq 0$.

On rappelle la formule de Green-Riemann : si γ est une courbe C^1 par morceaux constituant le bord orienté d'un compact K du plan, et P_1, P_2 deux fonctions numériques de classe C^1 au voisinage de K , on a :

$$\iint_K \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_\gamma P_1(x_1, x_2) dx_1 + P_2(x_1, x_2) dx_2.$$

On rappelle enfin le résultat suivant de convergence dominée :

Soit $(x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$; si $|f(x, t)| \leq g(t)$ pour tous x, t , avec g intégrable sur \mathbb{R}^p , la fonction

$$x \longmapsto F(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, t) dt$$

est continue sur \mathbb{R}^n ; si de plus f est de classe C^k en x , et si toutes ses dérivées partielles d'ordre k au plus en x sont continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et vérifient la majoration ci-dessus, alors F est C^k sur \mathbb{R}^n , et ses dérivées partielles se calculent par dérivation sous le signe somme.

BUT DU PROBLÈME : retrouver certaines propriétés d'une fonction f à partir des nombres f_L .

La partie I établit les résultats préliminaires, les parties II et III aboutissent à des théorèmes de support; ces trois parties utilisent du calcul différentiel et intégral dans le plan.

La partie IV, indépendante des trois premières, étudie la reconstruction approchée de f à partir d'un nombre fini des f_L , par des méthodes purement hilbertiennes.

I

Dans toute cette partie, f désigne une fonction continue sur \mathbb{R}^2 , qui vérifie la propriété

(A) pour tout entier $n \geq 0$, la fonction $\|x\|^n |f(x)|$ est bornée sur \mathbb{R}^2 .

Dans les questions 1° et 2° on suppose de plus $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

1° a. Établir une inégalité de la forme :

$$|f(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}})| \leq \frac{C}{1 + p^2 + t^2},$$

avec C indépendant de p, t, α , et montrer que \hat{f} est une fonction continue de (p, α) sur \mathbb{R}^2 .

b. Si f et toutes ses dérivées partielles vérifient (A), montrer que \hat{f} est une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^2 .

c. Sous l'hypothèse de b, établir les égalités :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}(p, \alpha) = \cos \alpha \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial p}, \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2}(p, \alpha) = \sin \alpha \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial p}$$

(on pourra calculer d'abord $(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial p} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial t}) \left(f \left(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}} \right) \right)$ au moyen de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$).

2° On donne $R > 0$ et on suppose que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifie (A) et

(B) pour tout cercle Γ qui entoure $D(0, R)$, on a $f_\Gamma = 0$.

a. Soient $R' > R$, et V l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|v\| < R' - R$. En calculant $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x) dx$ en coordonnées polaires d'origine v , déduire de (B) que la fonction $g(v) = \iint_{D(v, R')} f(x) dx$ est constante pour $v \in V$ et que, pour $v \in V, i = 1, 2$, on a :

$$\iint_{D(0, R')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(v + x) dx = 0.$$

b. Montrer par la formule de Green-Riemann que $(h_i)_\Gamma = 0$ quand Γ est le cercle $C(0, R')$ et $h_i(x) = x_i \cdot f(v + x)$, et que $(x_i f)_\Gamma = 0$ pour tout cercle Γ qui entoure $D(0, R)$.

c. En déduire, au moyen du théorème de Stone-Weierstrass, que $\text{supp } f \subset D(0, R)$.

3° On suppose seulement que f est continue, et vérifie (A) et (B). On rappelle que, pour $\varepsilon > 0$, il existe une fonction

$\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, positive, radiale, à support dans $D(0, \varepsilon)$, et telle que $\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$.

a. Montrer que la fonction $f_\varepsilon(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(y) \varphi_\varepsilon(x - y) dy$ est C^∞ sur \mathbb{R}^2 .

b. Montrer que f_ε vérifie (A) et (B), avec $R + \varepsilon$ au lieu de R .

c. En déduire que l'on a encore $\text{supp } f \subset D(0, R)$.

II

Dans cette partie, f désigne une fonction continue sur \mathbb{R}^2 , possédant la propriété (A) de I, et telle que :

(B') pour toute droite affine L qui ne rencontre pas $D(0, R)$, on a $f_L = 0$.

4° On suppose de plus $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et f radiale.

a. Montrer qu'il existe F , continûment dérivable sur $[0, +\infty[$, telle que :

$$f(x) = F(\|x\|^2) \quad \text{et} \quad \hat{f}(p, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(p^2 + t^2) dt \quad \text{pour } (p, \alpha) \in \mathbb{R}^2.$$

b. Soit $G(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(q + t^2) dt$ pour $q > 0$. Vérifier que :

$$F(q) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dq} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(q + s^2) ds \right).$$

c. En déduire que $\text{supp } f \subset D(0, R)$.

5° On ne suppose plus que f est C^∞ . En s'inspirant de 3°, montrer que la conclusion de 4° c reste valable si f est continue, radiale, et vérifie (A), (B').

6° On ne suppose plus f radiale, mais seulement f continue et (A), (B'). Pour $a, x \in \mathbb{R}^2$, soit :

$$f^a(x) = \int_0^{2\pi} f(a + R_\theta x) d\theta.$$

a. Montrer que f^a est continue, radiale, vérifie (A) et (B') avec $R + \|a\|$ au lieu de R .

b. En utilisant 3° c, montrer que $\text{supp } f \subset D(0, R)$.

III

Dans cette partie, on développe quelques applications de la question 6°. Soit K un compact convexe de \mathbb{R}^2 .

7° a. Montrer que K est l'intersection de la famille des disques fermés qui le contiennent.

b. Soit $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$, vérifiant (A). Établir que $\text{supp } g \subset K$ si et seulement si $g_L = 0$ pour toute droite affine L disjointe de K .

8° Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, solution de l'équation différentielle à coefficients constants :

$$\varphi^{(n)} + a_1 \varphi^{(n-1)} + \dots + a_n \varphi = 0$$

sur l'intervalle $I =]t_0, +\infty[$. On suppose $\varphi(t) = 0$ pour tout $t > t_1$, avec $t_1 \in I$. Montrer que φ est identiquement nulle sur I .

9° Soient $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et $Pg = \sum_{j+k \leq m} a_{jk} \frac{\partial^{j+k} g}{\partial x_1^j \partial x_2^k}$, où les a_{jk} sont des constantes réelles, avec $a_{00} \neq 0$.

On suppose $\text{supp } g$ compact et $\text{supp } Pg \subset K$. En utilisant 1° c et 8°, montrer que $\text{supp } g \subset K$.

10° Soient $h \in C^0(\mathbb{R}^2)$ et $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. On suppose que $\text{supp } h$ est compact et que $\hat{h}(p, \alpha) = 0$ pour tout p réel et tout α tel que $|\alpha| \leq \varepsilon$. Montrer que h est identiquement nulle (on pourra raisonner sur un losange dont un des angles est 2ε , et contenant $\text{supp } h$).

11° a. Construire une fonction $j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $j(x_1, x_2) = z^{-2}$ si $z = x_1 + ix_2$, $|z| \geq 1$, et montrer que $j_L = 0$ si la droite L est disjointe du disque unité D .

b. Montrer que $j_\Gamma = 0$ si le cercle Γ entoure D .

c. Que peut-on déduire de cet exemple?

IV

Soient H un espace de Hilbert sur \mathbb{R} , $(\cdot | \cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ sa norme. On note \bar{A} , respectivement A^\perp , l'adhérence, respectivement l'orthogonal, d'une partie A de H .

On se donne k sous-espaces vectoriels fermés N_1, \dots, N_k de H , et on note $N_0 = N_1 \cap \dots \cap N_k$. Soient I l'identité de H et, pour $f \in H$ fixé, P_j le projecteur orthogonal de H sur le sous-espace affine $f + N_j$ de H , avec $0 \leq j \leq k$; on pose $Q = P_k P_{k-1} \dots P_2 P_1$.

On se propose de montrer d'abord que, pour tout $g \in H$,

$$(1) \quad Q^n g \longrightarrow P_0 g \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Dans les questions 12° à 16° on suppose de plus que $f = 0$; les P_j et Q sont alors des applications linéaires de H dans H .

12° a. Si P est un projecteur orthogonal de H sur un sous-espace vectoriel fermé N , montrer que l'égalité $\|Pg\| = \|g\|$ équivaut à $g \in N$.

b. En déduire que $\text{Ker}(I - Q) = N_0$ (si $g \in \text{Ker}(I - Q)$, on observera que $\|g\| \leq \|P_1 g\| \dots$).

c. En déduire que $\text{Ker}(I - Q^*) = N_0$, où Q^* est l'opérateur adjoint de Q .

13° Soit $E = \text{Im}(I - Q)$. Montrer que $H = \bar{E} \oplus N_0$, et qu'il suffit d'établir (1) pour $g \in E$.

14° Montrer par récurrence sur k que, pour toute suite (f_n) de la boule unité de H , la propriété « $\|Qf_n\| \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ » implique que « $(I - Q)f_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ ».

15° a. Soit $g = (I - Q)h \in E$. Établir que $Q^n g \longrightarrow 0$; on pourra considérer $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Q^n h\|$ et, si $a > 0$, appliquer 14° à $f_n = Q^n h / \|Q^n h\|$.

b. En déduire (1).

16° Pour préciser la convergence (1), on suppose $k = 2$, et on note $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'angle de N_1 et N_2 , défini par :

$$\cos \theta = \sup \frac{(g_1 | g_2)}{\|g_1\| \cdot \|g_2\|},$$

le sup étant pris pour $g_1 \in N_1 \cap N_0^\perp$, $g_2 \in N_2 \cap N_0^\perp$, non nuls.

a. Établir l'inégalité $\|Qg\| \leq \cos \theta \cdot \|g\|$, pour $g \in N_0^\perp$.

b. En déduire que, pour tout $g \in H$ et tout entier $n \geq 0$, on a :

$$(2) \quad \|Q^n g - P_0 g\| \leq \cos^n \theta \cdot \|g - P_0 g\|.$$

17° Montrer que (1) et (2) restent valables lorsque f est fixé quelconque dans H .

Désormais on prend pour H l'espace des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R}^2 , nulles hors du disque unité D , avec $(f|g) = \iint_D f(x) g(x) dx$. Soient u_1, \dots, u_k k vecteurs unitaires de \mathbb{R}^2 , $v_j = \frac{R\pi}{2} u_j$, et

$$(A_j g)(p) = \int_{\mathbb{R}} g(pu_j + tv_j) dt, \quad 1 \leq j \leq k,$$

pour $g \in H$, $p \in \mathbb{R}$. On prend pour N_j le noyau de l'opérateur A_j .

18° Montrer que $A_j : H \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ est continu, et que N_j est un sous-espace fermé de H .

19° Vérifier que, pour $g \in H$, $x \in \mathbb{R}^2$,

$$(P_j g)(x) = g(x) + \varphi(x) \frac{(A_j(f-g))(u_j \cdot x)}{(A_j \varphi)(u_j \cdot x)},$$

où φ est la fonction caractéristique de D .

20° Dédire de ce qui précède (avec $g = 0$ par exemple) une méthode de reconstruction approchée modulo N_0 d'une fonction $f \in H$ à partir des fonctions $A_1 f, \dots, A_k f$.

21° Montrer que N_0 n'est pas réduit à $\{0\}$: pour $k = 1$ d'abord, on cherchera $f \in N_0$ comme dérivée convenable d'une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^2 , à support dans D .

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

I. LE SUJET

Ce problème étudie quelques propriétés de la transformation de Radon dans le plan qui, à une fonction f , associe la famille de ses intégrales sur toutes les droites. Si les premiers résultats sur le sujet remontent à Johann RADON (1917), cette question n'en connaît pas moins un important regain d'intérêt, en liaison notamment avec la théorie mathématique de la tomographie aux rayons X [3], ou grâce à ses généralisations aux espaces homogènes de groupes de Lie.

Les parties II et III proposent une démonstration et quelques applications d'une propriété de support (question 7°b), due à Sigurdur HELGASON (1965), en passant par l'inversion de l'équation intégrale d'Abel (cf. 4°b).

Laissant de côté la recherche d'une formule explicite exacte pour inverser la transformation (dont on trouvera plusieurs formes dans la bibliographie), la partie IV aborde le problème un peu plus réaliste d'une reconstruction approchée de f , par des méthodes purement hilbertiennes, à partir d'un nombre fini de ses "radiographies" $A_j f$ (cf. 20°). Le résultat (1) sur les projecteurs est dû à I. HALPERIN (1962).

Bien qu'elle ne soit pas utilisée ici, la transformation de Fourier est aussi un outil précieux pour étudier ces questions : voir [1], [2] ci-dessous, ou même le problème d'Analyse de la session 1982 ...

REFERENCES

- [1] HELGASON, S. "The Radon transform", Birkhäuser 1980 (que l'énoncé suit d'assez près)
- [2] HELGASON, S. "Groups and geometric analysis", Academic Press 1984
- [3] SHEPP, L.A. et J.B. KRUSKAL "Computerized tomography : the new medical X-ray technology", Amer. Math. Monthly, June 1978.

II. REMARQUES GENERALES

Les deux premières parties du problème ne font appel qu'à des connaissances très classiques d'analyse; compte tenu des rappels inclus dans l'énoncé le niveau du premier cycle universitaire suffit pour traiter la quasi-totalité des questions 1° à 6°. Elles ont donc été largement abordées par les candidats mais n'ont pas manqué de révéler, dans certains cas, des lacunes graves :

- manipulation maladroite, ou incorrecte, des inégalités (1°a, 3°b, 6°a)
- confusions dans l'usage des dérivées partielles (1°b, 1°c, 2°a)
- méconnaissance des difficultés liées aux coordonnées polaires, au voisinage de l'origine (4°a)

sont parmi les plus fréquentes.

D'autre part, le contexte "géométrique" du sujet a visiblement gêné de nombreux candidats, et explique en partie la désaffection de la partie III au profit de IV. Le recours à un croquis aurait pourtant suffi, dans la plupart des cas, à dissiper cette gêne. Ce qui devrait être un réflexe normal chez tout (futur) enseignant reste encore l'exception, et cela mène au paradoxe que la grande majorité d'entre eux semble plus à l'aise dans un espace hilbertien, en dimension infinie, qu'en présence d'un losange du plan.

La dernière partie a souvent été abordée de façon satisfaisante. Ici les lacunes principales apparaissent surtout en 12°a (certains semblent redécouvrir le théorème de Pythagore, parfois même incorrectement énoncé ... et orthographié), et en 13° (décomposition en sous-espaces orthogonaux).

L'impression d'ensemble laissée par les copies est finalement assez convenable. La rédaction reste cependant un point faible, même chez des candidats aux connaissances par ailleurs solides. S'il n'existe guère de critère objectif d'une bonne rédaction, on peut simplement rappeler, une fois encore, qu'il faut s'attacher à mettre en lumière, sans verbiage, chaque articulation importante d'un raisonnement ou d'un calcul : intervention d'une hypothèse du problème, d'un résultat précédent, d'un théorème connu (dont on doit vérifier explicitement les hypothèses), etc.

III. REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS

1°a) Ajouter les majorations de (A) pour $n = 0$ et 2 conduit immédiatement à l'inégalité. La continuité de \hat{f} s'obtient tout aussi vite par convergence dominée, à condition de majorer par une fonction intégrable indépendante des paramètres (ici p et α). Le théorème utile, pourtant rappelé dans l'énoncé, a bien souvent été incorrectement appliqué.

1°b) Lorsqu'on dérive en p et α , les dérivées de f (en x_1 et x_2) se trouvent multipliées par des coefficients polynomiaux en p , t , $\cos \alpha$, $\sin \alpha$. Le résultat peut cependant être majoré par $C/1+t^2$, grâce à la condition (A).

1°c) Certains se débarrassent d'un terme gênant en écrivant :

" $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(p, t) dt = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} f(p, t) dt = 0$, car la dernière intégrale ne dépend pas de t " ...

2°a) Ne pas oublier de justifier les calculs faits, grâce à l'intégrabilité de f dans le plan. Le jury se voit ici contraint de rappeler que la fonction $1/1+x^2+y^2$ n'est pas intégrable en (x, y) sur \mathbb{R}^2 (pour la mesure de Lebesgue), et encore moins la fonction $1/x^2+y^2$, cette erreur ayant été commise un très grand nombre de fois.

2°b) Comme $(x_i f)(v+x) = v_i \cdot f(v+x) + x_i \cdot f(v+x)$, il y a deux termes à considérer pour montrer la nullité de $(x_i f)_{\Gamma}$.

2°c) Cette question n'a été que rarement traitée, malgré l'indication fournie par l'énoncé.

3°a) L'énoncé invite à donner une démonstration complète. On peut aussi considérer le résultat comme classique; encore faut-il citer correctement un énoncé précis, sans se contenter d'un vague "on régularise en convolant". Enfin on lit

encore trop souvent l'égalité $\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi(x-y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z) \phi(z) dz$,

fausse évidemment, y compris pour $n = 1$!

3°b) La majoration qui donne (A) a rarement été faite avec soin.

3°c) Plutôt que de tenter de "passer à la limite" sur les supports, il est préférable d'utiliser la convergence simple de f_ε vers f .

4°a) Cette question très élémentaire n'a été bien traitée que par moins de des copies !

4°b) Veiller à justifier les calculs, en majorant F grâce à (A). Le calcul formel est facile, en passant en coordonnées polaires dans le plan des variables (s, t) , d'où l'apparition du facteur π .

7°a) Cette question, de rédaction un peu délicate, a donné lieu à quelques solutions. On trouvera en annexe une démonstration possible, dont le début établit l'énoncé "de Hahn-Banach géométrique" utile ici; on rappelle à cette occasion que, dans tout espace hilbertisable (en particulier en dimension finie) cette preuve ne nécessite pas de recourir à l'axiome du choix.

8°) Encore une question très simple qui n'a guère été correctement traitée. Le théorème d'unicité globale pour les équations différentielles linéaires semble mal connu.

9°) Pour chaque α fixé, on peut appliquer le résultat de 8° à la fonction \hat{g} .

Les questions 10° et 11° n'ont presque pas été abordées.

12°a) et b) Correct le plus souvent.

13°) De nombreuses copies considèrent Q comme un projecteur, ce qu'il n'est pas en général (voir l'exemple de $H = \mathbb{R}^2$ avec deux droites N_1, N_2). D'autre part, le noyau et l'image d'un endomorphisme ne sont pas toujours supplémentaires, même en dimension finie ! La décomposition de H s'obtient ici en observant que E et \bar{E} ont même orthogonal, et que l'orthogonal de l'image d'un opérateur est le noyau de son adjoint.

La propriété (1) est claire pour g dans N_0 ; elle s'étend par densité de \bar{E} (à justifier avec soin); par linéarité elle est alors vraie pour tout g de \bar{E} .

15°a) Ne pas oublier d'établir, en deux mots, l'existence de la limite a .

16°a) Pour introduire $\cos \theta$ dans une majoration, s'assurer que les vecteurs g_1 et g_2 choisis sont bien dans les sous-espaces voulus. Il en va de même lorsqu'on veut itérer, en 16°b, l'inégalité de 16°a.

Les autres questions n'ont pratiquement pas été abordées.

ANNEXE I : Répartition des notes des 995 copies .

de 0 à 4	289	de 20 à 24	54	de 40 à 44	22
de 5 à 9	111	de 25 à 29	140	de 45 à 49	21
de 10 à 14	80	de 30 à 34	78	de 50 à 54	18
de 15 à 19	102	de 35 à 39	55	de 55 à 60	25

ANNEXE II

On trouvera ci-dessous un corrigé succinct du problème. Ce document de travail n'est publié ici qu'à titre d'information, et ne saurait évidemment être considéré comme une "copie modèle".

1°a) Appliquer (A) avec $n = 0$ et 2 donne en ajoutant $(1 + \|x\|^2)|f(x)| \leq C$, d'où $|f(\dots)| \leq C/(1+p^2+t^2) \leq C/(1+t^2) = g(t)$, et continuité par convergence dominée.

1°b) Par récurrence sur $i+j$, chaque dérivée $\partial_p^i \partial_\alpha^j (f(p \cos \alpha - t \sin \alpha, p \sin \alpha + t \cos \alpha))$ est somme finie de termes de la forme $P_{k\ell}^{ij}(\cos \alpha, \sin \alpha, p, t) \partial_1^k \partial_2^\ell f(\dots)$ où $P_{k\ell}^{ij}$ est un polynôme. D'après (A) pour les dérivées de f , son module est majoré par $C_{ij}/(1+t^2)$, d'où $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et les dérivées se calculent sous le signe somme.

1°c) On vérifie $(\cos \alpha \cdot \partial_p - \sin \alpha \cdot \partial_t)(f(\dots)) = (\partial_1 f)(\dots)$, d'où en intégrant:

$$\widehat{\partial_1 f}(p, \alpha) = \cos \alpha \cdot \partial_p \hat{f} - \sin \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t (f(\dots)) dt,$$
d'après 1°b); le deuxième terme est nul d'après (A). De même $(\sin \alpha \cdot \partial_p + \cos \alpha \cdot \partial_t)(f(\dots)) = (\partial_2 f)(\dots)$ donne l'autre égalité.

2°a) On a, pour v dans V ,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} f(v+ru_\theta) d\theta \quad (\text{convergence par (A) avec } n = 3)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty f_{C(v,r)} \cdot r \, dr = \int_0^{R'} \dots \quad (\text{par (B), car } C(v,r) \text{ entoure } D(0,R) \text{ si } r > R) \\
&= g(v) \quad , \text{ calculé en polaires d'origine } v \text{ . Donc } g \text{ est constante sur } V \\
\text{comme } g(v) &= \iint_{D(0,R')} f(v+x) \, dx \text{ on a, par dérivation (élémentaire) sous } \iint \\
\frac{\partial g}{\partial v_i}(v) &= \iint_{D(0,R')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(v+x) \, dx = 0 \text{ .}
\end{aligned}$$

2°b) Sur le cercle $\Gamma_0 = C(0,R')$ on a $dx_1 = -x_2 d\theta$, $dx_2 = x_1 d\theta$, d'où par 2 et Green-Riemann : $(h_i)_{\Gamma_0} = 0$. D'autre part $(v_i f(v+x))_{\Gamma_0} = 0$ par (B), d'où ajoutant $((v_i + x_i) f(v+x))_{C(0,R')} = 0$, i.e. $(x_i f)_{C(v,R')} = 0$ si $v \in V$. Or tout cercle entourant $D(0,R)$ est un $C(v,R')$, avec $R' > R$ et $v \in V$, q.e.d.

2°c) Ainsi $x_i f$ vérifie-t-elle encore (A) et (B), d'où en itérant $P(x_1, x_2) f$ aussi, pour tout $P \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$. Par Stone-Weierstrass, les restrictions au compact Γ de ces polynômes sont denses dans $C^0(\Gamma)$, d'où $f = 0$ sur Γ , ceci pour tout cercle Γ entourant $D(0,R)$.

3°a) Les majorations $|f(y) \partial_x^\alpha \phi_\epsilon(x-y)| \leq C_{\alpha,\epsilon} |f(y)|$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, permettent de dériver sous l'intégrale.

3°b) Pour montrer (A) on écrit, avec ϵ et n fixés,

$$\begin{aligned}
\|x\|^n |f_\epsilon(x)| &\leq \iint \|x\|^n |f(x-y)| \cdot \phi_\epsilon(y) \, dy \leq \\
&\leq \iint_{\|y\| \leq \epsilon} (\|x-y\| + \epsilon)^n |f(x-y)| \phi_\epsilon(y) \, dy \leq C \iint_{\mathbb{R}^2} \phi_\epsilon = C \text{ , par (A) pour}
\end{aligned}$$

Pour (B), soit $\Gamma = C(v,R')$ un cercle qui entoure $D(0,R+\epsilon)$; alors, pour $\|y\| \leq \epsilon$ $C(v-y,R')$ entoure $D(0,R)$, et :

$$(f_\epsilon)_\Gamma = \int_0^{2\pi} f_\epsilon(v+R'u_\theta) \, d\theta = \iint_{\|y\| \leq \epsilon} \phi_\epsilon(y) \, dy \int_0^{2\pi} f(v-y+R'u_\theta) \, d\theta$$

par Fubini élémentaire; la dernière intégrale est $f_{C(v-y,R')} = 0$ par (B) pour $D(0,R)$. D'où $(f_\epsilon)_\Gamma = 0$, q.e.d.

3°c) Par 2°c) on a $f_\epsilon(x) = 0$ si $\|x\| > R+\epsilon$. Comme

$$f_\epsilon(x) - f(x) = \iint_{\|y\| \leq \epsilon} (f(x-y) - f(x)) \phi_\epsilon(y) \, dy \text{ ,}$$

la continuité de f donne la convergence simple sur \mathbb{R}^2 de f_ϵ vers f quand $\epsilon \rightarrow 0$. D'où $f(x) = 0$ si $\|x\| > R$.

4°a) Soit $g(t) = f(t,0)$, $t \in \mathbb{R}$; g est C^∞ sur \mathbb{R} , paire, et $f(x_1, x_2) = g(\|x\|)$

Soit enfin $F(t) = g(\sqrt{t})$, $t \geq 0$; F est C^∞ sur $]0, \infty[$, continue en 0. Pour $t > 0$

on a

$$F'(t) = \frac{g'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \frac{g'(0) + \sqrt{t}(g''(0) + \varepsilon(t))}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}(g''(0) + \varepsilon(t))$$

d'où l'existence de $F'(0) = \frac{1}{2}g''(0) = \frac{1}{4}\Delta f(0)$, et $F \in C^1([0, \infty[)$.

La formule pour $\hat{f}(p, \alpha)$ est claire.

4°b) Par (A) avec $n = 0$ et 4 on a $|F(u)| \leq C/1+u^2$, d'où existence et continuité de G pour $q > 0$ (l'inégalité $|F(q+t^2)| \leq C/1+t^4$ donne la convergence dominée).

De plus la fonction $(t, s) \rightarrow F(q+t^2+s^2)$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 , d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} G(q+s^2) ds &= \iint_{\mathbb{R}^2} F(q+t^2+s^2) dt ds && \text{(Fubini)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty F(q+r^2) r dr && \text{(en polaires)} \\ &= \pi \int_q^\infty F(u) du && \text{(changement } u = q+r^2 \text{)}. \end{aligned}$$

D'où la dérivabilité en q des deux membres, et la formule.

4°c) D'après (B') on a $\hat{f}(p, \alpha) = G(p^2) = 0$ si $p^2 > R^2$. Par 4°b) on en déduit $F(q) = 0$ si $q > R^2$, i.e. $\text{supp } f \subset D(0, R)$.

5°) Comme en 3°), f_ε est C^∞ et vérifie (A). De plus

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(R_\theta x) &= \iint f(R_\theta x - R_\theta y) \phi_\varepsilon(R_\theta y) dy && \text{(jacobien de } R_\theta = 1) \\ &= \iint f(x-y) \phi_\varepsilon(y) dy = f_\varepsilon(x) && \text{(} f \text{ et } \phi_\varepsilon \text{ radiales)}, \end{aligned}$$

donc f_ε est radiale. Elle vérifie (B') avec $R+\varepsilon$, d'où etc.

6°a) Changer θ en $\theta + \omega$ donne $f^a(R_\omega x) = f^a(x)$. De plus f^a est continue, et

$$\begin{aligned} \|x\|^n |f^a(x)| &\leq \int_0^{2\pi} \|R_\theta x + a\|^n |f(a + R_\theta x)| d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} (\|R_\theta x + a\| + \|a\|)^n |f(\dots)| d\theta \end{aligned}$$

est borné d'après (A) pour f ; d'où (A) pour f^a . Puis

$$\begin{aligned} (f^a)_L &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathbb{R}} f(a + pu_{\theta+\alpha} + tu_{\theta+\alpha+\pi/2}) dt && \text{(Fubini)} \\ &= \int_0^{2\pi} f_{a+R_\theta L} d\theta; \end{aligned}$$

si L ne rencontre pas $D(0, R+\|a\|)$, alors $a+R_\theta L$ ne rencontre pas $D(0, R)$, donc

$(f^a)_L = 0$ d'après (B') pour f , d'où (B') pour f^a , avec $R+\|a\|$ au lieu de R .

6°b) Par 6°a) et 5°) on a $f^a(x) = 0$ dès que $\|x\| > R + \|a\|$; c'est dire que f lorsque le cercle $\Gamma = C(a, \|x\|)$ entoure $D(0, R)$. Par 3°c) il vient $\text{supp } f \subset$

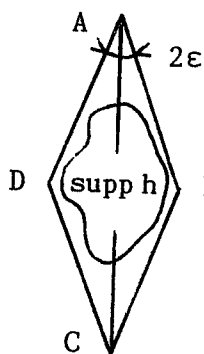
7°a) Soient x hors de K , y sa projection orthogonale sur le convexe fermé (si K est non vide ...), et L la médiatrice de xy . Par convexité, K est c dans le demi-plan ouvert défini par L qui ne contient pas x . Ce demi-plan réunion croissante des disques ouverts tangents à L au milieu de xy . Par cité, K est contenu dans l'un d'eux, d'où un disque (fermé) contenant K et x , q.e.d.

7°b) Une partie est triviale. Pour l'autre : soit Δ un disque fermé conter K ; comme $g_L = 0$ lorsque $L \cap \Delta = \emptyset$, on a $\text{supp } g \subset \Delta$ d'après 6°b) (après tran lation). D'où $\text{supp } g \subset K$ par 7°a).

8°) Clair par théorème d'unicité pour cette équation, avec condition initi $\phi(t_1) = \dots = \phi^{(n-1)}(t_1) = 0$.

9°) D'après 1°), $\widehat{Pg}(p, \alpha) = \sum a_{jk} \cos^j \alpha \cdot \sin^k \alpha \cdot \partial_p^{j+k} \hat{g}(p, \alpha)$. Pour chaque fixé, l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ tels que la droite $L_{p, \alpha}$ rencontre K est un segmen $]p'_0, p_0]$ (projection de K sur la droite $\mathbb{R}u_\alpha$). Comme $\text{supp } Pg \subset K$, on a $\widehat{Pg}(p, \alpha) = 0$ pour $p > p_0$; la fonction $p \rightarrow g(p, \alpha)$ est donc solution d'une éc tion différentielle non triviale ($a_{00} \neq 0$), homogène à coefficients constant et s'annule pour p grand, puisque $\text{supp } g$ est compact; par 8°) elle est nulle sur $]p_0, \infty[$. De même sur $]-\infty, p'_0[$, d'où $g_L = 0$ si $L \cap K = \emptyset$, et la conclusio par 7°b).

10°)



Prendre un losange comme indiqué, avec AC vertical. Alor $h_L = 0$ pour toute droite L qui ne rencontre pas le compa convexe $K = \text{segment } AC$ (si $L = L_{p, \alpha}$ avec $|\alpha| \geq \varepsilon$, L est di jointe de $\text{supp } h$; si $|\alpha| \leq \varepsilon$, c'est l'hypothèse). D'où $\text{supp } h \subset AC$ par 7°b); donc $\text{supp } h$ est sans point intérieur d'où $h = 0$ par continuité de h . Noter que le résultat se rait faux si $\varepsilon = 0$ (prendre h impaire en x_2).

11°a) Prendre $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, avec $\phi(t) = 0$ si $|t| \leq \frac{1}{2}$, $\phi(t) = 1$ si $|t| \geq 1$, et $j(x) = \phi(x_1^2 + x_2^2) \cdot (x_1 + ix_2)^{-2}$. Si L est définie par p et α , avec $|p| \geq 1$, on a

$$j_L = \int_{\mathbb{R}} j(pe^{i\alpha} + ite^{i\alpha}) dt = e^{-2i\alpha} \int_{\mathbb{R}} (p + it)^{-2} dt = 0 .$$

11°b) De même $j_\Gamma = \int_0^{2\pi} j(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$ si $\Gamma = C(z_0, r)$ entoure D , i.e.

$$j_\Gamma = \int_\Gamma j(z) \frac{dz}{i(z-z_0)} = -i \int_\Gamma \frac{dz}{z^2(z-z_0)} = 0,$$

car l'intégrale est indépendante de r par Cauchy, et tend vers 0 si r tend vers l'infini.

11°c) Mais la fonction j (ou sa partie réelle) n'est pas à support dans D ... L'hypothèse de décroissance (A) est donc utile, en 6°) et en 3°).

12°a) Pythagore donne $\|Pg-g\|^2 = \|g\|^2 - \|Pg\|^2$, nuls ssi $Pg = g$, i.e. $g \in N$.

12°b) $N_0 \subset \text{Ker}(I-Q)$ évidemment (si $g \in N_0$, alors $P_j g = g$ et $Qg = g$).

$\text{Ker}(I-Q) \subset N_0$: car $g = Qg$ entraîne $\|g\| = \|P_k \dots P_1 g\| \leq \|P_1 g\| \leq \|g\|$, les P_j étant de norme 1, d'où $g \in N_1$ et $P_1 g = g$ par 12°a); par récurrence finie, on obtient $g \in N_2, \dots, g \in N_k$, q.e.d.

12°c) Un projecteur orthogonal est auto-adjoint, d'où $Q^* = P_1 \dots P_k$, et il suffit de changer l'ordre des projecteurs dans 12°b).

13°) $\bar{E}^\perp = E^\perp = (\text{Im}(I-Q))^\perp = \text{Ker}(I-Q^*) = N_0$ d'après 12°), donc $H = \bar{E} + N_0$ (somme directe orthogonale).

. Pour $g \in N_0$, on a $Q^n g = g = P_0 g$, et (1) est trivial. Par linéarité de (1), il suffit de l'établir pour $g \in \bar{E}$.

. Soient $g \in \bar{E}$, $\varepsilon > 0$, et $g_0 \in E$ tel que $\|g-g_0\| \leq \varepsilon$. Comme

$$\|Q^n g - P_0 g\| \leq \|Q^n(g-g_0)\| + \|P_0(g-g_0)\| + \|Q^n g_0 - P_0 g_0\| \leq 2\varepsilon + \|Q^n g_0 - P_0 g_0\|,$$

il suffit d'établir (1) pour les points de E (noter que $P_0 g_0 = 0$).

14°) Comme $\|Qf_n\| \leq \|f_n\| \leq 1$, l'hypothèse donne $\|f_n\| \rightarrow 1$.

. Si $k = 1$, Q est un projecteur orthogonal, d'où :

$$\|(I-Q)f_n\|^2 = \|f_n\|^2 - \|Qf_n\|^2 \rightarrow 1-1 = 0.$$

. De $k-1$ à k : soit $Q = P_k Q'$, la propriété étant vraie pour Q' . D'après le cas $k = 1$, l'hypothèse $\|Qf_n\| = \|P_k Q' f_n\| \rightarrow 1$ (portant sur la suite $(Q' f_n)$ de la boule unité) entraîne $(I-P_k)Q' f_n \rightarrow 0$; donc $\|Q' f_n\|$ a même limite que $\|P_k Q' f_n\|$, soit 1. L'hypothèse de récurrence donne alors $(I-Q')f_n \rightarrow 0$, d'où

$$(I-Q)f_n = (I-Q')f_n + (I-P_k)Q' f_n \rightarrow 0, \text{ q.e.d.}$$

15°a) Les $\|Q^n h\|$ forment une suite décroissante positive, car $\|Q\| \leq 1$, d'où l'existence de $a \geq 0$.

. Si $a = 0$, alors $Q^n h \rightarrow 0$, et $Q^n g = Q^n h - Q^{n+1} h \rightarrow 0$, q.e.d.

. Si $a > 0$, alors $\|Q^n h\| \geq a > 0$; d'où l'existence des f_n , de norme 1. Comme $Qf_n = Q^{n+1} h / \|Q^n h\|$, on a $\|Qf_n\| \rightarrow a/a = 1$, d'où $(I-Q)f_n \rightarrow 0$ par 14°), $(I-Q)Q^n h = Q^n g \rightarrow 0$, q.e.d.

15°b) Pour $g \in E$ on a $P_0 g = 0$ par 13°). Par 15°a) et 13°) on a donc (1) si f

16°a) P_1 et P_2 laissent stable N_0 , donc aussi son orthogonal; donc $P_1 g \in N_1$ et $P_2 P_1 g = Qg \in N_2 \cap N_0^\perp$ quand $g \in N_0^\perp$. Par suite

$$(P_1 g | P_2 P_1 g) \leq \cos \theta \|P_1 g\| \|Qg\| \leq \cos \theta \|g\| \|Qg\|;$$

mais le premier membre n'est autre que $\|Qg\|^2$, d'où le résultat.

16°b) Comme N_0^\perp est stable par Q , on obtient $\|Q^n g\| \leq \cos^n \theta \|g\|$ pour $g \in N_0^\perp$, en itérant 16°a). La décomposition $H = N_0 + N_0^\perp$, avec $P_0 = I = Q$ sur N_0 , donne alors (2) par linéarité.

17°) Soient T_f la translation $g \rightarrow g+f$ dans H , et P_j^0 , Q^0 les opérateurs Q du cas $f = 0$. Par invariance de la distance par translation on a, pour $0 \leq j$ $T_f P_j^0 T_f^{-1} = P_j$, d'où $T_f (Q^0)^n T_f^{-1} = Q^n$, ce qui ramène le cas général au cas f

18°) Par Cauchy-Schwarz on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |g(pu_j + tv_j)| \, dp dt = \iint_D |g| \leq \left(\iint_D 1 \cdot \iint_D g^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \|g\|_H < \infty.$$

D'après Fubini, $A_j g$ est donc une fonction intégrable sur \mathbb{R} (définie presque partout), et $\|A_j g\|_1 \leq \sqrt{\pi} \|g\|_H$, d'où la continuité de A_j .

19°) Par translation, on peut supposer $f = 0$ (cf. 17°); par rotation dans \mathbb{R}^2 on peut se ramener à $u_j = (1,0)$, $v_j = (0,1)$, et oublier l'indice j pour simplifier. Alors

$$(Ag)(x_1) = \int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) \, dx_2. \text{ Soit } h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) - \phi(x_1, x_2) \frac{Ag(x_1)}{A\phi(x_1)}$$

La propriété voulue $h = Pg$ résulte des trois faits suivants :

. $h \in H$: en effet $g = \phi^{\frac{1}{2}} \cdot g$, d'où par Cauchy-Schwarz

$$(Ag(x_1))^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1, x_2) \, dx_2 \int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2)^2 \, dx_2 = A\phi(x_1) \int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2)^2 \, dx_2$$

D'autre part, pour toute fonction F mesurable positive, on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \phi(x_1, x_2) F(x_1) dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} F(x_1) dx_1 \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1, x_2) dx_2 = \int_{-1}^{+1} A\phi(x_1) F(x_1) dx_1$$

Finalemment :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left(\phi(x_1, x_2) \frac{Ag(x_1)}{A\phi(x_1)} \right)^2 dx_1 dx_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{Ag(x_1)^2}{A\phi(x_1)} dx_1 \leq \iint_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2)^2 dx_1 dx_2 < \infty ,$$

d'où $h \in H$ (noter que $A\phi(x_1) = 2\sqrt{1-x_1^2}$ sur $[-1, 1]$).

. $h \in \text{Ker } A$, car $Ah = Ag - A\phi \cdot \frac{Ag}{A\phi} = 0$, les fonctions Ag et $A\phi$ étant constantes sur les verticales.

. $g-h \perp \text{Ker } A$, car pour $u \in \text{Ker } A$ on a $A(\phi u) = Au = 0$ et

$$(g-h|u) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{Ag(x_1)}{A\phi(x_1)} \phi u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{Ag(x_1)}{A\phi(x_1)} A(\phi u)(x_1) dx_1 = 0 .$$

20°) $A_1 f, \dots, A_k f$ (et u_1, \dots, u_k) étant connus, les opérateurs P_j sont donnés explicitement par 19°), d'où Q . Par (1), $Q^{\perp} 0$ tend vers $P_0 0$, projection orthogonale de 0 sur $f+N_0$, i.e. fonction de norme minimale égale à f modulo N_0 .

21°) Si $v \in \mathbb{R}^2$, soit ∂_v la dérivation dans la direction de v :

$$\partial_v f(x) = \frac{d}{dt} f(x+tv)_{t=0} .$$

. $k = 1$. Soit $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, avec $\text{supp } g = D$. Prendre $f = \partial_{v_1} g$ donne $A_1 f = 0$, i.e. $f \in \text{Ker } A_1 = N_1 = N_0$; de plus f n'est pas identiquement nulle, sinon g serait constante sur les parallèles à v_1 , donc identiquement nulle.

. k général : $f = \partial_{v_1} \partial_{v_2} \dots \partial_{v_k} g$ donne $A_1 f = \dots = A_k f = 0$, et $f \neq 0$.

Conclusion : f n'est pas entièrement déterminée par la connaissance d'un nombre fini de radiographies $A_1 f, \dots, A_k f$. Mais on peut montrer (par Fourier) qu'une infinité la déterminerait; cf. le résultat (plus faible) de 10°).

DURÉE : 6 heures

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

	Pages
ANALYSE NUMÉRIQUE.....	39 à 45
MÉCANIQUE GÉNÉRALE.....	46 à 53
PROBABILITÉS ET STATISTIQUES.....	54 à 59
MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE.....	60 à 66

ANALYSE NUMÉRIQUE

AVERTISSEMENT. — La deuxième partie est indépendante de la première. On pourra admettre les résultats demandés par l'énoncé pour poursuivre l'étude des questions, à condition de l'indiquer clairement.

NOTATIONS

Pour toute fonction intégrable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on note :

$$\|g\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx.$$

On utilisera un pas d'espace Δx ; c'est un nombre réel > 0 , destiné à tendre vers 0. On se donne un nombre réel $\rho > 0$, fixe ; le pas de temps sera toujours défini par $\Delta t = \rho \Delta x$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = n + 2\mathbb{Z} = \{j \in \mathbb{Z} ; j - n \text{ est pair}\}$. Pour $j \in I_n$, on définit le pavé de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\prod_j^n = [n \Delta t, (n+1) \Delta t[\times [(j-1) \Delta x, (j+1) \Delta x[.$$

Si $h(t, x)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on pose $h_j^n = h(n \Delta t, j \Delta x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$.

On rappelle enfin la notation :

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

PREMIÈRE PARTIE

45 Soit c un nombre réel, $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , et $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de
53 classe \mathcal{C}^2 . On suppose que les dérivées premières et secondes de a et f sont bornées.

On cherche une fonction $u(t, x)$, définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, solution du système suivant :

59
66

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = a(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Q.1. Montrer que le système (P) admet une et une seule solution de classe \mathcal{C}^2 , qu'on explicitera (pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pourra considérer les applications :

$$t \mapsto g_y(t) = u(t, y + ct)).$$

On désire approcher numériquement la solution $u(t, x)$ par des fonctions :

$$(t, x) \mapsto U^{\Delta x}(t, x) = U(t, x; \Delta x).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $j \in I_n$, la valeur de $U(\cdot, \cdot; \Delta x)$ sera constante sur \prod_j^n , et notée $u^{n,j}$.

On approchera le système (P) par :

$$(P_{\Delta x}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{u^{n+1,j} - \frac{1}{2}(u^{n,j+1} + u^{n,j-1})}{\Delta t} + c \frac{u^{n,j+1} - u^{n,j-1}}{2 \Delta x} \\ \qquad \qquad \qquad = f_j^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in I_{n+1} \\ u^{0,j} = a(j \Delta x) \quad \text{pour } j \text{ pair.} \end{array} \right.$$

Q.2. Montrer que $\left\{ \prod_j^n; n \in \mathbb{N}, j \in I_n \right\}$ est une partition de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Prouver ensuite, par récurrence soignée, que les relations ci-dessus définissent la fonction $U^{\Delta x}$ de manière unique.

Q.3. On suppose dans cette question que $f \equiv 0$, et que $a(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $a(x) > 0$ si $|x| < 1$.

α . Montrer que $u^{n,j} = 0$ pour $|j| \geq n + \frac{1}{\Delta x}$.

β . Calculer $U(t, 1 + \lambda t; \Delta x)$ et $U(t, -1 - \lambda t; \Delta x)$ pour $t > 0, \lambda > 0, \Delta t \leq t \left(1 - \frac{1}{\lambda \rho}\right)$.

γ . En déduire qu'une condition nécessaire pour que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} U(t, x; \Delta x) = u(t, x)$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ que $\rho |c| \leq 1$.

On supposera jusqu'à la fin de la première partie que $\rho |c| \leq 1$.

Q.4. α . Montrer que :

$$\left| u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \right| \leq \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left\{ \rho^2 \sup_{\prod_j^n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| + \sup_{\prod_j^n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \right\}$$

β . De même, majorer l'expression :

$$\left| u_{j+1}^n - u_{j-1}^n - 2 \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n \right|$$

à l'aide des dérivées secondes de u .

Q.5. On pose $\varepsilon_j^n = u_j^n - u^{n,j}$, $\varepsilon^n = \sup_{j \in I_n} |\varepsilon_j^n|$, $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \rho c)$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \rho c)$;

α . À l'aide de Q.4, majorer l'expression :

$$|\varepsilon_j^{n+1} - \alpha \varepsilon_{j-1}^n - \beta \varepsilon_{j+1}^n|, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, j \in I_{n+1};$$

β . Montrer ensuite que :

$$\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n \leq \sup_{j \in I_{n+1}} |\varepsilon_j^{n+1} - \alpha \varepsilon_{j-1}^n - \beta \varepsilon_{j+1}^n|.$$

γ. En déduire que $\varepsilon^n \leq M_1 n (\Delta x)^2$, où M_1 est un nombre réel qui ne dépend que de ρ et des valeurs des dérivées secondes de u dans la bande $(t, x) \in [0, n \Delta t] \times \mathbb{R}$. On donnera une majoration explicite de M_1 en fonction de c, ρ , et des dérivées premières et secondes de a et f .

δ. En déduire que pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} U(t, x; \Delta x) = u(x, t).$$

La convergence est-elle uniforme par rapport à t ou à x ?

Q.6. Cas général. Montrer que :

$$u^{n,j} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} u^{0, n+j-2k} + \Delta t \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \alpha^k \beta^{l-k} f_{j+l-\frac{1}{2}k}^{n-l-\frac{1}{2}k}.$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, α_1 et α_2 sont deux nombres réels distincts de $[0, 1]$, et $\beta_i = 1 - \alpha_i$. Pour $k_0 \in \mathbb{Z}$, on définit $A(k_0)$ comme étant la somme (éventuellement infinie) de la série à termes positifs :

$$\sum'_{n,k} \binom{n}{k} \binom{n}{k+k_0} \alpha_1^k \beta_1^{n-k} \alpha_2^{k+k_0} \beta_2^{n-k-k_0},$$

où la notation $\sum'_{n,k}$ signifie que la sommation est étendue aux couples d'entiers (n, k) tels que $k, n-k, k+k_0, n-k-k_0$ soient ≥ 0 ; on rappelle que $A(k_0)$ ne dépend pas de l'ordre de la sommation.

Q.7. α. Montrer que pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0) z^{k_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} (P(z))^n$$

où $P(X)$ est la fraction rationnelle $(\beta_2 + \alpha_2 X) \left(\frac{\alpha_1}{X} + \beta_1 \right)$.

β. Étudier la couronne de convergence de la série de Laurent $\sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0) X^{k_0}$, et calculer sa somme $S(X)$ dans cette couronne. On décomposera S en éléments simples.

γ. En déduire une expression simple des coefficients $A(k_0)$, et la majoration :

$$A(k_0) \leq \frac{1}{|\alpha_2 - \alpha_1|}.$$

Maintenant, pour $k_0, r, s \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$A(k_0, r, s) = \sum'_{n,k} \binom{n-r}{k} \binom{n-s}{k+k_0} \alpha_1^k \beta_1^{n-r-k} \alpha_2^{k+k_0} \beta_2^{n-s-k-k_0},$$

où la somme $\sum'_{n,k}$ concerne les couples (n, k) d'entiers relatifs tels que $k, n-r-k, k+k_0$ et $n-s-k-k_0$ soient ≥ 0 .

Q.8. α . Calculer $\sum_{k_0 = -\infty}^{+\infty} A(k_0, r, s) z^{k_0}$, pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$, en fonction de $\frac{\alpha_1}{z} + \beta_1$ et $\alpha_2 z + \beta_2$.

β . Étudier la couronne de convergence de la série de Laurent $\sum_{k_0 = -\infty}^{+\infty} A(k_0, r, s) X^{k_0}$, et exprime somme dans cette couronne à l'aide de $S(X)$.

γ . En déduire la majoration :

$$A(k_0, r, s) \leq \frac{1}{|\alpha_2 - \alpha_1|}$$

(on pourra utiliser Q.7. γ).

TROISIÈME PARTIE

On considère maintenant un système non couplé de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} = f & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, & v(0, x) = v_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + c_2 \frac{\partial w}{\partial x} = g & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, & w(0, x) = w_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les vitesses de propagation c_1 et c_2 sont supposées distinctes.

On approche chacune des équations de ce système comme dans la première partie par :

$$\frac{1}{2 \Delta t} (2 v^{n+1, j} - v^{n, j-1} - v^{n, j+1}) + \frac{c_1}{2 \Delta x} (v^{n, j+1} - v^{n, j-1}) = f^{n, j},$$

$$\frac{1}{2 \Delta t} (2 w^{n+1, j} - w^{n, j-1} - w^{n, j+1}) + \frac{c_2}{2 \Delta x} (w^{n, j+1} - w^{n, j-1}) = g^{n, j},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in I_{n+1}$.

ATTENTION. — Les valeurs $v^{0, j}$, $w^{0, j}$, $f^{n, j}$, $g^{n, j}$ sont données, mais ne sont pas nécessairement égales à $v_0(j \Delta x)$, $w_0(j \Delta x)$, f_j^n ou g_j^n . Leurs choix n'ont pas d'importance dans cette partie.

On fait les hypothèses suivantes :

(H 1) $\rho |c_1| \leq 1$ et $\rho |c_2| \leq 1$.

(H 2) $\sum_{j \text{ pair}} |v^{0, j}| < +\infty$, $\sum_{j \text{ pair}} |w^{0, j}| < +\infty$.

(H 3) $\sum_{j \in I_{n+1}} (|f^{n, j}| + |g^{n, j}|) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Q.9. On commence par l'étude du cas :

$$f^{n, j} = 0, \quad g^{n, j} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in I_{n+1}.$$

α . À l'aide de Q.6, exprimer le produit $v^{n,j} w^{n,j}$ pour $j \in I_n$, en fonction des produits $v^{0,l} w^{0,m}$, l et m pairs.

β . Montrer que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in I_n} |v^{n,j} w^{n,j}| \leq \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} A(k_0) \sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j} w^{0,j-2k_0}|.$$

γ . En déduire que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in I_n} |v^{n,j} w^{n,j}| \leq \frac{1}{|\alpha_2 - \alpha_1|} \left(\sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}| \right) \left(\sum_{l \text{ pair}} |w^{0,l}| \right).$$

Q.10. Deuxième cas $w^{0,j} = 0$ pour j pair, $f^{n,j} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, $j \in I_{n+1}$.

α . Exprimer le produit $v^{n,j} w^{n,j}$ en fonction des produits $v^{0,l} g^{m,p}$ pour l pair et $m+p$ impair.

β . Montrer que :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j \in I_n} |v^{n,j} w^{n,j}| \leq \Delta t \sum_{s=1}^N \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} A(k_0, 0, s) \sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j} g^{s-1, j-s-2k_0}|.$$

γ . En déduire la majoration :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j \in I_n} |v^{n,j} w^{n,j}| \leq \frac{\Delta t}{|\alpha_2 - \alpha_1|} \left(\sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}| \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^N \sum_{l \in I_s} |g^{s-1,l}| \right).$$

Q.11. Troisième cas, $v^{0,j} = w^{0,j} = 0$ pour j pair. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{j \in I_n} |v^{n,j} w^{n,j}| \leq \frac{\Delta t^2}{|\alpha_2 - \alpha_1|} \left(\sum_{r=1}^N \sum_{j \in I_r} |f^{r-1,j}| \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^N \sum_{l \in I_s} |g^{s-1,l}| \right).$$

Q.12. De quelle majoration dispose-t-on dans le cas général ?

QUATRIÈME PARTIE

On désire approcher une solution du système couplé de deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} = v w \quad \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad v(0, x) = v_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + c_2 \frac{\partial w}{\partial x} = v w \quad \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad w(0, x) = w_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Les nombres réels c_1, c_2 sont donnés, avec $c_1 \neq c_2$. Les conditions initiales v_0 et w_0 sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , intégrables.

ATTENTION. — La nature de la solution (v, w) du système ci-dessus et le sens à donner à ces équations pas d'importance ici. Nous ne considérerons que des solutions approchées.

On construit donc deux fonctions :

$$V^{\Delta x}(t, x) = V(t, x; \Delta x) \quad \text{et} \quad W^{\Delta x}(t, x) = W(t, x; \Delta x),$$

constantes sur chaque pavé \prod_j^n ($n \in \mathbb{N}, j \in I_n$), et valant respectivement $v^{n,j}$ et $w^{n,j}$.

On utilise les formules étudiées dans la troisième partie pour calculer les nombres $v^{n,j}$ et $w^{n,j}$ en choisissant :

$$f^{n,j} = g^{n,j} = \frac{1}{2} (v^{n,j+1} w^{n,j+1} + v^{n,j-1} w^{n,j-1}),$$

et

$$v^{0,j} = \frac{1}{2 \Delta x} \int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} v_0(y) dy, \quad w^{0,j} = \frac{1}{2 \Delta x} \int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} w_0(y) dy.$$

Q.13. Vérifier que les sommes $2 \Delta x \sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}|$ et $2 \Delta x \sum_{j \text{ pair}} |w^{0,j}|$ sont majorées par des nombres indépendants de Δx .

Q.14. On pose $X_N = 2 \Delta x \Delta t \sum_{n=0}^N \sum_{j \in I_n} |v^{n,j} w^{n,j}|$.

Montrer que pour $N \geq 1$,

$$X_N \leq \frac{1}{|c_2 - c_1|} (\|v_0\| + X_{N-1}) (\|w_0\| + X_{N-1}).$$

On supposera jusqu'à la fin du problème que :

$$\|v_0\| + \|w_0\| < \frac{|c_2 - c_1|}{2}.$$

Q.15. α . Montrer l'implication :

$$X_{N-1} \leq \frac{1}{4} |c_2 - c_1| \quad \Rightarrow \quad X_N \leq \frac{1}{4} |c_2 - c_1|.$$

β . En déduire l'existence d'un nombre réel $\delta > 0$ tel que, si $\Delta x \in]0, \delta[$, alors :

$$X_N \leq \frac{1}{4} |c_2 - c_1|, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Q.16. On pose $V_N = 2 \Delta \times \sum_{j \in I_N} |v^{N \cdot j}|$ et $W_N = 2 \Delta \times \sum_{j \in I_N} |w^{N \cdot j}|$.

Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$V_N \leq \|v_0\| + \frac{1}{4} |c_2 - c_1|, \quad W_N \leq \|w_0\| + \frac{1}{4} |c_2 - c_1|.$$

ions

l'ont

, en

des

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

PREMIÈRE PARTIE

On considère un système différentiel de m équations du premier ordre, autonome et mis sous forme norm.

$$(1) \quad \dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Les fonctions $t \rightarrow x_i(t)$ sont les m fonctions inconnues de la variable indépendante réelle t ; les $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ leurs dérivées. Les m fonctions X_i , supposées indépendantes de t (système autonome) sont m fonctions données m variables réelles x_1, x_2, \dots, x_m . On les supposera différentiables, de classe C^∞ .

La solution $x_i(t)$ de (1), correspondant aux conditions initiales $x_i(0) = x_{i0}$, définit une trajectoire de (1).

1° a. Montrer que, pour qu'une fonction différentiable $F(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ soit intégrale première de (1), c'est-à-dire pour que F garde une valeur constante le long des trajectoires de (1), il faut et il suffit que F satisfasse l'équation aux dérivées partielles de Jacobi :

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

b. L'équation (2) introduit l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et l'on remarquera que, pour les fonctions $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ne dépendant pas explicitement de t , l'équation (2) se réduit à $\mathcal{X}(F) = 0$.

Montrer que \mathcal{X} est une dérivation sur l'anneau \mathcal{A} des fonctions des x_i , définies sur un ouvert de \mathbb{R}^m , de classe C^∞ , c'est-à-dire que, quelles que soient F et G , éléments de \mathcal{A} , on a :

$$\mathcal{X}(F + G) = \mathcal{X}(F) + \mathcal{X}(G)$$

$$\mathcal{X}(FG) = F \mathcal{X}(G) + G \mathcal{X}(F).$$

c. De façon plus générale, on considère une fonction différentiable g de p variables réelles z_1, z_2, \dots, z_p , p fonctions F_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, éléments de \mathcal{A} et la fonction composée $g(F_1, F_2, \dots, F_p)$. Montrer que l'on a :

$$\mathcal{X}(g(F_1, F_2, \dots, F_p)) = \sum_{\alpha=1}^p \mathcal{X}(F_\alpha) \frac{\partial g}{\partial z_\alpha}(F_1, F_2, \dots, F_p).$$

En déduire que toute fonction différentiable de p intégrales premières de (1) est une intégrale première de (1).

20 Un solide K , de masse M , est mobile autour d'un de ses points O maintenu fixe par une liaison sans frottement. K est placé dans le champ de la pesanteur de grandeur constante g .

On rapporte l'espace à un trièdre fixe orthonormé direct $Ox_1y_1z_1$ (Oz_1 verticale ascendante) et l'on considère le trièdre mobile orthonormé direct $Oxyz$ des axes principaux d'inertie de K en O . On suppose que K vérifie les hypothèses de S. Kovalevskaya : les moments principaux d'inertie de K en O sont $A, A, \frac{A}{2}$ et le centre d'inertie

G de K se trouve dans le plan Oxy ; aussi, on définit l'axe Ox par $\vec{OG} = \frac{\omega^2 A}{2Mg} \vec{x}, \frac{\omega^2 A}{2Mg}$ étant la distance de G à O avec ω constante réelle non nulle. On appelle $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantanée de K par rapport à $Ox_1y_1z_1$ et l'on pose $\vec{\Omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}$ et $\vec{z}_1 = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$.

a. Établir le système (Σ) des six équations différentielles du premier ordre aux six inconnues $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$. Le système (Σ) traduit, d'une part, le théorème du moment cinétique appliqué à K en O et, d'autre part, le fait que la vitesse absolue de l'extrémité du vecteur d'origine O et équipollent à \vec{z}_1 est nulle.

b. Appliquer l'opérateur \mathcal{X} , attaché au système (Σ) , mis sous forme normale, successivement à :

$$\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, p^2, q^2, r^2, \omega^2 \alpha, \alpha p, \beta q, \gamma r,$$

puis, à l'aide de ces calculs, retrouver le fait que \vec{z}_1 est unitaire et les deux intégrales premières classiques de (Σ) .

c. Calculer ensuite $\mathcal{X}(p^2 - q^2 - \omega^2 \alpha)$, $\mathcal{X}(2pq - \omega^2 \beta)$ et en déduire l'intégrale première de (Σ) propre au cas de S. Kovalevskaya.

30 On définit les puissances entières de l'opérateur \mathcal{X} attaché au système (1) en posant, pour toute fonction F de l'anneau \mathcal{A} :

$$\mathcal{X}^0(F) = F$$

$$\mathcal{X}^k(F) = \mathcal{X}(\mathcal{X}^{k-1}(F)), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier naturel k , exprimer au moyen de $\mathcal{X}^l(F)$, $\mathcal{X}^l(G)$, $l = 0, 1, \dots, k$: $\mathcal{X}^k(F + G)$ et $\mathcal{X}^k(FG)$ où F et G sont deux éléments quelconques de \mathcal{A} .

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute la suite du problème, on appelle *série formelle* en t , à coefficients éléments de \mathcal{A} , une expression de la forme :

$$(3) \quad S = A_0 + t A_1 + \frac{t^2}{2!} A_2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A_k + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A_k$$

dans laquelle $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$ sont des fonctions éléments de \mathcal{A} .

Sauf indication contraire, on ne fait pas d'hypothèse sur la convergence de la somme infinie figurant au second membre de (3).

On définit sur l'espace des séries formelles, l'opération d'addition de deux séries formelles S donnée en (3) et

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k, \quad \text{en posant :}$$

$$S + U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A_k + B_k).$$

De même on définit le produit SU comme étant la série formelle :

$$SU = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{l=0}^{l=k} C_k^l A_l B_{k-l} \right)$$

où les C_k^l sont les coefficients du binôme.

On remarquera que $S + U$ s'obtient en ajoutant terme à terme les séries formelles S et U et que SU en développant formellement le produit des séries formelles S et U et en regroupant les termes de même de

On définit encore la dérivée par rapport à t de la série formelle S comme étant la série formelle :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = A_1 + t A_2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A_k + \dots$$

De plus, si \mathcal{X} est un opérateur différentiel sur \mathcal{A} , on définit la série formelle :

$$\mathcal{X}(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathcal{X}(A_k).$$

On dira que la série formelle S est solution formelle de l'équation de Jacobi (2) et donc intégrale formelle du système (1), si l'on a formellement :

$$\mathcal{X}(S) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

le membre de droite de cette égalité étant la série formelle nulle, série dont tous les coefficients sont nuls.

1° a. On considère alors la série formelle S donnée par (3), où l'on a posé $A_0 = F$, F élément de \mathcal{A} .

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cette série formelle soit une solution formelle de (2) est :

$$A_k = (-1)^k \mathcal{X}^k(F), \quad k \in \mathbb{N}.$$

b. On est ainsi amené à appeler *série de Lie* de la fonction F , relative à l'opérateur \mathcal{X} , la série formelle :

$$(4) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{X}}(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \mathcal{X}^k(F).$$

La formule (4) définit un opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ que l'on notera aussi $\exp(-t\mathcal{X})$ par référence au développement en série de Taylor de la fonction exponentielle. $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ applique l'anneau \mathcal{A} dans l'espace des séries formelles.

Montrer que $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ est un opérateur linéaire de noyau nul, ayant pour image l'ensemble des séries formelles solutions formelles de (2).

c. On dira qu'une fonction F est régulière si sa série de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(F)$ converge pour tout t d'un intervalle de \mathbb{R} contenant l'origine et si la somme de cette série est une fonction différentiable de l'ensemble des variables x_1, x_2, \dots, x_m, t dont les dérivées sont sommes des séries de Lie correspondantes supposées elles aussi régulières.

Montrer que si F est régulière, la somme de la série de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(F)$ est une intégrale première de (1).

d. Soient φ_i les m fonctions coordonnées :

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_i.$$

On suppose ces m fonctions régulières pour le système (1).

On appelle séries fondamentales de Lie du système (1), les m séries de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\varphi_i)$ et on désigne par $(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\varphi_i))(x_1, \dots, x_m, t)$ les sommes de ces séries.

Soit $t \rightarrow x_i(t)$ la solution de (1) pour les données de Cauchy : $x_i(0) = x_{i0}$. Montrer que :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\lambda}(\varphi_i))(x_1(t), \dots, x_m(t), t) &= x_{i0} \\ (\mathcal{L}_{\lambda}(\varphi_i))(x_{10}, \dots, x_{m0}, -t) &= x_i(t). \end{aligned}$$

En déduire que les m séries fondamentales de Lie sont indépendantes et permettent, lorsqu'elles sont convergentes, de résoudre effectivement le système (1).

2° On considère le système différentiel linéaire à coefficients constants de m équations différentielles du premier ordre :

$$(5) \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Former les m séries fondamentales de Lie du système (5). En déduire la solution de (5) correspondant aux conditions initiales : $x_i(0) = x_{i0}$.

3° Soit $Oxyz$ un trièdre orthonormé direct lié à la Terre : O est un point de la surface terrestre, Oz est dirigé suivant la verticale ascendante, Ox vers le Sud (l'axe Ox' directement opposé vers le Nord) et l'axe Oy vers l'Est. Le vecteur rotation de la Terre par rapport à un repère absolu (lié à des étoiles fixes) est le vecteur $\vec{\Omega}$ dont le support est une droite passant par O et située dans le plan méridien xOz ; on pose $(Ox', \vec{\Omega}) = \lambda$, λ constante réelle, $\lambda \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La longueur ω (constante absolue) de $\vec{\Omega}$ est petite devant la longueur g (constante absolue) du vecteur champ de la pesanteur; aussi on négligera ω^2 dans toute cette question.

a. En observateurs relatifs (liés à $Oxyz$), écrire le système (Σ') des équations du mouvement d'une particule matérielle P , de masse unité, libre dans l'espace, soumise à son poids et à la seule force d'inertie complémentaire, les variables étant les coordonnées cartésiennes x, y, z de P dans $Oxyz$ et les composantes X, Y, Z de la vitesse de P par rapport à $Oxyz$.

b. Écrire l'opérateur \mathcal{X} attaché au système (Σ') et retrouver, en appliquant \mathcal{X} à une fonction convenablement choisie, l'intégrale première de l'énergie.

c. Former les six séries fondamentales de Lie du système (Σ') . Ces séries s'arrêtent puisque l'on néglige ω^2 . On admettra qu'elles fournissent une solution approchée de (Σ') correspondant aux conditions initiales : $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, X(0) = X_0, Y(0) = Y_0, Z(0) = Z_0$, pour des valeurs de t appartenant à un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant l'origine et assez petit. Donner cette solution approchée.

d. Interpréter les résultats obtenus, dans le cas particulier où P est lâchée de O sans vitesse initiale.

e. Retrouver les résultats connus lorsque l'on estime ω négligeable devant g .

TROISIÈME PARTIE

On considère l'ensemble \mathcal{E} des fonctions de $2n$ variables $u_i, v_i; i = 1, 2, \dots, n$ dépendant en outre éventuellement d'un paramètre réel τ , fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^{2n+1} et de classe C^∞ par rapport à l'ensemble des arguments u_i, v_i, τ .

Dans la suite du problème, les variables u_i, v_i s'appelleront tantôt p_i, q_i , tantôt r_i, s_i , et τ sera parfois le temps t , parfois un petit paramètre ε en théorie des perturbations.

On définit le crochet de Poisson de deux fonctions quelconques F_1 et F_2 de \mathcal{E} par :

$$(6) \quad [F_1, F_2]_{(u,v)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_i} \frac{\partial F_2}{\partial v_i} - \frac{\partial F_1}{\partial v_i} \frac{\partial F_2}{\partial u_i} \right).$$

1° Montrer rapidement que les crochets de Poisson possèdent un caractère bilinéaire alterné et qu'ils ont de p les propriétés :

$$\begin{aligned} [F_1, F_2 F_3]_{(u,v)} &= F_2 [F_1, F_3]_{(u,v)} + F_3 [F_1, F_2]_{(u,v)} \\ \frac{\partial}{\partial y} [F_1, F_2]_{(u,v)} &= \left[\frac{\partial F_1}{\partial y}, F_2 \right]_{(u,v)} + \left[F_1, \frac{\partial F_2}{\partial y} \right]_{(u,v)} \end{aligned}$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions quelconques de \mathcal{E} et y étant l'un quelconque des $2n + 1$ arguments u_i, v_i ,

On admettra d'autre part l'identité de Jacobi :

$$[F_1, [F_2, F_3]]_{(u,v)} + [F_2, [F_3, F_1]]_{(u,v)} + [F_3, [F_1, F_2]]_{(u,v)} = 0,$$

pour trois fonctions quelconques de \mathcal{E} .

2° On dit qu'un changement des $2n$ variables p_i, q_i en $2n$ variables r_i, s_i , dépendant éventuellement du temps d'équations :

$$(7) \quad \begin{cases} p_i = f_i(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t) \\ q_i = g_i(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

définit une transformation canonique si et seulement si l'on a :

$$(8) \quad \begin{cases} [f_i, f_j]_{(r,s)} = 0 \\ [f_i, g_j]_{(r,s)} = \delta_{ij} \\ [g_i, g_j]_{(r,s)} = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

les $2n$ fonctions f_i, g_i sont éléments de \mathcal{E} et δ_{ij} est le symbole de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et nul si i est différent de j .

a. On introduit la matrice jacobienne J des $2n$ fonctions f_i, g_i des $2n$ variables r_i, s_i et la matrice carrée $2n \times 2n$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n \text{ matrice unité } n \times n.$$

Montrer que les conditions (8) peuvent s'écrire sous la forme $J E {}^T J = E$ où ${}^T J$ est la matrice transposée de J .

b. Soit la fonction $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \rightarrow H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ élément de \mathcal{E} . Par définition, le système différentiel canonique engendré par H est le système différentiel :

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = + \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et l'on dit que H est l'hamiltonien du système (9).

Écrire sous forme matricielle le système (9) à l'aide de la matrice colonne $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ à $2n$ éléments : les variables p_i, q_i , et de la matrice colonne $\begin{pmatrix} H'_p \\ H'_q \end{pmatrix}$ à $2n$ éléments : les dérivées partielles de H par rapport aux $2n$ variables p_i, q_i .

c. Montrer que le système (9) se transforme, sous la transformation canonique (7), (8) en un système différentiel canonique engendré par un hamiltonien K , fonction des $2n + 1$ variables r_i, s_i, t , que l'on déterminera lorsque le changement de variables (7) ne dépend pas de t , puis lorsqu'il en dépend.

- le plus
- 3° a. On note Λ l'opérateur \mathcal{X} attaché au système (9) de $m = 2n$ équations différentielles du premier ordre. Montrer que $\Lambda(F) = [H, F]_{(p, q)}$.
- b. Retrouver l'intégrale de l'énergie à l'aide de Λ .
- c. Démontrer le théorème de Poisson : si F et G , éléments de \mathcal{E} , fonctions des $2n + 1$ variables p_i, q_i, t sont deux intégrales premières de (9), $[F, G]_{(p, q)}$ est aussi intégrale première de (9).
- 4° Pour tout entier naturel k , montrer que $\Lambda^k [F, G]_{(u, v)}$ où F et G sont deux éléments quelconques de \mathcal{E} , fonctions des $2n + 1$ variables u_i, v_i, τ , s'exprime au moyen des crochets $[\Lambda^l(F), \Lambda^{k-l}(G)]_{(u, v)}$, $l = 0, 1, \dots, k$.

QUATRIÈME PARTIE

- 1° a. On se donne une fonction W , élément de \mathcal{E} , fonction des $2n + 1$ variables r_i, s_i, τ et l'on définit l'opérateur Δ_W par :

$$\Delta_W(F) = [W, F]_{(r, s)} + \frac{\partial F}{\partial \tau}$$

où F est une fonction des $2n + 1$ variables r_i, s_i, τ , élément quelconque de \mathcal{E} .

On définit les puissances entières Δ_W^k de l'opérateur Δ_W comme on a défini celles de l'opérateur \mathcal{X} en première partie, 3°.

Montrer que, pour tout entier naturel k , les expressions de $\Delta_W^k(F + G)$, $\Delta_W^k(FG)$ et $\Delta_W^k([F, G]_{(r, s)})$ au moyen de $\Delta_W^l(F)$, $\Delta_W^l(G)$ pour $l = 0, 1, \dots, k$, sont les mêmes que celles de $\Lambda^k(F + G)$, $\Lambda^k(FG)$ et $\Lambda^k([F, G])$ au moyen des $\Lambda^l(F)$, $\Lambda^l(G)$.

- b. Pour tout entier naturel k , on pose :

$$F_0^{(k)}(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) = (\Delta_W^k(F(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \tau)))_{\tau=0}$$

et l'on considère la série formelle en τ :

$$E_W(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} F_0^{(k)};$$

E_W est appelé *opérateur de Lie* engendré par la fonction W .

Exprimer de façon formelle les séries formelles $E_W(F + G)$, $E_W(FG)$ et $E_W([F, G]_{(r, s)})$ au moyen des séries formelles $E_W(F)$ et $E_W(G)$.

- c. On considère les $2n$ fonctions coordonnées ρ_i, σ_i :

$$\rho_i(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) = r_i, \quad \sigma_i(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) = s_i; \quad i = 1, \dots, n$$

et le changement de variables d'équations :

$$(10) \quad \begin{cases} p_i = (E_W(\rho_i))(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \tau) \\ q_i = (E_W(\sigma_i))(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \tau) \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Montrer que, si toutes les fonctions coordonnées sont régulières au sens du 1°, c de la deuxième partie, le changement de variables d'équations (10) définit une transformation canonique dépendant de τ .

- d. Montrer qu'alors les seconds membres de (10) constituent les développements en série de Taylor au voisinage de $\tau = 0$ de la solution du système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \tau) \rightarrow W(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \tau)$, τ étant la variable indépendante, solution correspondant aux conditions initiales : $p_i(0) = r_i, q_i(0) = s_i; i = 1, \dots, n$.
- e. Dédire de ce qui précède que, pour toute fonction F élément de \mathcal{E} , des $2n + 1$ variables p_i, q_i, τ , on peut écrire :

$$F(E_W(\rho_1), \dots, E_W(\rho_n), E_W(\sigma_1), \dots, E_W(\sigma_n), \tau) = E_W(F).$$

2° Première application de la question (quatrième partie, 1°).

\mathcal{E} est ici l'ensemble des fonctions de $2n$ variables r_i, s_i , définies sur un ouvert de \mathbb{R}^{2n} , de classe C^∞ . W est l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique à n dimensions :

$$W(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (r_i^2 + \omega^2 s_i^2)$$

où ω est une constante réelle strictement positive. τ est le temps t .

- Définir l'opérateur Δ_W , les fonctions $F_0^{(k)}$ et l'opérateur de Lie E_W pour F élément quelconque de \mathcal{E} .
- Appliquer E_W aux $2n$ fonctions coordonnées p_i, q_i .
- En déduire la solution du système canonique engendré par $W(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ correspondant aux conditions initiales : $p_i(0) = p_{i0}, q_i(0) = q_{i0}$.
- Écrire le système différentiel canonique engendré par $W(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ et trouver directement la solution de ce système obtenue au c.

3° Deuxième application de la question (quatrième partie, 1°).

Les fonctions de \mathcal{E} considérées ici sont des fonctions de $2n + 1$ variables, définies sur un ouvert de \mathbb{R}^{2n+1} . Le paramètre τ du 1° de la quatrième partie est maintenant le petit paramètre ε de la théorie des perturbations. Ces fonctions sont de plus supposées développables en séries de puissances entières de ε , à coefficients indépendants de ε et éléments de \mathcal{E} . Les sommes de toutes ces séries sont supposées différentiables terme à terme.

- On considère la fonction W :

$$W(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} W_{k+1}(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n)$$

et l'on se propose d'effectuer la transformation canonique d'équations (10) à l'aide de cette fonction W . On remarquera que, ε étant un petit paramètre, cette transformation canonique est voisine de l'identité.

Montrer que le système différentiel canonique (9), engendré par l'hamiltonien H :

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} H_k(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$$

la variable indépendante étant le temps t , se transforme sous la transformation canonique que l'on vient de décrire, en le système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien $E_W(H)$.

- Pour expliciter $E_W(H)$, on pose, pour tout entier naturel k :

$$(\Delta_W^k(H))(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, \varepsilon) = \sum_{l=0}^k \frac{\varepsilon^l}{l!} H_l^{(k)}(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n).$$

● Établir une relation de récurrence entre la fonction $H_l^{(k)}$, les fonctions $H_j^{(k-1)}$, $j = 0, 1, \dots, l+1$ et les fonctions W_{m+1} ($m = 0, 1, \dots, l$).

● ● En déduire que l'on obtient les $H_0^{(k)}$ par un schéma analogue à celui de Pascal.

● ● ● Donner explicitement $H_0^{(1)}$, $H_1^{(1)}$ et $H_0^{(2)}$.

- On considère en particulier l'hamiltonien H :

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2, q_1, q_2) &= p_1 + \omega p_2 + \varepsilon (A p_1^2 \sin^4 q_1 - B \sqrt{2 p_1} \sin q_1 \cos q_2) \\ &= H_0(p_1, p_2) + \varepsilon H_1(p_1, q_1, q_2) \end{aligned}$$

où A, B et ω sont des constantes réelles non nulles; ω n'est pas un rationnel.

● Donner la solution $p_1^0(t), p_2^0(t), q_1^0(t), q_2^0(t)$ du système différentiel canonique, dit système principal, engendré par H_0 , solution correspondant aux conditions initiales :

$$p_1^0(0) = \alpha_1, p_2^0(0) = \alpha_2, q_1^0(0) = \beta_1, q_2^0(0) = \beta_2.$$

● ● On se propose de déterminer W de telle sorte que l'hamiltonien $E_W(H)$ ne dépende que de r_1, r_2, ε . Montrer que cela revient à intégrer le système différentiel canonique engendré par H .

● ● ● À l'ordre zéro en ε , la fonction W n'intervient pas et ce problème est résolu. Écrire $H_0^{(0)}$.

● ● ● ● Montrer qu'au premier ordre en ε , la fonction inconnue est :

$$(11) \quad H_0^{(1)} + \left(\frac{dW_1}{dt} \right)_0$$

où $\left(\frac{dW_1}{dt} \right)_0$ désigne la dérivée par rapport au temps de W_1 le long des trajectoires du système principal.

Montrer que la fonction inconnue (11) est égale à la somme d'une fonction de la seule variable r_1 et d'une fonction des variables r_1, s_1, s_2 .

Trouver à l'aide de ce qui précède une solution particulière, pour le premier ordre en ε , du problème que l'on vient de se poser au point ● ● . On donnera explicitement $H_0^{(1)}$ et W_1 .

● ● ● ● ● Peut-on opérer de façon similaire aux ordres suivants en ε ?

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et la numérotation des questions.

DÉFINITIONS - NOTATIONS - RAPPELS

1° On note : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\bar{\mathbb{N}}^* = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. L'adjectif « réel » (resp^t numérique) se rapportera à un élément de \mathbb{R} (resp^t $\bar{\mathbb{R}}$). $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp^t $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$) est l'ensemble des suites réelles indexées sur \mathbb{N} (resp^t \mathbb{N}^*). Si $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on note \underline{x}_n le n -uple (x_1, \dots, x_n) .

2° Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique, on note $\overline{\lim} a_n$ (resp^t $\underline{\lim} a_n$) la *limite supérieure* (resp^t *inférieure*) de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

• Tous les objets définis ci-dessous le seront sur un espace probabilisé (E, \mathcal{E}, μ) quelconque.

3° α étant une mesure positive sur (E, \mathcal{E}) et f une fonction numérique positive (i.e. $f \geq 0$) sur E , \mathcal{E} -mesurable, $f \cdot \alpha$ désigne la *mesure de densité f par rapport à α* ($\forall A \in \mathcal{E}, (f \cdot \alpha)(A) = \int_A f d\alpha$).

4° v.a. (resp^t v.a.r., v.a.n.) est l'abréviation de *variable aléatoire*, i.e. application mesurable de (E, \mathcal{E}) dans un autre espace mesurable (resp^t v.a. réelle, v.a. numérique). Y étant une v.a., on note μ_Y sa *loi*, i.e. la mesure image de μ par Y .

a. Si U est une v.a.n. μ -intégrable, on note $E_\mu U = \int U d\mu$ (ou, s'il n'y a pas ambiguïté, EU).

b. De même, si \mathcal{F} est une sous-tribu de \mathcal{E} , $E_\mu^{\mathcal{F}} U$ est l'espérance conditionnelle de U relativement à \mathcal{F} pour la probabilité μ . Lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, on la notera $E^{\mathcal{F}} U$ et on notera de manière identique un représentant et sa classe μ -p.s..

5° Si $A, B \in \mathcal{E}$, on note $A \subset B$ μ -p.s. le fait que $\mu(\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B) = 1$ et $A = B$ μ -p.s. le fait que $\mu(\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B) = 1$.

($\mathbf{1}_A$ désigne la *fonction indicatrice* de la partie A .)

— Les définitions suivantes s'adaptent immédiatement au cas où l'ensemble d'indice est \mathbb{N}^* au lieu de \mathbb{N} .

6° Si $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r., on note $(U_n \rightarrow)$ l'ensemble des éléments e de E tels que la suite réelle $(U_n(e))_{n \in \mathbb{N}}$ soit *convergente dans \mathbb{R}* .

7° Soient $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante ($\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$) de sous-tribus de \mathcal{E} et $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. ;

a. La suite U est dite $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -adaptée si U_n est \mathcal{E}_n -mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. U est une sous-martingale (resp^t martingale) si elle est adaptée, si, $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est μ -intégrable et si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E_{\mu}^{C_{n-1}} (U_n - U_{n-1}) \geq 0 \text{ (resp^t } = 0 \text{)}.$$

(Si besoin, on précisera les éléments de référence; exemple : U est une μ -sous-martingale relativement à $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.)

c. Une martingale $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée dans $L^1(\mu)$ si $\sup_{n \in \mathbb{N}} E_{\mu} |U_n| < +\infty$.

Dans tout le problème, on utilisera (sans les démontrer), les résultats suivants :

TH1 | Si $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans $L^1(\mu)$, on a : $\mu(U_n \rightarrow) = 1$.

TH2 | Soit $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale. S'il existe $c > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^* |U_n - U_{n-1}| \leq c$, alors :

$$(U_n \rightarrow) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{\mu}^{C_{n-1}} [(U_n - U_{n-1}) + (U_n - U_{n-1})^2] < +\infty \right) \mu\text{-p.s.}$$

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes définies sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{B}, P) de loi respective $N(0, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}^*$, où $\sigma_n > 0$, et $N(m, \sigma^2)$ désigne la loi gaussienne sur \mathbb{R} de moyenne m et variance σ^2 . Soient θ et $\tilde{\theta}$ deux réels distincts. On définit les deux suites de v.a.r. $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_n = \theta X_{n-1} + U_n \\ \tilde{X}_n = \tilde{\theta} \tilde{X}_{n-1} + U_n \\ X_1 = \tilde{X}_1 = U_1 \end{array} \right. \quad \forall n \geq 2.$$

On posera par la suite : $X_0 = \tilde{X}_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\underline{X}_n = (X_1, \dots, X_n) \quad , \quad \underline{\tilde{X}}_n = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n).$$

1. a. α . Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la loi de \underline{X}_n (resp^t $\underline{\tilde{X}}_n$) est une mesure de densité (notée) \underline{Q}_n (resp^t $\underline{\tilde{Q}}_n$) par rapport à la mesure de Lebesgue λ_n de \mathbb{R}^n , et que \underline{Q}_n et $\underline{\tilde{Q}}_n$ peuvent être choisies strictement positives sur tout \mathbb{R}^n . (On ne demande pas une expression analytique de \underline{Q}_n et $\underline{\tilde{Q}}_n$.) \underline{Q}_n et $\underline{\tilde{Q}}_n$ seront ainsi choisies par la suite.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{V}_n = \frac{X_{n-1}}{\sigma_n}$ et $\underline{V}_n = (V_1, \dots, V_n)$.

1. a. β . À quel type de loi obéit la v.a. \underline{V}_n à valeurs dans \mathbb{R}^n ? Quel est le vecteur moyenne de \underline{V}_n ?

1. a. γ . On note Λ la matrice de covariance de \underline{V}_n et C une matrice orthogonale telle que $C \Lambda C^* = D$ soit diagonale (C^* est la transposée de C).

On note R la matrice diagonale $n \times n$ définie par :

$$R_{ii} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{D_{ii}}} \quad \text{si } D_{ii} > 0 \\ 0 \quad \quad \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

Soit $\Phi = R C \underline{V}_n$. Préciser la loi de Φ .

1. a. δ . Si $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne usuelle dans \mathbb{R}^n et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé, démontrer que :

$$\| \underline{V}_n \|^2 \geq \langle D\Phi, \Phi \rangle$$

et en déduire que :

$$E e^{-\| \underline{V}_n \|^2} \leq \prod_{i: D_{ii} > 0} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 D_{ii}}}$$

1. a. ϵ . Établir alors l'inégalité :

$$E \| \underline{V}_n \|^2 \leq \frac{1}{[E e^{-\| \underline{V}_n \|^2}]^2}$$

1. a. ζ . Démontrer les équivalences :

$$P \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n} \right)^2 < +\infty \right] = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E \left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n} \right)^2 < +\infty$$

$$P \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n} \right)^2 = +\infty \right] = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E \left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n} \right)^2 = +\infty$$

1. b. \bullet On note encore X (resp^t \tilde{X}) l'application : $\omega \rightsquigarrow (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ (respectivement : $\omega \rightsquigarrow (\tilde{X}_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$) de Ω dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

$\forall j \in \mathbb{N}^*$, π_j est la j -ème projection de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sur \mathbb{R} : $\pi_j(x) = x_j$, pour tout élément $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ étant la tribu borélienne de \mathbb{R} , on définit alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la famille \mathcal{C}_n de parties de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$:

$\mathcal{C}_n = \left\{ \bigcap_{j=1}^n \pi_j^{-1}(A_j) \mid A_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, j = 1, \dots, n \right\}$ et $\mathcal{C}_{\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}_n$. Pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}^*}$, \mathcal{B}_n est alors la tribu sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ engendrée par \mathcal{C}_n .

1. b. α . Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_{\infty}$.

1. b. β . Démontrer que X (resp^t \tilde{X}) est une v.a. définie sur (Ω, \mathcal{B}, P) à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_{\infty})$.

1. b. γ . Si Q_n (resp^t \tilde{Q}_n) est la fonction positive définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ par, $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : Q_n(x) = \underline{Q}_n(x_n)$ (resp^t $\tilde{Q}_n(x) = \tilde{Q}_n(x_n)$), où $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que Q_n et \tilde{Q}_n sont \mathcal{B}_n -mesurables.

\bullet μ (resp^t $\tilde{\mu}$) est la loi de X (resp^t \tilde{X}), c'est-à-dire la probabilité image de P par X (resp^t \tilde{X}).

Si α et β sont deux probabilités sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_{\infty})$, on définit les trois relations :

$$\alpha \ll \beta \Leftrightarrow (A \in \mathcal{B}_{\infty} \text{ et } \beta(A) = 0 \Rightarrow \alpha(A) = 0)$$

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow (\alpha \ll \beta \text{ et } \beta \ll \alpha)$$

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{B}_{\infty} \text{ tel que } \alpha(A) = 1 \text{ et } \beta(A) = 0).$$

Le but de ce problème est d'établir un critère explicite déterminant dans quel cas l'une de ces relations est satisfaite entre μ et $\tilde{\mu}$.

— On définit les probabilités sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_{\infty})$: $\nu = \frac{1}{2}(\mu + \tilde{\mu})$, $\mu_n = \mu|_{\mathcal{B}_n}$, $\tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}_n}$,
 $\nu_n = \frac{1}{2}(\mu_n + \tilde{\mu}_n)$ où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu|_{\mathcal{B}_n}$ (resp^t $\tilde{\mu}|_{\mathcal{B}_n}$) est la restriction de μ (resp^t $\tilde{\mu}$) à \mathcal{B}_n .

— On définit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, les v.a. définies sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_{\infty})$ par :

$$Z_n = \frac{\tilde{Q}_n}{Q_n} \quad Y_n = \frac{2Q_n}{Q_n + \tilde{Q}_n} \quad \tilde{Y}_n = \frac{2\tilde{Q}_n}{Q_n + \tilde{Q}_n}$$

et $Z_{\infty} = \overline{\lim} Z_n \quad Y_{\infty} = \overline{\lim} Y_n \quad \tilde{Y}_{\infty} = \overline{\lim} \tilde{Y}_n.$

2. a. α . Si $A_j \in \mathcal{B}_R \quad \forall j = 1, \dots, n$, justifier la formule :

$$\tilde{\mu}_n \left(\bigcap_{j=1}^n \pi_j^{-1}(A_j) \right) = \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \tilde{Q}_n d\lambda_n$$

et exprimer la probabilité $\tilde{\mu}_n$ à l'aide de Z_n et μ_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. a. β . Démontrer que $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une μ -martingale $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ -adaptée et bornée dans $L^1(\mu)$. Que dire de la convergence μ -p.s. de la suite Z . (Utiliser TH 1) ? Que vaut $\mu(Z_{\infty} = +\infty)$?

2. a. γ . Exprimer la probabilité μ_n (resp^t $\tilde{\mu}_n$) à l'aide de Y_n (resp^t \tilde{Y}_n) et ν_n .

2. a. δ . Démontrer que $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (resp^t $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$) est une ν -martingale $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ -adaptée et en déduire la convergence de la suite Y (resp^t \tilde{Y}) ν -p.s. et dans $L^1(\nu)$. Établir alors que : $\tilde{Y}_{\infty} = Z_{\infty} \cdot Y_{\infty}$ ν -p.s.

2. b. α . Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \in \mathcal{B}_n$: $\mu(A) = \int_A Y_{\infty} d\nu$, puis en déduire que $\mu = Y_{\infty} \cdot \nu$. Écrire le résultat analogue pour $\tilde{\mu}$ sans le démontrer.

2. b. β . Vérifier que, $\forall A \in \mathcal{B}_{\infty}$:

$$(F 1) \quad \tilde{\mu}(A) = \int_A \frac{\tilde{Y}_{\infty}}{Y_{\infty}} \mathbf{1}_{(Y_{\infty} \neq 0)} d\mu + \int_A \tilde{Y}_{\infty} \mathbf{1}_{(Y_{\infty} = 0)} d\nu.$$

2. b. γ . En déduire la formule D.L. :

$$(D.L.) \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\infty}, \quad \tilde{\mu}(A) = \int_A Z_{\infty} d\mu + \tilde{\mu}[A \cap (Z_{\infty} = +\infty)].$$

2. b. δ . Démontrer brièvement la formule :

$$\int \varphi d\tilde{\mu} = \int \varphi Z_{\infty} d\mu + \int \mathbf{1}_{(Z_{\infty} = +\infty)} \varphi d\tilde{\mu}$$

pour toute v.a.n. φ définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_{\infty})$ positive ou bornée.

2. b. ϵ . Démontrer à l'aide de (D.L.) les équivalences suivantes :

$$(F 2) \quad \tilde{\mu} \ll \mu \Leftrightarrow E_{\mu} Z_{\infty} = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_{\infty} < +\infty) = 1$$

$$(F 3) \quad \tilde{\mu} \perp \mu \Leftrightarrow E_{\mu} Z_{\infty} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_{\infty} < +\infty) = 0$$

3. ● On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_n = \frac{Z_n}{Z_{n-1}}$ avec $Z_0 = 1$.

β_0 est la tribu triviale $\{\emptyset, \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}\}$. On se propose d'établir les équivalences suivantes :

$$(F4) \quad \tilde{\mu} \ll \mu \Leftrightarrow \tilde{\mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (1 - E_{\mu}^{\beta_{n-1}} \sqrt{\alpha_n}) < +\infty \right] = 1$$

$$(F5) \quad \tilde{\mu} \perp \mu \Leftrightarrow \tilde{\mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (1 - E_{\mu}^{\beta_{n-1}} \sqrt{\alpha_n}) = +\infty \right] = 1$$

3. a. α Démontrer que, $\tilde{\mu}$ -p.s. :

$$(Z_{\infty} < +\infty) = (0 < Z_{\infty} < +\infty) = (Z_n \rightarrow)$$

— Soit u la fonction réelle définie sur \mathbb{R} par :

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \text{signe}(x) & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

3. a. β Vérifier que $\tilde{\mu}$ -p.s. $(Z_{\infty} < \infty) = \left(\sum_{k=1}^n u(\text{Log } \alpha_k) \rightarrow \right)$.

3. b. α Démontrer que si ψ est une v.a.r. β_n -mesurable positive ou bornée définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on a :

$$E_{\tilde{\mu}}^{\beta_{n-1}}(\psi) = E_{\mu}^{\beta_{n-1}}(\psi \alpha_n) \quad \tilde{\mu}\text{-p.s.}$$

3. b. β En déduire $E_{\mu}^{\beta_{n-1}}(\alpha_n) \quad \tilde{\mu}\text{-p.s.}$

3. b. γ Soit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=1}^n u(\text{Log } \alpha_k)$.

Démontrer que $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une $\tilde{\mu}$ -sous-martingale $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ -adaptée. (On admettra l'inégalité : $xu(\text{Log } x) \geq x - 1 \quad \forall x > 0$.)

3. b. δ Établir (F4) et (F5) en utilisant la propriété TH2 et la double inégalité (que l'on ne demande pas de démontrer) : il existe A, B tels que $0 < A < B < +\infty$ et, $\forall x > 0$:

$$A(1 - \sqrt{x})^2 \leq xu(\text{Log } x) + xu^2(\text{Log } x) + 1 - x \leq B(1 - \sqrt{x})^2.$$

4. a. α Calculer explicitement α_n .

4. a. β Utiliser alors 3.b. α pour donner une expression analytique de $E_{\mu}^{\beta_{n-1}}(\sqrt{\alpha_n}) \quad \tilde{\mu}\text{-p.s.}$

4. b. α . En déduire alors les équivalences :

$$\mu \ll \tilde{\mu} \Leftrightarrow P \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{X}_{n-1}^2}{\sigma_n^2} < +\infty \right] = 1$$

$$\mu \perp \tilde{\mu} \Leftrightarrow P \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{X}_{n-1}^2}{\sigma_n^2} = +\infty \right] = 1$$

4. b. β . Démontrer que l'on a l'alternative :

$$\mu \sim \tilde{\mu} \quad \text{ou} \quad \mu \perp \tilde{\mu} \quad (\text{utiliser 1. a. } \zeta).$$

4. b. γ . En particulier, si $\tilde{\theta} = 0$, $\tilde{X} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Caractériser alors l'alternative en terme de la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

L'épreuve traite du problème de l'empilement de "paquets" dans des "boîtes" de capacité donnée c . Ce problème d'optimisation combinatoire est aussi connu sous le nom de *Bin Packing*. Il est en général *NP*-complet mais diverses heuristiques permettent de trouver des solutions approchées satisfaisantes pour de nombreuses applications.

DÉFINITIONS: Dans la suite du problème, N est un entier ≥ 1 (représentant le nombre de paquets), c est un réel strictement positif représentant la capacité d'une boîte. Une *entrée* est un couple $(X; c)$:

$$(X; c) = ((X_1, X_2, \dots, X_N); c)$$

où les X_i (représentant la taille des paquets) appartiennent à l'intervalle réel fermé $[0, c]$.

Une application f de l'intervalle entier $[1..N]$ dans un intervalle entier $[1..M]$ sera appelée un *empilement* de l'entrée $(X; c) = ((X_1, X_2, \dots, X_N); c)$ si sont satisfaites les deux conditions suivantes:

E1. La fonction f est surjective.

E2. Soit $\Omega_i = f^{-1}(\{i\}); \forall i \in [1..M]$:

$$\sum_{j \in \Omega_i} X_j \leq c.$$

La condition **E1** traduit le fait que toute boîte contient au moins un élément; la condition **E2** exprime que les éléments affectés à une boîte n'excèdent pas la capacité de boîte. L'entier M qui représente la cardinalité de l'image de f est appelé le *coût* de f et est noté $\|f\|$.

Etant donné une suite finie $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$, on définit son *poids* $\pi(X)$ comme:

$$\pi(X) = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Etant donné une entrée $E = (X; c)$, on définit le *coût optimal* associé $\omega(E)$ par:

$$\omega(E) = \min_f \{\|f\|\}$$

où f parcourt l'ensemble des empilements de E .

La notation $[u]$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à u .

Dans tout le problème, on notera $E_N = [0, 1]^N$.

PARTIE I. GÉNÉRALITÉS.

Q1. Soit λ un réel strictement positif. Montrer que pour tout N et tout $X \in [0, c]^N$:

$$\omega((\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, \lambda X_N); \lambda c) = \omega((X_1, X_2, \dots, X_N); c).$$

Montrer que pour tout N , et pour tout $X, Y \in [0, c]^N$:

$$\omega((X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, Y_2, \dots, Y_N); 2c) \leq \max \{ \omega((X_1, X_2, \dots, X_N); c), \omega((Y_1, Y_2, \dots, Y_N); c) \}.$$

Montrer sous la condition $X_i \leq Y_i$ pour tout $i \in [1..N]$ que:

$$\omega((X_1, X_2, \dots, X_N); c) \leq \omega((Y_1, Y_2, \dots, Y_N); c).$$

En supposant que $X_i + Y_i \leq c$, déterminer le signe de la quantité:

$$\omega((X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \dots, X_N + Y_N); c) - \omega((X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, Y_2, \dots, Y_N); c).$$

Q2. Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ avec $X_i \in [0, c]$. Calculer $\omega(X; c)$ lorsque $\pi(X) \leq c$ et montrer que si $\pi(X) > c$:

$$\frac{\pi(X)}{c} \leq \omega(X; c) < 2 \frac{\pi(X)}{c}.$$

Déterminer $\omega(X; 100)$ lorsque $X = (15, 30, 45, 50, 60, 75, 90)$.

Q3. Montrer que pour chaque N et c , et pour chaque entier M tel que $1 \leq M \leq N$, il existe une entrée $(X; c) = ((X_1, X_2, \dots, X_N); c)$ telle que:

$$2 \frac{\pi(X)}{c} - 1 = \omega(X; c) = M.$$

Q4. Il s'agit de montrer dans cette question qu'il n'est pas toujours avantageux de remplir complètement une boîte afin d'obtenir le placement optimal. On prendra ici $c = 1$. Construire pour tout $N \geq 6$ une suite $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ (avec $0 < X_i < 1$) telle que soient vérifiées les deux conditions **C1**, **C2** suivantes:

C1. $X_1 + X_2 + X_3 = 1$.

C2. $\omega((X_1, X_2, \dots, X_N); 1) < 1 + \omega(X_4, X_5, \dots, X_N)$.

Construire une suite vérifiant de plus la condition:

C3. Pour tout ensemble d'indices $I \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, $I \neq \{1, 2, 3\}$: on a:

$$\sum_{i \in I} X_i \neq 1.$$

PARTIE II. LE PLACEMENT SÉQUENTIEL.

L'algorithme de placement séquentiel ou *NextFit* est défini par la fonction Pascal suivante:

```

type vecteur = array[1..N] of real;
function NextFit(X : vecteur; c : real) : integer;
var boîte : vecteur;
    i, M : integer;
begin
  for i := 1 to N do boîte[i] := 0;
  M := 1;
  for i := 1 to N do
    begin
      if boîte[M] + X[i] <= c then boîte[M] := boîte[M] + X[i]
      else begin M := M + 1; boîte[M] := X[i] end;
      f[i] := M
    end;
  NextFit := M
end;
```

Pour cette procédure, N est une constante entière et f est définie à l'extérieur de la procédure comme:

var f : array[1..N] of integer;

Q5. Quels sont la valeur de f et le résultat retourné lorsque la fonction *NextFit* est appliquée à l'exemple de la question **Q2**?

On posera pour simplifier les notations $\gamma_{NF}(X; c) = \text{NextFit}(X, c)$ (c'est-à-dire le résultat de l'appel de $\text{NextFit}(X, c)$). Montrer que l'exécution de NextFit sur un tableau de nombres X avec $X_i \leq c$, met dans les $\gamma_{NF}(X; c)$ premiers éléments du tableau f une suite d'entiers qui constitue un empilement de X de coût $\gamma_{NF}(X; c)$. Montrer que pour tout N et X :

$$\omega(X; c) \leq \gamma_{NF}(X; c) \leq 2 \frac{\pi(X)}{c} + 1.$$

Q6. Montrer que pour tout N suffisamment grand, il existe une suite $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ avec $0 < X_i < 1$ telle que:

$$\frac{\gamma_{NF}(X; 1)}{\omega(X; 1)} > \frac{199}{100}.$$

Q7. On considère pour chaque $N \geq 1$ la suite particulière:

$$H^{<N>} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{N+1} \right).$$

Montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que:

$$\forall N \geq 1: \gamma_{NF}(H^{<N>}; 1) - \omega(H^{<N>}; 1) < \delta.$$

PARTIE III. LE PLACEMENT SÉQUENTIEL DÉCROISSANT.

Soit *TriDecroissant* une procédure de type:

procedure TriDecroissant(var X : vecteur);

qui trie les éléments de la suite X en ordre décroissant, de sorte qu'après exécution de la procédure, on ait:

$$X_1 \geq X_2 \geq X_3 \geq \dots \geq X_N.$$

La procédure *NextFitDecroissant* est définie par:

function NextFitDecroissant(X : vecteur; c : real) : integer;

begin

TriDecroissant(X);

NextFitDecroissant := NextFit(X, c)

end;

On note $\gamma_{NFD}(X; c)$ le résultat de *NextFitDecroissant* appliqué à l'entrée $(X; c)$. On fixe dans toute cette partie $c = 1$ et l'on se propose d'évaluer la valeur moyenne ou espérance de $\gamma_{NFD}(X; 1)$ lorsque les composantes X_i sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle réel $[0, 1]$.

RAPPELS: Soit g une fonction intégrable de E_N dans l'ensemble des réels. On appelle *espérance* de g et l'on note $E[g]$ l'intégrale:

$$E[g] = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g(X_1, X_2, \dots, X_N) dX_1 dX_2 \dots dX_N.$$

Soit $F \subset E_N$. On appelle *probabilité* de F , que l'on note $\text{Pr}[F]$, l'espérance de la fonction g_F définie par:

$$g_F(X_1, X_2, \dots, X_N) = \begin{cases} 1 & \text{si } (X_1, X_2, \dots, X_N) \in F \\ 0 & \text{si } (X_1, X_2, \dots, X_N) \notin F. \end{cases}$$

Q8. Calculer l'espérance de la fonction $\pi(X) = X_1 + X_2 + \dots + X_N$.

Q9. Pour k entier, $1 \leq k < N$ et y tel que $0 \leq y \leq 1$, calculer les fonctions $\psi_k(y)$ et $\phi_k(y)$ définies par:

$$\psi_k(y) = \Pr \left[\{X \in E_N \mid X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq y\} \right];$$

$$\phi_k(y) = \Pr \left[\{X \in E_N \mid X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq y \text{ et } X_1 + X_2 + \dots + X_k + X_{k+1} > 1\} \right].$$

Soit $\bar{\alpha}_N$ l'espérance du nombre d'éléments X_i placés dans la première boîte, c'est-à-dire l'espérance de la cardinalité de $\Omega_1 = f^{-1}(\{1\})$, lors de l'application de l'algorithme *NextFit*. Déterminer $\lim \bar{\alpha}_N$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

Soit, pour l'algorithme *NextFit*, $\bar{\beta}_N$ le remplissage moyen de la première boîte défini comme l'espérance de la quantité:

$$\sum_{j \in \Omega_1} X_j.$$

Calculer $\lim \bar{\beta}_N$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

Q10. Pour r entier ≥ 2 , on définit une partition de l'intervalle réel $[0, 1]$ en r intervalles \mathcal{I}_ℓ définis comme suit:

- Pour ℓ tel que $1 \leq \ell < r$: $\mathcal{I}_\ell =]\frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell}]$.

- L'intervalle \mathcal{I}_r est défini par $\mathcal{I}_r = [0, \frac{1}{r}]$.

Pour une suite $X \in E_N$ et un entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq r$, on définit la fonction $w_\ell(X)$ égale à la cardinalité de l'ensemble

$$\{i \mid 1 \leq i \leq N, X_i \in \mathcal{I}_\ell\}.$$

On pose:

$$V_r(X) = \sum_{\ell=1}^{r-1} \frac{w_\ell(X)}{\ell}; \quad W_r(X) = \sum_{\ell=1}^r \frac{w_\ell(X)}{\ell}.$$

Montrer que $\gamma_{NFD}(X; 1)$ vérifie l'encadrement:

$$V_r(X) - r \leq \gamma_{NFD}(X; 1) \leq W_r(X) + r.$$

Q11. Soit $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ un vecteur à coordonnées entières. Montrer que la probabilité $p_{\vec{n}}$ définie par:

$$p_{\vec{n}} = \Pr \left[\{X \in E_N \mid w_1(X) = n_1, w_2(X) = n_2, \dots, w_r(X) = n_r\} \right]$$

vaut lorsque $n_1 + n_2 + \dots + n_r = N$, et $n_i \geq 0$:

$$p_{\vec{n}} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \iota_1^{n_1} \iota_2^{n_2} \dots \iota_r^{n_r}$$

où ι_ℓ représente la longueur de l'intervalle \mathcal{I}_ℓ .

Q12. Calculer le polynôme Q en les indéterminées t_1, t_2, \dots, t_r défini par:

$$Q(t_1, t_2, \dots, t_r) = \sum_{\vec{n}} p_{\vec{n}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_r^{n_r},$$

où la sommation est étendue à tous les vecteurs $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ entiers tels que $n_i \geq 0$ et $n_1 + n_2 + \dots + n_r = N$. En déduire l'espérance des fonctions $V_r(X)$ et $W_r(X)$.

Q13. On définit $\tilde{\gamma}_{NFD}(N)$ comme l'espérance de $\gamma_{NFD}(X; 1)$ pour $X \in E_N$. En choisissant convenablement r en fonction de N , montrer l'existence de la limite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{NFD}(N)}{N}$$

et évaluer cette limite. On rappelle que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

PARTIE IV. COUT DU PLACEMENT OPTIMAL.

L'objet de cette partie est de déterminer l'espérance du coût optimal lorsque $N \rightarrow \infty$. On prendra ici $c = 1$.

Soit $r = 2s + 1$ un entier impair, avec $r \geq 3$. On définit une partition de l'intervalle $[0, 1]$ en r intervalles \mathcal{J}_ℓ de la manière suivante:

- Pour ℓ tel que $1 \leq \ell < r$, $\mathcal{J}_\ell = [\frac{\ell-1}{r}, \frac{\ell}{r}[$.
- L'intervalle \mathcal{J}_r est défini par: $\mathcal{J}_r = [\frac{r-1}{r}, 1]$.

On définit pour chaque ℓ et $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ l'ensemble:

$$\zeta_\ell(X) = \{i \mid 1 \leq i \leq N, X_i \in \mathcal{J}_\ell\}.$$

On note $Z_\ell(X)$ la cardinalité de l'ensemble $\zeta_\ell(X)$.

On considère une méthode de placement dite *méthode des placements complémentaires* et spécifiée comme suit:

- A. Chaque élément de $\zeta_r(X)$ est placé dans une boîte séparée.
- B. Pour j de 1 à s faire:
 - Soit $\lambda_j = \min(Z_j(X), Z_{r-j}(X))$.
 - Choisir deux sous-ensembles $\zeta'_j(X) \subseteq \zeta_j(X)$ et $\zeta'_{r-j}(X) \subseteq \zeta_{r-j}(X)$ de cardinalité λ_j . Chaque élément de $\zeta'_j(X)$ est apparié à un élément de $\zeta'_{r-j}(X)$ et la paire est placée dans une boîte séparée.
 - Les éléments restants de $\zeta_j(X) \setminus \zeta'_j(X) \cup \zeta_{r-j}(X) \setminus \zeta'_{r-j}(X)$ sont affectés chacun à une boîte différente.

Q14. Soit $\gamma_{PC}(X; 1)$ le coût de l'empilement produit par un algorithme obéissant au schéma de placement complémentaire. Déterminer $\gamma_{PC}(X; 1)$ lorsque $r = 5$ et

$$X = \left(\frac{15}{100}, \frac{30}{100}, \frac{45}{100}, \frac{50}{100}, \frac{60}{100}, \frac{75}{100}, \frac{90}{100} \right).$$

Etablir la majoration:

$$\gamma_{PC}(X; 1) \leq \frac{N}{2} + \frac{r-1}{2} \Delta_r(X) + \frac{N}{2r},$$

où la fonction $\Delta_r(X)$, appelée écart de distribution, est définie comme:

$$\Delta_r(X) = \max_{1 \leq \ell \leq r} \left\{ \frac{N}{r} - Z_\ell(X) \right\}.$$

Q15. Pour $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ un vecteur à coordonnées entières, déterminer les probabilités:

$$p_{\vec{n}} = \Pr \left[\{X \in E_N \mid Z_1(X) = n_1, Z_2(X) = n_2, \dots, Z_r(X) = n_r\} \right].$$

On définit pour tout b entier ≥ 0 , la fonction:

$$e_b(z) = \sum_{j=0}^b \frac{z^j}{j!},$$

et l'on pose pour b entier avec $0 \leq b < \frac{N}{r}$:

$$q_{N,b} = \Pr\left[\{X \in E_N \mid \forall \ell: Z_\ell(X) > b\}\right].$$

Exprimer $q_{N,b}$ en fonction du coefficient de z^N dans le développement de Taylor de:

$$(e^z - e_b(z))^r.$$

Q16. Soit Γ_ρ le cercle de rayon ρ centré à l'origine orienté positivement. Montrer que:

$$1 - q_{N,b} = \frac{N!}{2i\pi r^N} \int_{\Gamma_\rho} [e^{rz} - (e^z - e_b(z))^r] \frac{dz}{z^{N+1}}.$$

En prenant, $\rho = \frac{N}{r}$, établir la majoration:

$$1 - q_{N,b} \leq \frac{N!e^N}{N^N} \left[1 - \left(1 - e^{-N/r} e_b\left(\frac{N}{r}\right)\right)^r\right].$$

Q17. Montrer que pour u réel avec $u > b \geq 0$, on a:

$$e_b(u) \leq (b+1) \frac{u^b}{b!} \quad \text{et} \quad e_b(u) < e^u.$$

Montrer qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $K > 0$ telles que, lorsque $r = 2\lfloor \frac{N^{1/3}}{2} \rfloor + 1$ et $b = \lfloor N^{2/3} \rfloor - \lfloor N^{1/2} \rfloor$:

$$1 - q_{N,b} < K e^{-CN^{1/3}}.$$

On rappelle qu'on a par la formule de Stirling:

$$N! \sim N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N} \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty.$$

Q18. On définit $\bar{\omega}(N)$ comme égal à l'espérance de $\omega(X; 1)$ pour $X \in E_N$. Montrer l'existence de la limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\omega}(N)}{N},$$

et déterminer cette limite. Soit de même $\bar{\pi}(N)$ l'espérance de $\pi(X)$; évaluer

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\omega}(N)}{\bar{\pi}(N)} \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\gamma}_{NFD}(N)}{\bar{\omega}(N)}.$$

PARTIE V. NP-COMPLÉTUDE DU PROBLÈME GÉNÉRAL.

Dans cette partie, on part d'un problème classique dit de *recouvrement exact* ou *REC*. Une entrée de *REC* consiste en un couple $(t, \{S_j\}_{1 \leq j \leq J})$ où t est entier positif et $\{S_j\}_{1 \leq j \leq J}$ est une famille d'ensembles telle que chaque $S_j \subseteq [1..t]$. Le problème *REC* consiste à reconnaître s'il existe une sous famille $\{T_h\}_{1 \leq h \leq H}$ de la famille des $\{S_j\}$, $T_h = S_{j_h}$ avec $1 \leq j_1 < \dots < j_H \leq J$, telle que:

R1. Les T_h sont deux à deux disjoints.

R2. L'union des T_h est égale à l'ensemble $\{1, 2, \dots, t\}$.

On suppose dans la suite du problème que les entiers sont représentés de manière usuelle en binaire et que les ensembles et les suites sont donnés par la liste de leurs éléments. On admettra qu'avec ces conventions de représentation, le problème *REC* est NP-complet.

On rappelle que les opérations arithmétiques élémentaires sur les entiers (+, -, × et comparaisons) ont des coûts polynômiaux en la taille de leurs arguments. De même, pour les opérations élémentaires sur les listes (recherche d'un élément, concaténation) dont le coût est polynômial en la longueur *totale* des arguments.

Q19. Le problème de *Sac-à-Dos* (*KNAPSACK*) consiste, étant donné une suite d'entiers $\{a_i\}_{1 \leq i \leq t}$ et un entier b , à déterminer s'il existe un sous-ensemble des $\{a_i\}$ dont la somme soit exactement égale à b .

Construire une réduction calculable en temps polynomial (en fonction de la longueur de l'argument) du problème *REC* au problème *KNAPSACK*. Pour cela, on pourra prendre d supérieur au nombre J d'ensembles S_j de l'entrée de *REC*, et "coder" les ensembles S_j par des entiers en base d formés des chiffres 0 et 1.

Q20. Le problème dit de *partition* (*PART*) consiste, étant donné une suite $\{b_i\}_{1 \leq i \leq s}$ de nombres entiers à déterminer s'il existe un sous-ensemble $I \subset [1..s]$ tel que :

$$\sum_{h \in I} b_h = \sum_{h \notin I} b_h.$$

Construire une réduction polynomiale de *KNAPSACK* à *PART*.

Q21. On considère le problème d'empilement de paquets dans lequel les paquets sont à valeur entière et la capacité de boîte est un entier ≥ 1 . Montrer que le problème de déterminer si une entrée $(X; c)$ est telle que :

$$\omega(X; c) = 2$$

est *NP-complet*.

Q22. Quelles conclusions algorithmiques générales sur l'empilement de paquets peut-on tirer de l'ensemble du problème lorsque la capacité de boîte c est égale à 1?

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

Le sujet du problème était l'obtention d'"estimations a priori" de la solution discrète donnée par un schéma aux différences finies pour un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). On pouvait en déduire la stabilité de ce schéma. Le système était hyperbolique semi-linéaire, c'est-à-dire constitué d'équations de transport

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i, \quad i \in \{1,2\},$$

couplées par l'intermédiaire du second membre :

$$f_1 = f_2 = u_1 u_2.$$

Les vitesses de propagation c_1 et c_2 étaient distinctes pour éviter de retomber sur un système d'équations différentielles trop élémentaire.

L'existence d'une solution $(u_1(x,t), u_2(x,t))$ pour le problème de Cauchy est une question d'analyse fonctionnelle, et découle d'estimations a priori intégrales. Sa transposition au cas d'une solution discrète est une question intéressante d'analyse numérique, et faisait l'objet du problème. Celui-ci consistait donc à établir les versions discrètes de ces estimations, sans aborder la question de la convergence. Il ne supposait pas de connaissance particulière, et les mathématiques utilisées ne dépassaient pas le niveau d'un DEUG A. Il fallait cependant avoir l'habitude des notions usuelles de l'analyse numérique des EDP pour avancer rapidement dans le problème. On ne saurait trop recommander à ce sujet aux candidats, de vraiment préparer l'épreuve de mathématiques appliquées ; on ne s'improvise pas numéricien le temps d'une épreuve écrite, même lorsqu'elle ne fait appel qu'à des mathématiques très élémentaires. Le savoir-faire, le "tour de main" jouent un plus grand rôle que la théorie dans les applications.

La première partie permettait de faire connaissance avec une seule équation de transport. Ce n'est rien d'autre qu'une équation différentielle ordinaire, et il est étonnant qu'elle ait pu dérouter certains candidats.

Une partie importante de l'analyse numérique concerne le traitement des EDP, et chaque candidat devrait connaître une liste des équations simples de la physique. Par exemple, l'équation des ondes en une dimension d'espace se découple en deux équations de transport. Cependant, la première question était indépendante du reste du problème et n'avait donc pas de conséquence pour les candidats. La question Q 3 permettait de vérifier le consistence du schéma proposée avec la propagation à vitesse finie. Les deux suivantes étaient classiques, mais certains candidats ont cru pouvoir utiliser deux fois la formule des accroissements finis plutôt que celle de Taylor à l'ordre deux. Cette première partie, correctement traitée, permettait d'avoir la moyenne dans cette épreuve.

La suivante était purement technique et préparait à l'étude de la corrélation entre solutions d'équations de transport à vitesses distinctes. Lors des changements d'ordre de sommation, il fallait se justifier en rappelant que les séries étaient soit à termes positifs, soit absolument convergentes selon l'étape. Cela a été rarement fait. On résolvait Q.7.8 en développant $(1-P(z))^{-1}$ en série de Laurent dans une couronne contenant le point $z = 1$ et limitée par les racines de $P(z)-1$. Encore fallait-il vérifier l'ordre entre 1 et les modules de ces racines.

La troisième partie était sans doute la plus facile, et la question Q.12 permettait de vérifier si le candidat avait compris la démarche.

La dernière partie abordait enfin le système couplé. La question Q.13 était classique. Mais Q.15.β ne pouvait être résolue qu'en supposant de plus que v_0 , ou w_0 , soit borné, afin que X_0 soit inférieur à $\frac{1}{4} |c_2 - c_1|$ pour Δx suffisamment petit. Finalement, Q.16 fournissait l'estimation a priori cherchée : dans $L^1(\mathbb{R})$, les normes de $v^{\Delta x}$ et $w^{\Delta x}$ sont majorées par une constante indépendante de $\Delta x \in]0, \delta[$.

En conclusion, bien que l'épreuve de Mathématiques Appliquées soit conçue pour rééquilibrer le concours au profit des techniques plutôt que de la théorie, il semble qu'une grande part des candidats ne soit pas en mesure d'en tirer parti. On est pourtant en droit d'attendre des futurs Professeurs des Lycées une bonne maîtrise.

Répartition des notes

$0 \leq N \leq 4$	132 copies
$5 \leq N \leq 9$	109 copies
$10 \leq N \leq 14$	57 copies
$15 \leq N \leq 19$	29 copies
$20 \leq N \leq 24$	15 copies
$25 \leq N \leq 29$	5 copies
$30 \leq N \leq 34$	2 copies
$35 \leq N \leq 40$	

349 copies

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE .

Présentation du sujet .

Le but du problème de Mécanique générale était l'initiation aux séries de Lie, très utiles en théorie des perturbations .

PREMIERE PARTIE .

Si l'on recherche les intégrales premières du système différentiel (1) de m équations différentielles du premier ordre, mis sous forme normale, l'équation aux dérivées partielles de Jacobi introduit un opérateur \mathfrak{X} qui est une dérivation ; c'est pourquoi $\mathfrak{X}^k(FG)$ est donné par la formule de Leibnitz .

L'opérateur \mathfrak{X} , dans le problème du mouvement du solide de S. Kovalevskaya, appliqué à des fonctions convenablement choisies, permet de retrouver par des calculs, le fait que le module de \vec{z}_1 reste constant, l'intégrale première de l'énergie et l'intégrale du moment cinétique par rapport à l'axe Oz_1 . De même, on met aisément en évidence l'intégrale propre au cas de S. Kovalevskaya ; on a en effet :

$$\mathfrak{X} ((p^2 + q^2 - \omega^2 \alpha) + (2pq - \omega^2 \beta)^2) = 0 .$$

DEUXIEME PARTIE .

On démontre d'abord que l'espace des séries formelles entières en t , intégrales premières formelles de (1) est identique à l'ensemble des séries de Lie $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}}(F)$, F élément de l'anneau \mathcal{A} . Si la fonction F est, de plus, régulière,

la somme de sa série de Lie est effectivement intégrale première de (1).

Les m fonctions coordonnées étant supposées régulières, les séries fondamentales de Lie gardent le long de la trajectoire \mathcal{C} de (1) correspondant aux conditions initiales $x_i(0) = x_{i0}$, les valeurs x_{i0} qu'elles prennent à $t = 0$; ceci établit la première formule de 1° d. .

Le système (1) étant autonome, on peut (en effectuant une translation bien choisie sur t) faire décrire la trajectoire \mathcal{C} à l'envers, en partant à l'instant initial du point $(x_i(t))$ et en arrivant à l'instant $-t$ au point (x_{i0}) , d'où la deuxième formule de 1° d. .

Ces deux formules montrent que les sommes des séries de Lie établissent une correspondance biunivoque entre les x_{i0} définies arbitrairement dans une boule ouverte de R^m et les $x_i(t)$. Techniquement, ces formules montrent que les séries de Lie s'inversent simplement en changeant t en $-t$ et en échangeant les $x_i(t)$ et les x_{i0} .

Dans l'application du 2°, on retrouve à l'aide des séries de Lie la solution bien connue de (5) correspondant aux conditions initiales $x_i(0) = x_{i0}$.

L'application du 3° montre comment les séries de Lie permettent d'obtenir une solution approchée d'un problème. Dans 3° d., la série de Lie $\mathcal{L}(y)$ inversée, met en évidence la déviation vers l'Est :

$$y(t) = (\omega g \cos \lambda) \frac{t^3}{3}.$$

TROISIEME PARTIE.

La troisième partie est presque une question de cours sur les crochets de Poisson et l'effet d'une transformation canonique sur un système différentiel canonique hamiltonien. Elle contient des rappels utiles dans la suite du problème. La quatrième question est nécessaire pour aborder la quatrième partie. Si l'on écrit l'identité de Jacobi à l'aide de l'opé-

rateur \wedge , on obtient, pour $k = 1$, la formule :

$$\wedge^k[F,G] = \sum_{j=0}^{j=k} c_k^j [\wedge^j(F), \wedge^{k-j}(G)] ,$$

formule que l'on démontre ensuite par récurrence pour k entier naturel quelconque .

QUATRIEME PARTIE .

En posant $s_{n+1} = \varkappa$, $r_{n+1} = -W$ et en définissant la fonction \mathcal{W} par

$\mathcal{W}(r_1, \dots, r_{n+1}, s_1, \dots, s_{n+1}) = W(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_{n+1}) + r_{n+1}$,
 $\Delta_W(F)$ apparaît comme le crochet de Poisson à $2n+2$ variables des fonctions \mathcal{W} et F . Donc Δ_W et \wedge ont les mêmes propriétés .

L'opérateur Δ_W et ses puissances entières permettent de définir l'opérateur de Lie E_W . Les séries formelles $E_W(F)$ ont les mêmes propriétés que les séries de Lie de la deuxième partie . De plus, on démontre formellement que :

$$E_W[F, G] = [E_W(F), E_W(G)] .$$

On en déduit que le changement de variables d'équations (10) définit une transformation canonique, les fonctions coordonnées étant supposées régulières . Cette transformation canonique est celle qui fait passer des valeurs des p_i, q_i à $\tau = 0$ aux valeurs des p_i, q_i à τ quelconque le long de la trajectoire du système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien W , trajectoire correspondant aux conditions initiales $p_i(0) = r_i$, $q_i(0) = s_i$.

Si W est l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique à n dimensions et si τ est le temps t , on peut appliquer l'opérateur E_W aux $2n$ fonctions coordonnées et retrouver ainsi les combinaisons linéaires des développements en séries des $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ qui constituent la solution du problème de l'oscillateur harmonique .

La deuxième application conduit à la théorie des perturbations de Hori utilisée en Mécanique céleste. La fonction W qui engendre la transformation canonique, est construite pas à pas sous forme d'un développement en série entière du petit paramètre ε , de façon à "éliminer" de l'hamiltonien toutes les variables d'une même série (lorsque cela est possible), ce qui revient à intégrer le système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien H . On rejoint, sous forme approchée, la théorie des angles-actions. La supériorité de la méthode de Hori sur les autres méthodes de perturbations est de fournir directement, sans avoir de séries à inverser, les p_i, q_i en fonctions du temps et de constantes.

On démontre la formule de récurrence :

$$H_1^{(k)} = H_{1+1}^{(k-1)} + \sum_{j=0}^1 C_1^j [W_{j+1}, H_{1-j}^{(k-1)}], \quad j, k, l \in \mathbb{N}.$$

On trouve le schéma analogue au triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccc} H_0 = H_0^{(0)} & & & & \\ \downarrow & & & & \\ H_1 & \longrightarrow & H_0^{(1)} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H_2 & \longrightarrow & H_1^{(1)} & \longrightarrow & H_0^{(2)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

L'hamiltonien H de 3° c. engendre un système canonique équivalent à l'équation différentielle du second ordre de Duffing : $\ddot{u} + u + \varepsilon (A u^3 - B \cos \omega t) = 0$.

On trouve :

$$H_0^{(0)} = r_1 + r_2$$

$$[H_0, W_1] = \left(\frac{dW_1}{dt} \right)_0$$

$$H_0^{(1)} = \frac{3}{8} A r_1^2$$

$$W_1(r_1, s_1, s_2) = \frac{A}{8} r_1^2 \left(\frac{\sin(4s_1)}{4} - 2 \sin(2s_1) \right) + B \sqrt{\frac{r_1}{2}} \left(\frac{\cos(s_1 + s_2)}{1 + \omega} + \frac{\cos(s_1 - s_2)}{1 - \omega} \right)$$

Au k -ème ordre en ε , on cherchera à déterminer la fonction $H_o^{(k)} + \left(\frac{dW_k}{dt}\right)_o$ en l'égalant à une fonction déterminée aux ordres précédents. On essaiera de trouver des solutions particulières de $H_o^{(k)}$ et $\left(\frac{dW_k}{dt}\right)_o$ en procédant comme au premier ordre en ε .

Bibliographie.

- A. DEPRIT, Canonical Transformations depending on a small Parameter - Celestial Mechanics 1,12 (1969).
- A.J. DRAGT and J.M.FINN, Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps - Journal of Mathematical Physics, vol. 17, n°12 (1976).
- E. LEIMANIS, The general Problem of the Motion of coupled rigid Bodies about a fixed Point (Springer, New York, 1965).
- Y. THIRY, Les fondements de la Mécanique céleste, Gordon and Breach, 1970.

Commentaires.

Malgré un énoncé allongé par des définitions et des rappels, le problème n'a pas rebuté les candidats. Une seule copie blanche sur cent-douze a été relevée. Tous les candidats, sauf deux, ont traité la première partie; neuf et vingt-sept respectivement n'ont pas abordé les deuxième et troisième parties. Vingt-huit candidats ont abordé la quatrième partie. Il y avait huit très bonnes copies dont une excellente.

Il est toutefois regrettable que bien des candidats, qui ont pourtant choisi l'option Mécanique générale, sautent systématiquement les applications à la Mécanique traditionnelle. Par exemple, vingt-cinq candidats n'ont pas attaqué le problème de S. Kovalevskaya (I, 2°); trente-neuf uniquement en ont réussi la mise en équations; parmi eux, vingt-six ont trouvé les trois intégrales premières classiques et seize l'intégrale propre à ce cas particulier. Il en va de même de l'application à la Mécanique terrestre de précision dans laquelle la

mise en équations n'est faite correctement que par seize candidats. Beaucoup ne connaissent pas l'accélération complémentaire et certains ignorent que le poids contient la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre.

Répartition des notes.

Note	Nombre de copies
0 à 4	15
5 à 9	29
10 à 14	24
15 à 19	24
20 à 24	12
25 à 29	2
30 à 34	2
35 à 39	3
40	1
	<hr/>
	112

Analyse du sujet.

Le thème de ce problème était la comparaison des lois de deux processus gaussiens particuliers avec critères explicites d'équivalence ou d'étrangeté de ces lois. L'étude s'appuyait sur des travaux généraux de comparaison de mesures de N. SHIRAYEV. Les points fondamentaux du programme apparaissaient successivement : variables aléatoires gaussiennes dans \mathbb{R}^n (très souvent mal connues des candidats), convergence p.s., théorèmes de convergence monotone et dominée dans la première partie, mesurabilité, loi et théorème de transfert, densité et enfin espérance conditionnelle dans la deuxième partie ; cette dernière notion était utilisée plus en profondeur dans la troisième partie. La quatrième partie utilisait la notion de loi et densité conditionnelle et donnait lieu à des calculs explicites classiques sur les densités gaussiennes.

Corrigé résumé.

Souvent le corrigé des questions sera suivi d'un commentaire noté (com).

1.a.α) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, \underline{X}_n est une fonction linéaire de \underline{U}_n . \underline{U}_n ayant toutes ses composantes gaussiennes et indépendantes, \underline{U}_n est gaussienne et donc aussi \underline{X}_n . σ_n étant non nul pour tout n , \underline{U}_n admet une densité dans \mathbb{R}^n par ailleurs la transformation linéaire donnant \underline{X}_n en fonction de \underline{U}_n est trivialement inversible et donc \underline{X}_n admet une densité \underline{Q}_n dont le rapport est \mathbb{R}^n tout entier. Il en est de même pour $\tilde{\underline{X}}_n$.

(com) beaucoup de candidats ont une mauvaise connaissance des v.a. gaussiennes. Toute très répandue : " \underline{X}_n a ses composantes gaussiennes donc \underline{X}_n est une v.a. gaussienne" !

1.a.β) \underline{V}_n étant un transformé linéaire de \underline{X}_{n-1} , est gaussien. On a $EV_n = \frac{1}{\sigma_n} EX_{n-1} = 0$ (se voit par itération, les \underline{U}_n étant centrées) et donc $EV_n = 0$.

(com) $V_1 = 0$ et par conséquent \underline{V}_n n'admet pas de densité, contrairement à ce que beaucoup de candidats affirment.

1.a.γ) $\phi = R \subset \underline{V}_n$ est encore gaussien centré ; sa matrice de covariance Λ_ϕ est donnée par : $\Lambda_\phi = R \subset \Lambda(RC)^* = RDR$ soit $(\Lambda_\phi)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \text{ et } D_{ii} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(com) assez bien traité.

1.a.δ) C étant orthogonale et $D^{\frac{1}{2}}R$ étant un projecteur orthogonal :

$$\|V_{-n}\|^2 = \|C V_{-n}\|^2 \geq \|D^{\frac{1}{2}}R C V_{-n}\|^2 = \|D^{\frac{1}{2}}\phi\|^2 \text{ d'où } \|V_{-n}\|^2 \geq \langle D\phi, \phi \rangle.$$

Alors, les ϕ_i étant indépendantes de loi $N(0,1)$, si $D_{ii} > 0$:

$$E e^{-\|V_{-n}\|^2} \leq E e^{-\langle D\phi, \phi \rangle} = \prod_{i:D_{ii}>0} (E e^{-D_{ii}\phi_i^2}) = \prod_{i:D_{ii}>0} \frac{1}{\sqrt{1+2D_{ii}}}$$

(com) on voit souvent des calculs d'une page pour démontrer la première inégalité !

1.a.ε) V_{-n} étant centré :

$$E\|V_{-n}\|^2 = \text{tr } \Lambda = \text{tr } D = \sum_{i:D_{ii}>0} D_{ii} \leq \prod_{i:D_{ii}>0} (1+2D_{ii})$$

d'où
$$E\|V_{-n}\|^2 \leq \frac{1}{\left[E e^{-\|V_{-n}\|^2} \right]^2}$$

(com) assez bien traité.

1.a.ζ) Puisque $\|V_{-n}\|^2 = \sum_{j=1}^n V_j^2$ et que $E e^{-V_1^2} = 1$, il résulte du théorème de convergence monotone pour les suites croissantes et décroissantes que :

$$(1.a.\zeta.1) \quad E\left(\sum_{j=1}^{\infty} V_j^2\right) \leq \frac{1}{\left[E e^{-\sum_{j=1}^{\infty} V_j^2} \right]^2}$$

Alors, si $\sum_{j=1}^{\infty} V_j^2 < \infty$ P-p.a., le membre de droite est fini et

$$E\left(\sum_{j=1}^{\infty} V_j^2\right) < \infty.$$

La réciproque est trivialement vraie.

Pour la seconde équivalence, si $\sum_{n=1}^{\infty} E V_n^2 = +\infty$, il résulte de

(1.a.ζ.1) que $E e^{-\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2} = 0$ et donc, $P\left[\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2 = +\infty\right] = 1$; la réciproque est triviale.

(com) ce passage à la limite dans l'inégalité 1.a.ε) aurait permis la clarté et la concision des solutions ; même les parties triviales (résultats élémentaires d'intégration) sont souvent l'objet d'erreurs grossières.

1.b.α) $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}$ (prendre $\bigcap_{j=1}^n \Pi_j^{-1}(A_j) = \bigcap_{j=1}^{n+1} \Pi_j^{-1}(A_j)$ avec $A_{n+1} = \mathbb{R}$).

Il en résulte que $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1}$. De plus $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_\infty$, d'où $\mathfrak{B}_{n+1} \subset \mathfrak{B}_\infty$.

1.b.β) $\mathcal{C}_\infty = \bigcup_n \mathcal{C}_n$ étant un système générateur de \mathfrak{B}_∞ , il suffit de montrer que $\forall n, \forall A \in \mathcal{C}_n, X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Or si $A = \bigcap_{j=1}^n \Pi_j^{-1}(A_j)$, on a :

$$X^{-1}(A) = \bigcap_{j=1}^n X^{-1}(\Pi_j^{-1}(A_j)) = \bigcap_{j=1}^n (\Pi_j \circ X)^{-1}(A_j)$$

d'où $X^{-1}(A) = \bigcap_{j=1}^n X_j^{-1}(A_j) \in \mathcal{A}$ car $X_j, j=1, \dots, n$, est une v.a.r..

(com) cette question a souvent été mal abordée ! Elle permettait pourtant de se familiariser avec les v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^{N^*} avant d'étudier leur loi.

1.b.γ) $Q_n = \underline{Q}_n \circ (\Pi_1, \dots, \Pi_n) \cdot (\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ étant $(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n})$ -mesurable, $(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n})$ est la tribu borélienne de \mathbb{R}^n , Q_n est \mathfrak{B}_n -mesurable comme composée d'applications mesurables.

(com) L'énoncé faisait nettement la distinction entre Q_n définie sur \mathbb{R}^{N^*} et \underline{Q}_n sur \mathbb{R}^n ; on trouve pourtant beaucoup de confusions entre ces tribus. La factorisation de Q_n est peu souvent vue.

2.a.α) \mathcal{C}_n est un système générateur de \mathfrak{B}_n stable par intersection finie et engendre \mathfrak{B}_n ; la probabilité $\tilde{\mu}_n$ est alors entièrement déterminée par ses valeurs prises sur \mathcal{C}_n . Or, d'après 1.b.β), puisque $\tilde{\mu}_n = P_{\tilde{X}|\mathfrak{B}_n}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_n \left(\bigcap_{j=1}^n \Pi_j^{-1}(A_j) \right) &= P \left[\bigcap_{j=1}^n (\tilde{X}_j^{-1}(A_j)) \right] \\ &= \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \tilde{Q}_n \, dZ_n \end{aligned}$$

$$\text{car } \underline{Q}_n > 0 \text{ partout} = \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \frac{\tilde{Q}_n}{\underline{Q}_n} \underline{Q}_n \, dZ_n$$

$$= \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \frac{\tilde{Q}_n}{\underline{Q}_n} \, dP_{\tilde{X}_n}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \frac{\tilde{Q}_n \circ (\Pi_1, \dots, \Pi_n)}{Q_n \circ (\Pi_1, \dots, \Pi_n)} d P_X \\
&= \int_{\bigcap_{j=1}^n \Pi_j^{-1}(A_j)} Z_n d \mu_n.
\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $\underline{X}_n = X \circ (\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ et le théorème de transfert).
Il en résulte que $\tilde{\mu}_n = Z_n \cdot \mu_n$.

(com) si deux probabilités coïncident sur un système générateur stable par intersection finie, elles sont égales ; cette dernière propriété est souvent oubliée. Quant au théorème de transfert, peut penser à l'utiliser. Cela provient sans doute d'un manque de prise de conscience de la nature des différents objets manipulés (en particulier sur quels espaces sont définis les v.a. et les mesures). Cette question a souvent été très mal traitée.

2.a.β) Z_n est \mathcal{B}_n -mesurable puisque Q_n et \tilde{Q}_n le sont. Alors, puisque $Z_n \geq 0$: $E_{\mu} Z_n = \int Z_n d \mu_n = \tilde{\mu}_n(\mathbb{R}^{N^*}) = 1$. Donc Z_n est μ -intégrable et $\sup E_{\mu} Z_n < +\infty$. De plus, $\forall A \in \mathcal{B}_n$, $\int_A Z_{n+1} d\mu = \int_A Z_{n+1} d\mu_{n+1} = \tilde{\mu}_{n+1}(A)$ et $\int_A Z_n d\mu = \int_A d\mu_n = \tilde{\mu}_n(A)$.

Mais $\mu_n = \mu_{n+1}|_{\mathcal{B}_n} = \mu|_{\mathcal{B}_n}$; il vient : $\int_A Z_{n+1} d\mu = \int_A Z_n d\mu$, $\forall A \in \mathcal{B}_n$ et, \mathcal{B}_n étant \mathcal{B}_n -mesurable : $E_{\mu} Z_{n+1} = Z_n$. $Z = (Z_n)$ est alors une martingale positive bornée dans $L^1(\mu)$. Elle converge dans \mathbb{R} μ -p.s. (TH_1) vers Z_{∞} . Alors : $\mu(Z_{\infty} = +\infty) = 0$.

(com) cette question ne demandait que la connaissance de la définition de l'espérance conditionnelle, ce qu'un bon nombre de candidats n'ont pas l'air d'avoir ; assez bien traitée par ceux qui ont su aller plus avant dans le problème.

2.a.γ) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \frac{2}{1+Z_n}$ et $\tilde{Y}_n = Z_n Y_n$. Alors, d'après 2.a.α) : $\nu_n = \frac{1}{2}(1+Z_n) \cdot \mu_n = \frac{1}{Y_n} \cdot \mu_n$; d'où, Y_n étant strictement positif, par le théorème d'intégration par rapport à une mesure à densité :

$$Y_n \cdot \nu_n = Y_n \cdot \left[\frac{1}{Y_n} \cdot \mu_n \right] = \mu_n.$$

Ensuite : $\tilde{\mu}_n = Z_n \cdot \mu_n = Z_n \cdot (Y_n \cdot \nu_n) = (Z_n Y_n) \cdot \nu_n = \tilde{Y}_n \cdot \nu_n$.

(com) cette question a souvent été traitée très formellement par un calcul

"algébrique" entre fonctions et mesures non justifié, et souvent non justifiable...!

2.a.δ) Y_n est \mathcal{B}_n -mesurable puisque Z_n l'est. De plus $\forall A \in \mathcal{B}_n$, il résulte de 2.a.γ) que : $\int_A Y_{n+1} dv = \int_A Y_{n+1} dv_{n+1} = \mu_{n+1}(A)$ et de même $\int_A Y_n dv = \mu_n(A)$.

Puisque $\mu_{n+1}|_{\mathcal{B}_n} = \mu_n$, il en résulte que : $E_v^n Y_{n+1} = E_v^n Y_n$, et que $\sup_n E_v^n Y_n = 1$.

Y est donc une martingale positive bornée dans $L^1(v)$. La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers Y_∞ v-p.s. (TH₁). La convergence a lieu aussi donc $L^1(v)$ par convergence dominée puisque, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq Y_n \leq 2$.

Il en est de même pour la suite (Z_n) . Mais, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{Y}_n = Y_n \cdot Z_n$. Il en résulte que, v-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$, la suite (Z_n) converge vers Z_∞ et que $\tilde{Y}_\infty = Y_\infty Z_\infty$ v-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$.

(com) : pour l'espérance conditionnelle, même remarque qu'en 2.a.β) ; par ailleurs le théorème de convergence dominée semble loin d'être acquis par bon nombre de candidats. Contrairement à ce qui était demandé, on a seulement $\tilde{Y}_\infty = Y_\infty Z_\infty$ v-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$ et non sur tout l'espace (sur $(Y_\infty = 0)$, Z_∞ est infini v-p.s.) ; il a été bien sûr tenu compte de cette erreur d'énoncé lors de la correction.

2.b.α) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq n_0$. $\forall A \in \mathcal{B}_{n_0}$ ($\subset \mathcal{B}_n$), on a :

$$\mu(A) = \mu_n(A) = \int_A Y_n dv_n = \int_A Y_n dv.$$

La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant dans $L^1(v)$ vers Y_∞ , il vient :

$$(*) \quad \mu(A) = \int_A Y_\infty dv \quad \forall A \in \mathcal{B}_{n_0}, \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}^*.$$

(*) est encore vraie $\forall A \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{B}_n$, système générateur de \mathcal{B}_∞ stable par intersection finie et donc $\mu = Y_\infty \cdot v$ (de même $\tilde{\mu} = \tilde{Y}_\infty \cdot v$).

2.b.β) On a, $\forall A \in \mathcal{B}_\infty$:

$$\tilde{\mu}(A) = \int_A \tilde{Y}_\infty dv = \int_A \frac{\tilde{Y}_\infty}{Y_\infty} Y_\infty \mathbb{1}_{(Y_\infty \neq 0)} dv + \int_A \tilde{Y}_\infty \mathbb{1}_{(Y_\infty = 0)} dv.$$

F_1 résulte alors de ce que : $\mu = Y_\infty \cdot v$.

2.b.γ) On a vu en 2.a.δ) que $\tilde{Y}_\infty = Z_\infty Y_\infty$ v-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$; mais $\mu \ll v$;

on a alors $Z_\infty = \frac{\tilde{Y}_\infty}{Y_\infty}$ μ-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$. Comme de plus

$\mu(Y_\infty = 0) = \int_{(Y_\infty = 0)} Y_\infty dv = 0$, il vient, $\forall A \in \mathcal{B}_\infty$:

$$\int_A \frac{\tilde{Y}_\infty}{Y_\infty} \mathbb{1}_{(Y \neq 0)} d\mu = \int_A Z_\infty d\mu.$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{2}{Y_n} - 1$. La suite (Z_n) est alors convergente dans $\bar{\mathbb{R}}$ v-p.s. et on a v-p.s. $(Y_\infty = 0) = (Z_\infty = +\infty)$. D.L. résulte alors de F_1 .

2.b.δ) La formule demandée est D.L. si $\phi = \mathbb{1}_A$ ($A \in \mathcal{B}_\infty$). Par les procédés classiques d'intégration (fonctions étagées positives, limites croissantes de telles fonctions, décomposition en parties positive et négative), on obtient directement la formule pour toute v.a. ϕ \mathcal{B}_∞ -mesurable positive ou bornée.

2.b.ε) Puisque $\tilde{\mu}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}) = 1$, il résulte de D.L. les équivalences :

$$E_\mu Z_\infty = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty = \infty) = 0 \quad \text{et} \quad E_\mu Z_\infty = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty = \infty) = 1.$$

De D.L., il vient aussi que $\tilde{\mu}(Z_\infty = \infty) = 0 \Rightarrow \forall A \in \mathcal{B}_\infty \quad \tilde{\mu}(A) = \int_A Z_\infty d\mu$ et donc $\tilde{\mu}(Z_\infty = \infty) = 0 \Rightarrow \tilde{\mu} \ll \mu$.

Inversement, si $\tilde{\mu} \ll \mu$, puisque d'après 2.a.β) $\mu(Z_\infty = \infty) = 0$, on a $\tilde{\mu}(Z_\infty = 0) = 0$ et donc :

$$\tilde{\mu} \ll \mu \Rightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty < \infty) = 1$$

En réunissant ces trois résultats, on obtient F_2 .

□ Si $\mu \perp \tilde{\mu}$, $\exists B \in \mathcal{B}_\infty$ tel que $\mu(B) = 0$ et $\tilde{\mu}(B) = 1$ et donc, d'après D.L. : $1 = \tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(B \cap (Z_\infty = \infty))$ d'où $\mu \perp \tilde{\mu} \Rightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty = \infty) = 1$.

Inversement, si $\tilde{\mu}(Z_\infty = \infty) = 1$, puisque $\mu(Z_\infty = \infty) = 0$, on a $\mu \perp \tilde{\mu}$; F_3 est établie.

(com) cette question a eu beaucoup de succès.

3.a.α) Z_∞ étant \mathcal{B}_∞ -mesurable, il résulte de D.L. que : $\tilde{\mu}(Z_\infty = 0) = 0$, d'où : $\tilde{\mu}$ -p.s. $(Z_\infty < \infty) = (0 < Z_\infty < \infty)$. Puisque $\tilde{\mu} \ll \nu$, il résulte de 2.b.γ que (Z_n) converge dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ $\tilde{\mu}$ -p.s. et donc $(Z_\infty < \infty) = (Z_n \rightarrow) \tilde{\mu}$ -p.s..

(com) Cette question a été peu traitée.

3.a.β) Si $(a_n) \subset (\mathbb{R}^*)^+$, les suites de terme général $\sum_{k=1}^n \text{Log } a_k$ et $\sum_{k=1}^n \text{Log } \alpha_k$ convergent ou divergent dans \mathbb{R} en même temps. Puisque $Z_n = e^{\sum_{k=1}^n \text{Log } \alpha_k}$, il résulte de 3.a.α) que :

$$\tilde{\mu}\text{-p.s.} \quad (Z_\infty < \infty) = \left(\sum_{k=1}^n \text{Log } \alpha_k \rightarrow \right) = \left(\sum_{k=1}^n u(\text{Log } \alpha_k) \rightarrow \right)$$

(com) question très peu souvent traitée.

3.b.α) $\forall A \in \mathcal{B}_{n-1}$, $\forall \psi \mathcal{B}_n$ -mesurable positive ou bornée, on a, utilisant 2.a.α) puis le fait que Z_{n-1} est strictement positif et \mathcal{B}_{n-1} -mesurable :

$$\begin{aligned} \int_A \psi \, d\tilde{\mu} &= \int_A \psi \, d\tilde{\mu}_n = \int_A \psi Z_n \, d\mu_n = \int_A \psi \frac{Z_n}{Z_{n-1}} Z_{n-1} \, d\mu \\ &= \int_A [E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi \alpha_n)] Z_{n-1} \, d\mu = \int_A [E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi \alpha_n)] Z_{n-1} \, d\mu_{n-1} \\ &= \int_A E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi \alpha_n) \, d\tilde{\mu}_{n-1} = \int_A E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi \alpha_n) \, d\tilde{\mu}. \end{aligned}$$

Il en résulte que : $E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi) = E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi \alpha_n) \tilde{\mu}\text{-p.s.}$

(com) outre le maniement des propriétés classiques de l'espérance conditionnelle, cette question exigeait un soin particulier dû à la présence des deux mesures μ et $\tilde{\mu}$.

3.b.β) En particulier, si $\psi=1$, on obtient :

$$1 = E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(1) = E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\alpha_n) \tilde{\mu}\text{-p.s.}$$

3.b.γ) W_n est bien sûr \mathcal{B}_n -mesurable et $\tilde{\mu}$ -intégrable. D'après 3.b.α), l'inégalité donnée et 3.b.β), on a, $\tilde{\mu}\text{-p.s.}$:

$$E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(W_n - W_{n-1}) = E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}[\alpha_n u(\text{Log } \alpha_n)] \geq E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\alpha_n - 1) = 0.$$

(on a utilisé $\alpha_n > 0$).

W est alors une $\tilde{\mu}$ -sous martingale.

(com) lorsqu'elle a été abordée, cette question a été bien traitée

3.b.δ) Alors, puisque $|W_n - W_{n-1}| \leq 1$, $\forall n \geq 2$, TH.2, 3.a.β), 3.b.α) et la double inégalité donnée permettent d'écrire :

$$\tilde{\mu}\text{-p.s.} \quad (Z_\infty < \infty) = (W_n \rightarrow) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_\mu^{\mathcal{B}_{k-1}} [u(\text{Log } \alpha_k) + u^2(\text{Log } \alpha_k)] < \infty \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{\mu}^{k-1} [\alpha_k u(\text{Log } \alpha_k) + \alpha_k u^2(\text{Log } \alpha_k)] \right) < \infty \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{\mu}^{k-1} (1 - \sqrt{\alpha_k})^2 \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Développant le carré et tenant compte de 3.b.β) :

$$E_{\mu}^{k-1} (1 - \sqrt{\alpha_k})^2 = 2 E_{\mu}^{k-1} (1 - \sqrt{\alpha_k})$$

d'où :

$$\tilde{\mu}\text{-p.s. } (Z_{\infty} < \infty) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{\mu}^{k-1} (1 - \sqrt{\alpha_k}) < \infty \right).$$

De F_2 et F_3 résultent alors les équivalences : F_4 et F_5 .

(com) même remarque qu'en 3.b.γ).

4.a.α) On a : $\alpha_n = \frac{\tilde{Q}_n}{Q_n} \frac{Q_{n-1}}{\tilde{Q}_{n-1}}$. Mais $X_n = (X_{n-1}, X_n)$; alors, $\forall x \in \mathbb{R}^{N^*}$,

$Q_n(x_n) = Q_{n-1}(x_{n-1}) f_{X_n}^{X_{n-1}=x_{n-1}}(x_n)$ où $f_{X_n}^{X_{n-1}=}$ est une densité conditionnelle de X_n sachant X_{n-1} , qui existe puisque X_n admet une densité. Il résulte de plus de l'équation de définition de X_n et de l'indépendance de X_{n-1} et U_n qu'une loi conditionnelle $P_{X_n}^{X_{n-1}=x_{n-1}}$ est égale à :

$$P_{\Theta x_{n-1} + U_n}^{X_{n-1}=x_{n-1}} = P_{\Theta x_{n-1} + U_n} = N(\Theta x_{n-1}, \sigma_n^2).$$

Alors :

$$\alpha_n(x) = \frac{f_{X_n}^{X_{n-1}=x_{n-1}}(x_n)}{f_{X_n}^{X_{n-1}=x_{n-1}}(x_n)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{N^*}, \text{ soit :}$$

$$\alpha_n(x) = e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_n - \Theta x_{n-1}}{\sigma_n} \right)^2 - \left(\frac{x_n - \Theta x_{n-1}}{\sigma_n} \right)^2 \right]}$$

(com) cette question, qui pouvait être traitée indépendamment des parties 2 et 3 n'a pas été abordée, à quelques exceptions près.

4.a.β) D'après 3.b.α) on a, en prenant $\psi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}$:

$$E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\sqrt{\alpha_n}) = E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \tilde{\mu}\text{-p.s. .}$$

$\forall A \in \mathcal{C}_{n-1}$ de la forme $A = \sum_{j=1}^{n-1} \prod_j^{-1}(A_j)$, $A_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a, tenant compte

de ce que : $\tilde{Q}_n(\underline{x}_n) = \tilde{Q}_{n-1}(\underline{x}_{n-1}) f_{\tilde{X}_n}^{\underline{x}_{n-1} = \underline{x}_{n-1}}(\underline{x}_n)$:

$$\begin{aligned} \int_A E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) d\tilde{\mu} &= \\ \int_{A_1 \times \dots \times A_{n-1}} e^{-\frac{1}{4} \left[-\left(\frac{x_n - \tilde{\theta} x_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{x_n - \theta x_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{x_n - \tilde{\theta} x_{n-1}}{\sigma_n}\right)} & \frac{Q_{n-1}(\underline{x}_{n-1}) d\underline{x}_{n-1}}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{A_1 \times \dots \times A_{n-1}} Q_{n-1}(\underline{x}_{n-1}) \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{4\sigma_n^2} \left[(x_n - x_{n-1})^2 + (x_n - x_{n-1})^2 \right]} d\underline{x}_n \right] dP_{\tilde{X}_{n-1}}(\underline{x}_{n-1}) \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du théorème de Fubini. Le crochet est égal à

$$\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \left(x_n - \frac{\theta + \tilde{\theta}}{2} x_{n-1} \right)^2 + x_{n-1}^2 \left(\frac{\theta - \tilde{\theta}}{2} \right)^2} dx_n = e^{-\frac{x_{n-1}^2 (\theta - \tilde{\theta})^2}{2(2\sigma_n)^2}}$$

Alors, $\forall A \in \mathcal{C}_{n-1}$, et donc, toujours par le même argument, $\forall A \in \mathcal{B}_{n-1}$:

$$\int_A E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) d\tilde{\mu} = \int_A e^{-\frac{x_{n-1}^2 (\theta - \tilde{\theta})^2}{2(2\sigma_n)^2}} d\tilde{\mu}(x).$$

L'intégrand du membre de droite étant \mathcal{B}_{n-1} -mesurable, il vient :

$$E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\sqrt{\alpha_n}) = E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) = e^{-\frac{x_{n-1}^2 (\theta - \tilde{\theta})^2}{2(2\sigma_n)^2}} \tilde{\mu}\text{-p.s. .}$$

(com) traitée uniquement par quelques candidats, cette question ne nécessitait que des calculs simples sur les v.a. gaussiennes.

4.b.α) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est telle que $0 < u_n < 1$, les séries de terme général $|\text{Log } u_n|$ et $1 - u_n$ convergent ou divergent en même temps ; alors puisque $\theta \neq \tilde{\theta}$, il résulte de 4.a.β) que :

$$\tilde{\mu} [\sum_{n=1}^{\infty} (1 - E_{\mu}^{n-1}(\sqrt{\alpha_n})) < \infty] = P [\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\tilde{X}_{n-1}}{\sigma_n})^2 < \infty]$$

F_4 et F_5 permettent de conclure.

4.b.β) Tenant compte de (1.a.ζ) et de l'équivalence analogue obtenue en changeant X en \tilde{X} , on obtient :

$$\mu \ll \tilde{\mu} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E(\frac{\tilde{X}_{n-1}}{\sigma_n})^2 < +\infty$$

$$\tilde{\mu} \ll \mu \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n})^2 < +\infty$$

$$\mu \perp \tilde{\mu} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E(\frac{\tilde{X}_{n-1}}{\sigma_n})^2 = +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n})^2 = +\infty$$

l'alternative est alors claire.

4.b.γ) En particulier si $\tilde{\theta} = 0$, on a $\tilde{X}=U$ et $E(\frac{\tilde{X}_{n-1}}{\sigma_n})^2 = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n^2}$.

$$\text{Alors : } \mu \sim \tilde{\mu} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{n+1}} < +\infty$$

$$\mu \perp \tilde{\mu} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{n+1}} = +\infty.$$

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
143	79	43	37	31	11	12	5

nombre de copies (y compris les copies blanches) : 361.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

1. Description du problème.

Le problème portait sur l'étude d'algorithmes d'optimisation combinatoire liés à l'empilement de "paquets" dans des boîtes de capacité fixe.

La partie I avait pour objet de présenter quelques propriétés combinatoires simples liés à la "physique" du problème. La partie II avait pour objet l'étude combinatoire du placement séquentiel. Les parties III et IV étaient de nature plus analytique et visaient à établir le coût moyen du placement séquentiel décroissant ainsi que du placement optimal, sur des données uniformément réparties. La partie V consistait à établir par une chaîne de réductions le caractère *NP*-complet du problème.

Le problème ne présuppose aucune connaissance combinatoire particulière (si ce n'est un peu de bon sens et d'aptitude au raisonnement). Les parties III et IV utilisent les notions élémentaires de probabilités et d'espérance (redéfinies dans ce cas particulier), et quelques connaissances du programme d'analyse. La partie V nécessitait, pour être traitée convenablement que les candidats aient acquis la notion de problème *NP*-complet et de réduction polynomiale qui figure au programme de l'option.

La logique du problème est simple: la détermination de l'empilement optimal est un problème pour lequel on ne connaît pas de solution efficace (*NP*-complétude même dans le cas de 2 boîtes), alors que sur des données uniformément réparties sur $[0,1]$, on peut proposer des heuristiques satisfaisantes.

2. Commentaires sur les copies.

Pratiquement tous les candidats ont abordé la partie I qui constituait un test de bon sens mathématique. Les correcteurs ont été sur cette partie, et plus généralement sur les questions combinatoires du problème, particulièrement sensibles à la clarté de raisonnement des candidats. Un quart environ des copies présentent en effet des preuves fausses ou des arguments de récurrence qui ne s'appliquent pas aux questions.

Les questions de nature plus analytiques, lorsqu'elles étaient abordées, ont souvent été traitées correctement, ce qui s'explique sans doute par leur caractère relativement classique. Cependant, certains candidats fournissent des réponses (Q. 8) en contradiction flagrante avec

le fait que l'espérance d'une somme est la somme des espérances ..., et manquent d'intuition probabiliste élémentaire.

La partie V a généralement été bien traitée par les candidats qui l'avaient abordée et a permis à un certain nombre de candidats de remonter efficacement leur note globale.

La répartition des notes sur 119 copies corrigées (non blanches) était la suivante:

Notes:	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40
Nb. Copies:	12	35	27	26	11	4	2	1	1

Il apparaît que 25% des candidats ont obtenu une note ≤ 7 , que 50% ont obtenu une note ≤ 11 et 25% une note ≥ 17 . La moyenne s'établissait à 12,90 points sur un total de 40.

3. Commentaires sur les questions.

PARTIE I. GÉNÉRALITÉS. Cette partie (sauf peut-être la borne supérieure de la Q. 2) ne présente pas de difficulté particulière.

Q1. Soit $\mathcal{E}(X; c)$ l'ensemble des empilements de l'entrée $(X; c)$. Il est clair qu'on a les implications

$$\mathcal{E}(X; c) = \mathcal{E}(Y; c) \implies \omega(X; c) = \omega(Y; c) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(X; c) \subseteq \mathcal{E}(Y; c) \implies \omega(X; c) \geq \omega(Y; c). \quad (1)$$

Le principe (1) et des raisonnements découlant directement des définitions permettent de conclure.

Q2. La borne inférieure est évidente. La borne supérieure signifie que, dans l'empilement optimal, toute boîte, sauf au plus une, est au moins remplie à moitié (sinon on pourrait combiner 2 boîtes). Formellement, soient B_j le contenu de la boîte j dans un empilement optimal de coût M . On a la suite d'inégalités

$$B_1 + B_2 > c, \quad B_2 + B_3 > c, \quad \dots, \quad B_M + B_1 > c$$

d'où résulte par sommation la majoration.

Q3. Prendre des X_j qui valent 0 ou $\frac{1}{2} + \epsilon$ avec un choix convenable de la quantité ϵ .

Q4. Prendre $X_1 = X_2 = X_3 = \frac{1}{3}$ et $X_4 = X_5 = \dots = \frac{2}{3}$. Pour la condition supplémentaire (C3), modifier légèrement ces valeurs.

PARTIE II. LE PLACEMENT SÉQUENTIEL. La seule question délicate (et la plus intéressante) était Q. 7 qui a été abordée avec succès par quelques candidats.

Q5. La preuve de correction de l'algorithme s'effectue par récurrence sur N . La borne supérieure de l'inégalité découle de ce que la somme des remplissages de 2 boîtes consécutives est toujours > 1 (cf. Q. 2)

Q6. Utiliser des suites construites selon le schéma $X_1 = X_3 = \dots = 1 - \epsilon$ et $X_2 = X_4 = \dots = \eta$ pour des valeurs convenables de ϵ et η .

Q7. Soit $g(i)$ l'indice tel que $X_{g(i)}$ soit le premier élément envoyé dans la boîte i . On observe, et c'est là le point essentiel, que $g(i) \geq 2^i$ (preuve par récurrence; toute borne inférieure exponentielle pour $g(i)$ convient). Le remplissage de la boîte i est alors au moins $1 - 1/2^{i+1}$, d'où découle le résultat par sommation des "vides" de chaque boîte.

PARTIE III. LE PLACEMENT SÉQUENTIEL DÉCROISSANT. Contrairement au précédent, cet algorithme s'analyse en moyenne assez simplement (cf Q. 10 et suivantes) et utilise en moyenne $0,6449N$ boîtes pour loger N paquets (de poids total en moyenne $0,5N$). L'analyse conduit à quelques estimations probabilistes établies par le calcul intégral classique.

Q8. Un calcul direct d'intégrale montre que cette espérance vaut $N/2$. C'est aussi la somme de N variable aléatoires d'espérance $1/2$.

Q9. On calcule les premières valeurs, et l'on vérifie par récurrence que

$$\psi_k(y) = \frac{y^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} \phi_k(y) &= \int_{1-y}^1 \Pr[1 - X_{k+1} \leq X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq y] dX_{k+1} \\ &= \frac{ky^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

La quantité $\phi_k(1) = k/(k+1)!$ mesure la probabilité que la première boîte contienne exactement X_1, \dots, X_k . On obtient donc

$$\bar{\alpha}_N = \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{(k+1)!},$$

et la limite lorsque $N \rightarrow \infty$ de $\bar{\alpha}_N$ vaut $e - 1 = 1.71828 \dots$

Q10. On vérifie facilement par récurrence que si $X_i \leq Y_i$ pour tout i , alors $\gamma_{NFD}(X; 1) \leq \gamma_{NFD}(Y; 1)$.

(i). **Borne supérieure.** On considère alors le vecteur Y , tel que $X_i \leq Y_i$, défini, avec des notations évidentes, par

$$Y = \left(\frac{1}{1}\right)^{w_1(X)} \left(\frac{1}{2}\right)^{w_2(X)} \dots \left(\frac{1}{r}\right)^{w_r(X)}$$

pour lequel

$$\gamma_{NFD}(Y; 1) \leq \sum_{l=1}^r \left\lceil \frac{w_l(X)}{l} \right\rceil \leq r + \sum_{l=1}^r \frac{w_l(X)}{l}.$$

(ii). **Borne inférieure.** Raisonnement du même type.

Q11. La probabilité que les n_1 premiers éléments appartiennent à I_1 etc. vaut $t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_r^{n_r}$. On multiplie cette quantité par le nombre de choix possibles (le coefficient multinomial) pour obtenir $p_{\vec{n}}$.

Q12. Par la formule multinomiale,

$$Q(t_1, t_2, \dots, t_r) = (t_1 t_1 + t_2 t_2 + \dots + t_r t_r)^N.$$

Par dérivation par rapport aux t_j , puis en faisant $t_j = 1$, on obtient l'espérance de $W_r(X)$:

$$N \left(\frac{1}{r^2} + \sum_{l=1}^{r-1} \frac{1}{l^2(l+1)} \right),$$

et celle de $V_r(X)$:

$$N \sum_{l=1}^{r-1} \frac{1}{l^2(l+1)}.$$

Q13. De Q. 12 et de l'encadrement de Q. 10, on trouve

$$\frac{\bar{\gamma}_{NFD}(N)}{N} \rightarrow \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0,6449.$$

PARTIE IV. COÛT DU PLACEMENT OPTIMAL. L'algorithme de placement complémentaire est un algorithme "théorique" (cf Q. 22) dont l'introduction permet d'établir le coût moyen du placement optimal. L'analyse se ramène à l'évaluation d'irrégularités de distribution, traitées par séries génératrices (Q. 15) et analyse complexe. On constate (Q. 18) qu'en moyenne, le placement PC et le placement optimal utilisent $\sim N/2$ boîtes.

Q14. Utiliser l'égalité $\gamma_{PC} = N - \sum_{j=1}^s \lambda_j$ et l'inégalité $\lambda_j \geq \frac{N}{r} - \Delta_r$.

Q15. D'après Q. 11,

$$p'_{\bar{n}} = \frac{N!}{n_1!n_2! \cdots n_r!} \left(\frac{1}{r}\right)^N$$

et par sommation,

$$\begin{aligned} q_{N,b} &= \sum_{n_i > b} \left(\frac{N!}{n_1!n_2! \cdots n_r!} \left(\frac{1}{r}\right)^N \right) \\ &= \frac{N!}{r^N} [z^N] \left(e^z - e_b(z) \right)^r \end{aligned}$$

où $[z^N]f(z)$ représente le coefficient de z^N dans le développement de Taylor de $f(z)$ à l'origine.

Q16. L'expression intégrale de $q_{N,b}$ s'établit par le théorème de Cauchy à partir de Q. 15. La majoration résulte de bornes triviales en observant que l'intégrande est à coefficients positifs.

Q17. En notant que $(1-t)^r \geq 1-rt$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $r \geq 0$, on obtient

$$1 - q_{N,b} \leq \frac{N!e^N}{N^N} rt \quad \text{avec} \quad t = \frac{e^{-N/r}}{b!} (b+1) \left(\frac{N}{r}\right)^b,$$

et le calcul se conclut par application de la formule de Stirling et de développements asymptotiques élémentaires de $\log x$ et $\exp x$.

Q18. On utilise les valeurs de b et r dans Q. 17. Soit X tel que $\forall l, \zeta_l(X) > b$. On a alors $\Delta_r(X) = O(\sqrt{N})$ et d'après Q. 14:

$$\gamma_{PC}(X;1) \leq \frac{N}{2} + O(N^{5/6}).$$

Cet évènement se produit avec probabilité $q_{N,b}$. Dans le cas contraire, et avec probabilité $(1 - q_{N,b})$, on majore $\gamma_{PC}(X)$ par N . Donc, l'espérance de $\gamma_{PC}(X;1)$ est majorée par

$$\bar{\gamma}_{PC}(N) \leq q_{N,b} \left(\frac{N}{2} + O(N^{5/6}) \right) + (1 - q_{N,b})N \leq \frac{N}{2} + O(N^{5/6}).$$

Comme $\bar{\pi}(N) = N/2$, on en déduit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\gamma}_{PC}(N)}{N} = \frac{1}{2}$$

ainsi que $\bar{\omega}(N) \sim N/2$.

ORAL

Le niveau de l'écrit a été satisfaisant; il a permis de dresser une liste de 349 admissibles. Les 230 postes mis au concours, soit 50 de plus qu'en 1986, n'ont pas entraîné une forte augmentation du nombre d'inscrits; par contre ils ont joué un rôle essentiel pour attirer et retenir un plus grand nombre de participants effectifs de qualité. La décharge de service annoncée pour les professeurs certifiés admissibles, et effectivement accordée, a été un stimulant pour une préparation plus intense du concours.

L'oral s'est déroulé dans de bonnes conditions; la concertation des deux jurys a été permanente. Les candidats ont dans l'ensemble montré qu'ils avaient préparé l'oral dans un souci d'approfondissement du programme; tous n'ont pas eu la disponibilité nécessaire pour le dominer suffisamment. Nous espérons que la décharge accordée en donnera la possibilité à un plus grand nombre pour la prochaine session. Des progrès sont apparus dans l'introduction d'exemples ou d'applications empruntés à divers domaines (géométrie, analyse numérique, mécanique...) mais cette tendance doit encore être développée.

On trouvera ci-contre la note précisant le déroulement des épreuves orales. Le programme de la session 1988 publié dans le B.O. du 16 juillet 1987 (n°28) doit être complété par l'additif figurant dans le B.O. du Il comporte quelques modifications par rapport au programme précédent.

On constate une augmentation sensible du nombre de reçus parmi les professeurs certifiés; de même l'ensemble des E.N.S a fourni davantage d'agrégés. Par contre la population des étudiants reçus reste insuffisante.

Le concours 87 a manifesté, comme les précédents, la vitalité de l'agrégation de mathématiques. L'augmentation du nombre de postes semble avoir créé un effet d'appel qui devrait entraîner l'ouverture de centres de préparations, pour le bénéfice d'un plus grand nombre d'étudiants et d'enseignants. Les prévisions pour l'avenir devraient favoriser cette évolution.

ORGANISATION des EPREUVES ORALES

1°) Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets au choix. A l'issue des trois heures de préparation, il indique au jury celui des deux sujets qu'il a choisi.

Pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place (bibliothèque de l'agrégation). Il peut également utiliser des ouvrages de référence qu'il a apportés lui-même. Ces ouvrages doivent être imprimés, vendus dans le commerce, et ne pas comporter de notes manuscrites. Ils seront contrôlés par le Jury qui peut s'opposer à l'utilisation de certains ouvrages s'il juge qu'elle risque de dénaturer le travail de préparation.

La liste de la bibliothèque de l'agrégation est publiée chaque année dans le rapport du concours précédent. Tout achat de livres entre deux sessions pour cette bibliothèque est signalé aux candidats avec leur convocation aux épreuves orales.

2°) Sur le sujet choisi le candidat n'a pas à bâtir une leçon détaillée destinée à une classe d'un niveau déterminé ou correspondant à un nombre limité d'heures de cours. Il lui est demandé surtout une étude de synthèse construite à partir d'une base de connaissance ne dépassant pas les limites du programme d'oral. Le candidat a le libre choix du niveau auquel il place son exposé ; le niveau d'une classe de terminale risque cependant d'être insuffisant et d'autre part les connaissances exposées doivent être réellement maîtrisées.

3°) L'épreuve commence par la présentation, en quinze à vingt minutes, d'un plan d'étude qui ne doit être ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations.

Il s'agit de définir avec précision les notions introduites, de donner des énoncés complets des résultats fondamentaux, de citer des exemples et des applications, et d'insister sur l'enchaînement des idées.

4°) Après la présentation du plan le candidat est invité à fournir au jury une liste d'au moins deux points qu'il juge importants dans son étude. C'est parmi ces points que le jury choisit le thème d'un exposé, qui peut être soit le développement détaillé d'une partie bien délimitée du plan, soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif. La netteté et la clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté, constituent pour le jury un facteur important d'appréciation.

5°) L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions abordées dans le plan et l'exposé, et éventuellement sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Cette discussion permet ainsi au candidat de développer, de justifier et d'illustrer son point de vue, en même temps qu'elle met en valeur sa culture mathématique.

Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury.

6°) Les candidats sont invités, notamment pour illustrer et compléter une leçon, à utiliser leurs connaissances en matière de méthodes numériques, d'algorithme, et de programmation des ordinateurs.

RAPPORT D'ORAL POUR L'ÉPREUVE D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le concours de cette année a été, en particulier, marqué par une augmentation notable des postes offerts. Ce fait aurait dû inciter des candidats ayant manqué de confiance en leurs chances de succès dans le passé à préparer leur épreuve de façon plus systématique. Il se trouve cependant qu'un pourcentage non négligeable d'admissibles semble encore, d'une part ignorer les contingences de temps imposées par l'épreuve (le jury a été souvent amené à faire de discrets rappels à l'ordre à ce sujet) d'autre part, considérer l'épreuve elle-même plus comme un exercice de virtuosité verbale que comme un exposé de connaissances mathématiques solides, sans être obligatoirement très "pointues". Un assemblage de motivations pédagogiques, aussi louables soient-elles, ne peut être considéré comme suffisant.

LE PLAN : il doit être bien entendu, structuré de façon à faire apparaître une progression dans la connaissance des notions indispensables ; mais il ne doit pas être limité à un simple squelette, et l'on attend des résultats et énoncés précis et, si possible, non triviaux. Compte tenu de la place limitée au tableau, le candidat peut se permettre l'utilisation d'un certain nombre d'abréviations écrites, et compléter l'écriture par un commentaire oral court ; mais l'excès sur l'un quelconque de ces deux points est à proscrire. Le niveau du plan n'est pas limité supérieurement ; inférieurement, il l'est par le niveau moyen d'un premier cycle d'études supérieures. Cependant, tout candidat présentant un résultat doit pouvoir convaincre le jury qu'il ne vient pas de découvrir ce résultat dans son temps de préparation.

L'EXPOSE : Le candidat doit proposer deux thèmes (au moins) esquissés dans le plan ; il est bien évident que le jury ne peut apprécier qu'on lui force la main par la proposition de sujets d'intérêts disproportionnés. De même, la démonstration attendue devra avoir une consistance minima, ce qui exclut l'apparition subite de résultats essentiels admis sans explication. On attend des candidats qu'ils prouvent une certaine aisance dans la manipulation des notions évoquées, et le fait d'avoir le nez dans ses notes tout au long de l'exposé fait mauvais effet, bien que le recours à ces mêmes notes pour se rafraîchir la mémoire de temps en temps soit tout à fait normal. A propos, le jury peut s'assurer à tout moment de l'exposé, par des questions appropriées, que le candidat domine effectivement le cours de son travail.

LES QUESTIONS : Certains candidats semblent trouver inopportunes les demandes du jury en vue de faire préciser telle notion, ou rectifier telle faute, minime ou non ; cette attitude négative est, heureusement, assez rare car ces demandes ne sont effectuées que pour arrêter l'opinion du jury, et préparent à des prolongements plus ou moins lointains, sous forme de questions théoriques ou, dans la mesure du temps imparti, d'exercices choisis pour mettre en valeur la capacité d'adaptation du candidat à des situations concrètes liées à la théorie évoquée.

Pour terminer ce rapport, voici quelques remarques concernant certains points du programme.

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE : Cette partie du programme faisant figure de nouveauté dans la leçon d'algèbre et géométrie ; les exemples d'études de courbes et surfaces exigées par les titres ont souvent pêché par excès de simplicité, sinon par manque d'intérêt ; par contre, les hypothèses faites sont quelque fois d'une complication disproportionnée aux applications qui en sont déduites. Ce que le jury attend pour une leçon d'exemples sur les courbes ou les surfaces, c'est un cadre théorique maniable, excluant les cas pathologiques, et s'adaptant immédiatement aux exemples qui suivent, et qui doivent recouvrir un maximum de configurations différentes. Il est également bien évident que le calcul différentiel utilisé doit être absolument dominé et qu'un calcul commencé doit être terminé, vite et bien...

DENOMBREMENTS : Le jury a apprécié l'utilisation, à bon escient, des séries génératrices ; les dénombrements d'ensembles fonctionnels simples ne doivent pas occuper la principale partie du plan et le déroulement systématique des dénombrements de structures linéaires finies est souvent fastidieux, ou manquant de motivation sur les applications intéressantes qu'on peut en tirer.

ALGEBRE LINEAIRE : Les liens entre algèbre et algèbre linéaire ne sont pas toujours bien perçus par les candidats, qui ont parfois du mal à "décortiquer" la structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$; de même, il est bon de savoir que, \mathbb{K} étant un corps, une base de $\mathbb{K}(X)$ est donnée par la décomposition en éléments simples ; les résultats sur la dimension dans le cas fini ne doivent pas être déduits de l'existence supposée d'une base dans le cas quelconque.

Les candidats oublient souvent de mentionner, lors de la définition du polynôme minimal d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie, que l'idéal annulateur de u dans $\mathbb{K}[X]$ est non nul, ce qui rend caduque l'utilisation d'un générateur unitaire de cet idéal.

En ce qui concerne les méthodes pratiques (inversion de matrices, déterminant, valeurs propres, systèmes linéaires), on n'attend pas des candidats des connaissances spécialisées d'analyse numérique, mais la connaissance de quelques algorithmes précis, ainsi qu'une estimation de leur complexité effective ; le recours aux astuces traditionnelles pour les calculs de déterminants classiques (Van der Monde circulants et autres) est insuffisant dans le cadre de telles leçons. Il ne faut pas oublier que la méthode de Gauss, traitée rigoureusement, remplace bien des méthodes plus sophistiquées, mais moins bien dominées par les candidats.

Les règles de l'oral n'ayant pas changé , les candidats pourront se reporter au rapport d'oral de 1986 pour les remarques générales qui ne seront pas toutes répétées ici .

Rappelons que le candidat peut situer la leçon à un niveau élémentaire (premier cycle universitaire) ; lorsqu'il choisit un niveau plus élevé , il doit dominer son sujet. Le candidat doit s'attendre à être interrogé au niveau où il place la leçon mais doit aussi pouvoir répondre rapidement à des questions simples.

LE PLAN

Il doit correspondre scrupuleusement au titre de la leçon , être articulé de façon logique et toujours comporter des exemples . Les leçons intitulées "Exemples de ..." doivent être centrées sur quelques exemples significatifs et variés ; on a vu cette année des cas où la part de plan consacrée à l'énoncé de théorèmes généraux ou de résultats théoriques excédait celle réservée aux exemples !

Certaines leçons ont un titre laissant une grande latitude au candidat ; citons par exemple la leçon "Application de la dénombrabilité en analyse et en topologie..." : il est évidemment impossible d'en épuiser le sujet en vingt minutes. En règle générale un plan n'a donc pas besoin d'être exhaustif mais doit présenter des dominantes , le candidat pouvant motiver ses choix en illustrant par des exemples significatifs l'importance des résultats énoncés ; de futurs enseignants doivent être capables d'effectuer un tri parmi leurs connaissances pour n'exposer que l'essentiel de façon posée ; en aucun cas l'exposition du plan ne doit se transformer en un marathon haletant !

L'EXPOSE

Le candidat doit proposer au jury des thèmes en concordance avec le titre de la leçon ; une proposition hors sujet ne sera jamais retenue par le jury ; des propositions trop pauvres ne laissant pas un véritable choix au jury sont sanctionnées dans la note finale .

Les sujets d'exposé doivent illustrer l'utilisation normale de la théorie et non la pathologie ; les exposés trop techniques sont déconseillés si le candidat n'est pas capable de dégager les grandes lignes directrices de sa démonstration (ou s'enlise dans des calculs compliqués). Signalons que le jury 87 n'a presque jamais retenu la proposition de construction "d'objets bizarres" et autres fonctions continues dérivables nulle part ; regrettons qu'alors le candidat ait sans doute

perdu un temps précieux pendant les trois heures de préparation à mettre au point ces prouesses techniques !

Enfin le candidat ne doit proposer en exposé que ce qu'il a compris et peut reconstituer au tableau sans recopier ses notes ; les notes doivent être posées sur la table près du tableau et n'être consultées que pour recopier certaines formules ou retrouver une étape ou un détail technique , mais en aucun cas pour un calcul élémentaire ou l'application directe d'un des théorèmes du plan.

REMARQUES PARTICULIERES

Les résultats de topologie générale ne doivent être introduits qu'en vue des applications; les leçons "Espaces homéomorphes", "Exemples d'espaces compacts" devraient comporter des exemples issues de la géométrie : boules, sphères , tores , espaces projectifs , groupes classiques ...

Plusieurs leçons portent sur l'approximation des fonctions; le jury rappelle que la convolution fournit un procédé d'approximation et qu'une démarche classique en analyse consiste à démontrer une propriété pour des fonctions bien régulières ou simples puis à déduire la même propriété pour des fonctions plus générales par un argument de densité .

D'autre part , afin d'orienter les candidats vers l'analyse numérique , la leçon "Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales" s'intitulera "Approximation et interpolation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales".

Si l'on propose en exposé le théorème de Cauchy-Lipschitz comme application d'un théorème de point fixe , il est nécessaire d'orienter la démonstration en ce sens .

Les leçons de calcul différentiel doivent être traitées en priorité dans \mathbb{R}^n , le cas plus général des espaces de Banach ne devant être présenté que par les candidats qui ont des exemples à proposer en dimension infinie; une leçon débutant avec des espaces de Banach et échouant à propos de l'écriture de la formule de Taylor à deux variables est du plus mauvais effet.

L'illustration géométrique du théorème des fonctions implicites est trop rarement envisagée.

Le jury a augmenté cette année la fréquence des leçons de calcul différentiel, notamment sur les équations différentielles ; on constate malheureusement que les connaissances restent trop abstraites , les candidats manquant visiblement d'exemples pour illustrer la théorie .

Les exemples de fonctions définies par une série (resp. une intégrale) qui sont

proposés sont en général très pauvres ; ces exemples devraient permettre l'application des théorèmes généraux et une étude un peu approfondie de la fonction considérée : si l'on étudie une série de fonctions C^∞ , on peut regarder si la somme est C^∞ , ou mieux analytique et si c'est le cas calculer la série de Taylor en un point et son rayon de convergence, etc...

Les candidats ont souvent présenté un critère d'analyticité erroné ; il semble qu'il se soit inspirés d'un ouvrage ancien classique où un intervalle compact $[a,b]$ est désigné par (a,b) ; une étude de la démonstration aurait levé l'ambiguïté. Il est donc recommandé aux candidats de soumettre à un examen critique les énoncés qu'ils souhaitent introduire dans leur plan, afin d'en déceler les anomalies éventuelles .

Peu de candidats savent que par une intégration par parties on peut très souvent ramener l'étude d'une intégrale semi-convergente à celle d'une intégrale absolument convergente .

Lors des leçons de probabilités des exemples concrets d'illustration seraient les bienvenus .

- 1 Algorithmes de tri; performances.
- 2 Exemples de problèmes de dénombrement (on pourra se limiter au cas fini)
- 3 Groupes abéliens de type fini; sous-groupes de \mathbb{Z}^n .
- 4 Exemples et applications de la notion de sous-groupe distingué.
- 5 Parties génératrices d'un groupe; exemples; applications.
- 6 Illustrer par des exemples, notamment géométriques, la notion d'éléments conjugués dans un groupe.
- 7 Exemples de groupes finis.
- 8 Groupes opérant sur un ensemble. Applications.
- 9 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 10 Exemples d'idéaux et d'anneaux quotients d'un anneau commutatif unitaire.
- 11 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
- 12 Congruences. Applications.
- 13 Divisibilité et factorisation dans un anneau commutatif intègre; exemples.
- 14 Propriétés élémentaires des nombres premiers.
- 15 P.g.c.d., p.p.c.m., théorème de Bezout, méthodes de calcul.
- 16 Exemples de corps.
- 17 Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Applications.
- 18 Exemples d'algèbres.
- 19 Corps des nombres complexes.
- 20 Groupe multiplicatif des nombres complexes; racines de l'unité.
- 21 Applications géométriques des nombres complexes.
- 22 Racines des polynômes à une indéterminée à coefficients complexes. Résultant. Discriminant.
- 23 Racines des polynômes à une indéterminée. Polynômes irréductibles.
- 24 Polynômes symétriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.
- 25 Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif; applications.
- 26 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples et applications.
- 27 Dimension d'un espace vectoriel dans le cas fini. Rang d'une application linéaire.
- 28 Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.
- 29 Matrices carrées inversibles. Méthodes de calcul de l'inverse.
- 30 Exemples de sous-groupes du groupe linéaire.
- 31 La dualité en algèbre linéaire; applications (on se limitera au cas de la dimension finie)
- 32 Résolution d'un système de n équations linéaires à p inconnues. Méthodes pratiques de résolution.
- 33 Déterminants. Applications.
- 34 Méthodes pratiques de calcul d'un déterminant.
- 35 Sous-espaces vectoriels stables pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
- 36 Vecteurs propres, valeurs propres. Déterminations pratiques.
- 37 Réduction d'un endomorphisme.
- 38 Polynôme minimal, polynôme caractéristique.
- 39 Formes bilinéaires.
- 40 Orthogonalité, isotropie pour une forme bilinéaire symétrique.
- 41 Décomposition en carrés d'une forme quadratique. Applications.

- 42 Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée.
- 43 Espaces vectoriels euclidiens en dimension finie. Groupe orthogonal.
- 44 Espaces vectoriels hermitiens de dimension finie sur \mathbb{C} . Groupe unitaire.
- 45 Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens et hermitiens de dimension finie. Réduction des endomorphismes hermitiens et unitaires.
- 46 Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien. Applications.
- 47 Matrices équivalentes, semblables, congruentes.
- 48 Convexité dans les espaces affines réels de dimension finie.
- 49 Polyèdres convexes.
- 50 Exemples de sous-groupes du groupe affine réel en dimension ≤ 3 .
- 51 Exemples de groupes d'isométries d'un espace affine euclidien en dimension ≤ 3 .
- 52 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites, exemples en dimension ≤ 3 .
- 53 Polyèdres réguliers dans un espace affine euclidien de dimension 3.
- 54 Exemples de problèmes de géométrie affine.
- 55 Barycentres; applications.
- 56 Angles.
- 57 Exemples de problèmes d'angles et de distances en géométrie.
- 58 Propriétés affines, propriétés métriques: exemples en géométrie plane.
- 59 Inversion plane. Groupe circulaire.
- 60 Cercles et sphères.
- 61 Familles linéaires de cercles.
- 62 Droite projective. Birapport.
- 63 Propriétés projectives, propriétés affines: exemples.
- 64 Coniques dans le plan affine euclidien.
- 65 Quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.
- 66 Divers modes de définition et de représentation des surfaces de \mathbb{R}^3 .
Exemples.
- 67 Propriétés affines locales des courbes. Exemples.
- 68 Propriétés métriques des courbes planes ou gauches.
- 69 Exemples d'étude des courbes planes.
- 70 Exemples de recherche et d'étude d'enveloppes de droites dans le plan.
- 71 Mouvement à accélération centrale. Exemples.

Sujets d'analyse

- 1 Applications à l'analyse de la notion de compacité
- 2 Exemples d'espaces compacts.
- 3 Espaces homéomorphes.Exemples et contre-exemples
- 4 Connexité.Applications.
- 5 Théorèmes du point fixe.Applications.
- 6 Sous-espaces denses.Illustration par l'approximation des fonctions
- 7 Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre et de calcul de leurs normes .
- 8 Espaces vectoriels normés de dimension finie.
- 9 Espaces vectoriels normés.
- 10 Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse (ou en probabilités) .
- 11 Donner une construction de \mathbb{R} ; en déduire les principales propriétés de \mathbb{R} .
- 12
- 13 Topologie de la droite numérique \mathbb{R} et sous-ensembles remarquables de \mathbb{R} .
- 14 Exemples d'étude de suites de nombres réels,applications.
- 15 Etude , sur des exemples , de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels ; calcul approché de la limite.
- 16 Approximation d'un nombre réel ; Exemples.
- 17 Etude , sur des exemples , de suites réelles ou complexes définies par divers types de relations de récurrence.
- 18 Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples et contre-exemples.
- 19 Continuité uniforme . Applications , exemples et contre-exemples .
- 20
- 21 Applications réciproques ; théorèmes d'existence ; exemples.
- 22 Exemples d'étude de fonctions définies implicitement.
- 23 Applications du théorème des fonctions implicites.
- 24 Exemples d'utilisation de changements de variables en analyse et en géométrie.
- 25 Fonctions convexes d'une variable réelle,applications.
- 26
- 27 Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.
- 28 Exemples d'étude qualitative des solutions ou des courbes intégrales d'une équation différentielle.
- 29 Fonctions de plusieurs variables réelles ; théorème des accroissements finis et applications.
- 30 Fonctions indéfiniment différentiables.
- 31 Différentes formules de Taylor . Majoration des restes . Applications.
- 32 Problèmes d'extremum.
- 33 Développements limités,applications.
- 34 Exemples de développements asymptotiques.
- 35 Intégrales impropres ; exemples .
- 36 Problèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale . Exemples.
- 37 Problèmes de dérivabilité en calcul intégral.
- 38 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
- 39 Exemples de calcul d'intégrales .
- 40 Méthodes de calcul approché d'intégrales.
- 41 Séries , Sommation par paquets .
- 42 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
- 43 Calcul approché de la somme d'une série numérique.
- 44 Comparaison d'une série et d'une intégrale . Applications .
- 45 Exemples d'étude d'une fonction définie par une série.
- 46 Différentes notions de convergence d'une suite de fonctions , Exemples.
- 47 Séries de fonctions,convergence uniforme,convergence normale;exemples.
- 48 Exemples de problèmes d'interversion de limites.
- 49 Convergence d'une série entière . Propriétés de la somme d'une telle série.
- 50 Exemples de développement d'une fonction en série entière.Applications.
- 51
- 52 Solutions des équations différentielles $y'=f(x,y)$; solutions maximales.
- 53 Equations différentielles linéaires.
- 54 Etude détaillée,sur un petit nombre d'exemples,d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.

- 55 Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles.
- 56
- 57
- 58
- 59
- 60
- 61
- 62
- 63
- 64
- 65 Calcul approché de solutions des équations $f(x)=0$.
- 66 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales.
- 67 Théorèmes limites en calcul des probabilités ; Applications.
- 68 Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).
- 69 Probabilité conditionnelle . Exemples.
- 70 Loi binomiale , loi de Poisson.
- 71 Etude locale de champs de vecteurs. Exemples .
- 72 Exemples de méthodes numériques pour le calcul approché des fonctions élémentaires .
- 73 Présenter, sur des exemples, une ou plusieurs méthodes de résolution approchée d'équations différentielles .
- 74
- 75 Fonctions périodiques .
- 76 Séries de Fourier.
- 77 Exemples d'applications des séries de Fourier.
- 78 Espaces de Hilbert ; applications.
- 79 Exemples d'extension au domaine complexe de fonctions d'une variable réelle.
- 80 Le modèle probabiliste : illustration par des exemples.
- 81 Fonctions définies par une intégrale.
- 82 Exemples de passage du local au global.
- 83 Indépendance d'événements et de variable aléatoires. Exemples.
- 84. Utilisation d'espaces complets pour résoudre des problèmes d'analyse.

BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Pendant la préparation de l'oral, les candidats peuvent utiliser les ouvrages mis à leur disposition sur place, dont la liste figure ci-après, ou les ouvrages qu'ils ont apportés eux-mêmes, à condition qu'il s'agisse de livres imprimés, diffusés dans le commerce et dépourvus de notes manuscrites.

En outre, les Ecoles Normales Supérieures déposent un nombre important d'ouvrages à la bibliothèque de l'agrégation pendant la durée du concours: ces ouvrages peuvent bien entendu être consultés par tous les candidats.

La documentation utilisée par les candidats ne saurait contenir des ouvrages que ceux-ci n'auraient qu'à recopier, ce qui ôterait toute signification à l'épreuve. Le jury se réserve donc le droit de ne pas autoriser un ouvrage de ce type, même muni du dépôt légal.

D'autre part, la restriction aux ouvrages imprimés et diffusés dans le commerce répond à un souci d'équité: tout candidat doit pouvoir en principe se procurer tout document autorisé.

Pour ces raisons, le jury n'autorise pas l'usage de montages "raisonnés" d'extraits photocopiés d'articles de revues ou d'encyclopédies; l'utilisation publique de tels montages contrevient en outre aux lois sur le copyright.

Le jury attire enfin l'attention des candidats sur le fait que l'usage ou la tentative d'usage de documents non autorisés pendant la préparation des épreuves orales constitue une fraude ou une tentative de fraude à un concours public et serait sanctionné comme tel.

**Liste des ouvrages constituant la bibliothèque de l'agrégation de
mathématiques en 1987**

ARNOLD	<i>Equations différentielles ordinaires</i>	(MIR)
ARTIN	<i>Algèbre Géométrique</i>	(Gauthier-Villars)
BASS	<i>Cours de Mathématiques, tomes 1 et 2</i>	(Masson)
BERGER	<i>Géométrie, index, tomes 1 à 5</i>	(CEDIC-Nathan)
	<i>Problèmes de Géométrie rédigés et commentés</i>	(Colin)
BERGER et GOSTIAUX	<i>Géométrie différentielle</i>	(Colin)
BIRKHOFF et MACLANE	<i>Algèbre: 1. Structures fondamentales</i>	
	<i>2. Les grands théorèmes</i>	(Gauthier-Villars)
BLANCHARD	<i>Les corps non commutatifs</i>	(P.U.F.)
BOUREAKI	les volumes suivants:	(Hermann)
	<i>Théorie des ensembles</i>	
	<i>Algèbre</i>	
	<i>Fonctions d'une variable réelle</i>	
	<i>Topologie générale</i>	
	<i>Espaces vectoriels topologiques</i>	
	<i>Intégration</i>	
BOUYIER et RICHARD	<i>Groupes</i>	(Hermann)
BROUSSE	<i>Mécanique</i>	(Colin)
CABANNES	<i>Cours de mécanique générale</i>	(Dunod)
CAGNAC, RAMIS, COMMEAU	<i>Nouveau cours de Mathématiques Spéciales</i>	(Masson)
CAGNAC et THIBERGE	<i>Géométrie, classes terminales C</i>	(Masson)
CARTAN	<i>Fonctions analytiques</i>	(Hermann)
	<i>Formes différentielles</i>	(Hermann)
	<i>Calcul différentiel</i>	(Hermann)
CHAMBADAL et OYAERT	<i>Cours de Mathématiques tomes 1 et 2</i>	(Gauthier-Villars)
CHEVALLARD et ROLLAND	<i>Théorie des séries</i>	(CEDIC)
CHOQUET	<i>Cours d'analyse</i>	(Masson)
	<i>L'enseignement de la géométrie</i>	(Hermann)
CIARLET	<i>Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation</i>	(Masson)
COUTY	<i>Analyse</i>	(Colin)
CROUZÉ et MIGNOT	<i>Analyse numérique des équations différentielles</i>	(Masson)
DEHEUVELS	<i>Formes Quadratiques et Groupes classiques</i>	(P.U.F.)

DIEUDONNE	<i>Algèbre linéaire et géométrie élémentaire</i> (Hermann)	
	<i>Sur les groupes classiques</i>	(Hermann)
	<i>Calcul infinitésimal</i>	(Hermann)
	<i>Éléments d'analyse</i> , tomes 1 et 2	(Gauthier-Villars)
DIXMIER	<i>Analyse M.P.</i>	(Gauthier-Villars)
DUBREIL	<i>Leçons d'algèbre moderne</i>	(Dunod)
DUBUC	<i>Géométrie plane</i>	(P.U.F.)
EXBRAYAT et MAZET	<i>Algèbre, Analyse, Topologie</i>	
FADEEV et SOMINSKY	<i>Recueil d'exercices d'algèbre supérieure</i>	(MIR)
FELLER	<i>An introduction to probability theory and its applications</i> , tomes 1 et 2	(Wiley)
FLORY	<i>Exercices de Topologie et d'Analyse</i> , tomes 1 à 4	(Yuibert)
FRENKEL	<i>Algèbre et Géométrie</i>	(Hermann)
	<i>Géométrie pour l'élève professeur</i>	
GANTMACHER	<i>Théorie des matrices</i>	(Dunod)
GENET	<i>Mesure et Intégration</i>	(Yuibert)
GODEMENT	<i>Algèbre</i>	(Hermann)
HARDY et WRIGHT	<i>An introduction to the theory of numbers</i> (5th edition)	(Oxford)
HENNEQUIN et TORTRAT	<i>Théorie des probabilités et quelques applications</i>	(Masson)
HERVE	<i>Les fonctions analytiques</i>	(P.U.F.)
JACOBSON	<i>Basic algebra</i> , tomes 1 et 2	(Freeman)
KERBRAT	<i>Géométrie des courbes et des surfaces</i>	(Hermann)
KNUTH	<i>The art of computer programming</i> , (vol. 1, 2, 3)	(Addison-Wesley)
KREE	<i>Introduction aux mathématiques appliquées</i>	(Dunod)
KRIVINE	<i>Théorie axiomatique des ensembles</i>	(P.U.F.)
LANC	<i>Introduction aux variétés différentiables</i>	
	<i>Algèbre</i>	
	<i>Linear Algebra</i>	(Addison-Wesley)
D. LEHMANN-C. SACRE	<i>Géométrie différentielle des surfaces</i>	(P.U.F.)
LELONG-FERRAND et ARNAUDIES	<i>Cours de mathématiques</i> , tomes 1 à 4	(Dunod)
LELONG-FERRAND	<i>Géométrie différentielle</i>	(Masson)
MALLIAVIN	<i>Géométrie différentielle intrinsèque</i>	(Hermann)
MARTIN	<i>Géométrie</i>	(Colin)

METIVIER	<i>Introduction à la théorie des probabilités</i>	(Dunod)
MUTAFIAN	<i>Le défi algébrique (tomes 1 et 2)</i>	(Yuibert)
NEYEU	<i>Bases mathématiques du calcul des probabilités</i>	(Masson)
QVAERT et VERLEY	<i>Exercices et Problèmes, Classes Préparatoires et 1er cycle, Algèbre (vol. 1), Analyse (vol. 1)</i>	(CEDIC-Nathan)
PERRIN	<i>Cours d'algèbre</i>	(E.N.S.J.F.)
POLYA et SZEGO	<i>Problems and theorems in analysis (tomes 1 et 2)</i>	(Springer)
QUERRE	<i>Cours d'algèbre</i>	(Masson)
QUEYSANNE	<i>Algèbre</i>	(Colin)
RALSTON et RABINOWITZ	<i>A first course in numerical analysis</i>	(McGraw-Hill)
RAMIS, DESCHAMPS, et ODOUX	<i>Mathématiques spéciales (tomes 1 à 5)</i>	(Masson)
RIDEAU	<i>Exercices de calcul différentiel</i>	(Hermann)
RIESZ et NAGY	<i>Leçons d'analyse fonctionnelle</i>	(Gauthier-Villars)
RUDIN	<i>Real and complex analysis</i>	(Mac Graw-Hill)
SAMUEL	<i>Théorie algébrique des nombres</i>	(Hermann)
SCHWARTZ	<i>Cours d'analyse (tomes 1 et 2)</i> <i>Topologie Générale et Analyse fonctionnelle</i>	(Hermann)
SEDGEWICK	<i>Algorithms</i>	(Addison-Wesley)
SERRE	<i>Cours d'arithmétique</i>	(P.U.F.)
SAMUEL	<i>Géométrie projective</i>	(P.U.F.)
TITCHMARSH	<i>The theory of functions (2nd edition)</i>	(Oxford)
VALIRON	<i>Cours d'analyse (tomes 1 et 2)</i>	(Masson)
YAUQUOIS	<i>Les probabilités</i>	(Hermann)
WARUSFEL	<i>Structures algébriques finies</i>	(Hachette)