PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et la numérotation des questions.

DÉFINITIONS - NOTATIONS - RAPPELS

1° On note : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\overline{\mathbb{N}}^* = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. L'adjectif «*réel*» (resp^t *numérique*) se rapportera à un élément de $\mathbb{R}$ (resp^t $\overline{\mathbb{R}}$). $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp^t $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$) est l'ensemble des suites réelles indexées sur $\mathbb{N}$ (resp^t $\mathbb{N}^*$). Si $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on note $\underline{x}_n$ le n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$.

2° Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique, on note $\overline{\lim}\, a_n$ (resp^t $\underline{\lim}\, a_n$) la *limite supérieure* (resp^t *inférieure*) de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Tous les objets définis ci-dessous le seront sur un espace probabilisé $(E, \mathcal{E}, \mu)$ quelconque.

3° α étant une mesure positive sur $(E, \mathcal{E})$ et f une fonction numérique positive (i.e. $f \geqslant 0$) sur E, $\mathcal{E}$-mesurable, $f \cdot \alpha$ désigne la *mesure de densité f par rapport à α* $\left(\forall A \in \mathcal{E},\ (f \cdot \alpha)(A) = \int_A f \, d\alpha\right)$.

4° v.a. (resp^t v.a.r., v.a.n.) est l'abréviation de *variable aléatoire,* i.e. application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans un autre espace mesurable (resp^t v.a. réelle, v.a. numérique). Y étant une v.a., on note μ_Y sa *loi,* i.e. la mesure image de μ par Y.

a. Si U est une v.a.n. μ-intégrable, on note $E_\mu U = \int U \, d\mu$ (ou, s'il n'y a pas ambiguïté, EU).

b. De même, si $\mathcal{F}$ est une sous-tribu de $\mathcal{E}$, $E_\mu^{\mathcal{F}} U$ est l'espérance conditionnelle de U relativement à $\mathcal{F}$ pour la probabilité μ. Lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, on la notera $E^{\mathcal{F}} U$ et on notera de manière identique un représentant et sa classe μ- p.s..

5° Si $A, B \in \mathcal{E}$, on note $A \subset B$ μ- p.s. le fait que $\mu(\mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B) = 1$ et $A = B$ μ-p.s. le fait que $\mu(\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B) = 1$.

($\mathbf{1}_A$ désigne la *fonction indicatrice* de la partie A.)

— *Les définitions suivantes s'adaptent immédiatement au cas où l'ensemble d'indice est* $\mathbb{N}^*$ *au lieu de* $\mathbb{N}$.

6° Si $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r., on note $(U_n \to)$ l'ensemble des éléments e de E tels que la suite réelle $\big(U_n(e)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ soit *convergente dans* $\mathbb{R}$.

7° Soient $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante ($\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) de sous-tribus de $\mathcal{E}$ et $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. ;

a. La suite U est dite $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$-adaptée si U_n est $\mathcal{E}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. U est une *sous-martingale* (respt *martingale*) si elle est adaptée, si, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, U_n est μ-intégrable et si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad E_\mu^{\mathcal{E}_{n-1}} (U_n - U_{n-1}) \geq 0 \text{ (resp}^t = 0).$$

(Si besoin, on précisera les éléments de référence; exemple : U est une μ-sous-martingale relativement à $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.)

c. Une *martingale* $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *bornée* dans $L^1(\mu)$ si $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_\mu |U_n| < +\infty$.

Dans tout le problème, on utilisera (sans les démontrer), ***les résultats suivants :***

TH 1 | **Si $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans $L^1(\mu)$, on a : $\mu\,(U_n \rightarrow) = 1$.**

TH 2 | **Soit $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-martingale. S'il existe $c > 0$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \, |U_n - U_{n-1}| \leq c$, alors :**

$$(U_n \rightarrow) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_\mu^{\mathcal{E}_{n-1}} \left[(U_n - U_{n-1}) + (U_n - U_{n-1})^2 \right] < +\infty \right) \quad \mu\text{-p.s.}$$

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ de loi respective $N(0, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}^*$, où $\sigma_n > 0$, et $N(m, \sigma^2)$ désigne la loi gaussienne sur $\mathbb{R}$ de moyenne m et variance σ^2. Soient θ et $\tilde{\theta}$ deux réels distincts. On définit les deux suites de v.a.r. $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par les équations :

$$\left\{ \begin{aligned} X_n &= \theta X_{n-1} + U_n \\ \tilde{X}_n &= \tilde{\theta} \tilde{X}_{n-1} + U_n \\ X_1 &= \tilde{X}_1 = U_1 \end{aligned} \right. \qquad \forall\, n \geq 2.$$

On posera par la suite : $X_0 = \tilde{X}_0 = 0$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\underline{X}_n = (X_1, \ldots, X_n) \qquad , \underline{\tilde{X}}_n = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n).$$

1. ***a.*** **α. Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\underline{X}_n$ (respt $\underline{\tilde{X}}_n$) est une mesure de densité *(notée)* $\underline{Q}_n$ (respt $\underline{\tilde{Q}}_n$) par rapport à la mesure de Lebesgue λ_n de $\mathbb{R}^n$, et que $\underline{Q}_n$ et $\underline{\tilde{Q}}_n$ peuvent être choisies strictement positives sur tout $\mathbb{R}^n$. (On ne demande pas une expression analytique de $\underline{Q}_n$ et $\underline{\tilde{Q}}_n$.) $\underline{Q}_n$ et $\underline{\tilde{Q}}_n$ seront ainsi choisies par la suite.**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \dfrac{X_{n-1}}{\sigma_n}$ et $\underline{V}_n = (V_1, \ldots, V_n)$.

1. ***a.*** **β. À quel type de loi obéit la v.a. $\underline{V}_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$? Quel est le vecteur moyenne de $\underline{V}_n$?**

1. ***a.*** **γ. On note Λ la matrice de covariance de $\underline{V}_n$ et C une matrice orthogonale telle que $C \Lambda C^* = D$ soit diagonale (C^* est la transposée de C).**

On note R la matrice diagonale n x n définie par :

$$R_{ii} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{D_{ii}}} & \text{si } D_{ii} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Soit $\Phi = RC\underline{V}_n$. Préciser la loi de Φ.

1. *a*. δ. Si $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^n$ et $< \cdot , \cdot >$ le produit scalaire associé, démontrer que :

$$\| \underline{V}_n \|^2 \geqslant < D\Phi, \Phi >$$

et en déduire que :

$$E\, e^{-\| \underline{V}_n \|^2} \leqslant \prod_{i\,:\,D_{ii} > 0} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\, D_{ii}}}$$

1. *a*. ε. Établir alors l'inégalité :

$$E \| \underline{V}_n \|^2 \leqslant \frac{1}{\left[E\, e^{-\| \underline{V}_n \|^2}\right]^2}$$

1. *a*. ζ. Démontrer les équivalences :

$$P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 < +\infty\right] = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 < +\infty$$

$$P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 = +\infty\right] = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 = +\infty$$

1. *b*. ● On note encore X (resp^t $\tilde{X}$) l'application : $\omega \rightsquigarrow \left(X_n(\omega)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (respectivement : $\omega \rightsquigarrow \left(\tilde{X}_n(\omega)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$) de Ω dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

$\forall j \in \mathbb{N}^*$, π_j est la j-ème projection de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$: $\pi_j(x) = x_j$, pour tout élément $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ étant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, on définit alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\mathcal{C}_n$ de parties de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$: $\mathcal{C}_n = \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(A_j) \mid A_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, j = 1, \ldots n \right\}$ et $\mathcal{C}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}_n$. Pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}^*$, $\mathcal{B}_n$ est alors la tribu sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ engendrée par $\mathcal{C}_n$.

1. *b*. α. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_\infty$.

1. *b*. β. Démontrer que X (resp^t $\tilde{X}$) est une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$.

1. *b*. γ. Si Q_n (resp^t $\tilde{Q}_n$) est la fonction positive définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ par, $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$: $Q_n(x) = \underline{Q}_n(\underline{x}_n)$ (resp^t $\tilde{Q}_n(x) = \underline{\tilde{Q}}_n(\underline{x}_n)$), où $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que Q_n et $\tilde{Q}_n$ sont $\mathcal{B}_n$– mesurables.

● μ (resp^t $\tilde{\mu}$) est la loi de X (resp^t $\tilde{X}$), c'est-à-dire la probabilité image de P par X (resp^t $\tilde{X}$).

Si α et β sont deux probabilités sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$, on définit les trois relations :

$$\alpha \ll \beta \Leftrightarrow \left(A \in \mathcal{B}_\infty \text{ et } \beta(A) = 0 \quad \Rightarrow \alpha(A) = 0\right)$$

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow (\alpha \ll \beta \text{ et } \beta \ll \alpha)$$

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \left(\exists\, A \in \mathcal{B}_\infty \text{ tel que } \alpha(A) = 1 \text{ et } \beta(A) = 0\right).$$

Le but de ce problème est d'établir un critère explicite déterminant dans quel cas l'une de ces relations est satisfaite entre μ et $\tilde{\mu}$.

— On définit les probabilités sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$: $\nu = \frac{1}{2}(\mu + \tilde{\mu})$, $\mu_n = \mu_{|\mathcal{B}_n}$, $\tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}_{|\mathcal{B}_n}$, $\nu_n = \frac{1}{2}(\mu_n + \tilde{\mu}_n)$ où, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_{|\mathcal{B}_n}$ (resp^t $\tilde{\mu}_{|\mathcal{B}_n}$) est la restriction de μ (resp^t $\tilde{\mu}$) à $\mathcal{B}_n$.

— On définit, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, les v.a. définies sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$ par :

$$Z_n = \frac{\tilde{Q}_n}{Q_n} \qquad Y_n = \frac{2\,Q_n}{Q_n + \tilde{Q}_n} \qquad \tilde{Y}_n = \frac{2\,\tilde{Q}_n}{Q_n + \tilde{Q}_n}$$

et $\quad Z_\infty = \overline{\lim}\, Z_n \qquad Y_\infty = \overline{\lim}\, Y_n \qquad \tilde{Y}_\infty = \overline{\lim}\, \tilde{Y}_n$.

2. *a*. α. Si $A_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $\forall\, j = 1, \ldots, n$, justifier la formule :

$$\tilde{\mu}_n\left(\bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(A_j)\right) = \int_{A_1 \times \ldots \times A_n} \tilde{Q}_n \, d\lambda_n$$

et exprimer la probabilité $\tilde{\mu}_n$ à l'aide de Z_n et μ_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

2. *a*. β. Démontrer que $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une μ– martingale $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$– adaptée et bornée dans $\mathbf{L}^1(\mu)$. Que dire de la convergence μ - p.s. de la suite Z. (Utiliser TH 1) ? Que vaut $\mu(Z_\infty = +\infty)$?

2. *a*. γ. Exprimer la probabilité μ_n (resp^t $\tilde{\mu}_n$) à l'aide de Y_n (resp^t $\tilde{Y}_n$) et ν_n.

2. *a*. δ. Démontrer que $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp^t $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est une ν– martingale $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$– adaptée et en déduire la convergence de la suite Y (resp^t $\tilde{Y}$) ν– p.s. et dans $\mathbf{L}^1(\nu)$. Établir alors que : $\tilde{Y}_\infty = Z_\infty \cdot Y_\infty$ ν– p.s.

2. *b*. α. Vérifier que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, A \in \mathcal{B}_n$: $\mu(A) = \int_A Y_\infty \, d\nu$, puis en déduire que $\mu = Y_\infty \cdot \nu$. Écrire le résultat analogue pour $\tilde{\mu}$ sans le démontrer.

2. *b*. β. Vérifier que, $\forall\, A \in \mathcal{B}_\infty$:

(F 1) $$\tilde{\mu}(A) = \int_A \frac{\tilde{Y}_\infty}{Y_\infty} \mathbf{1}_{(Y_\infty \neq 0)} \, d\mu + \int_A \tilde{Y}_\infty \mathbf{1}_{(Y_\infty = 0)} \, d\nu.$$

2. *b*. γ. En déduire la formule D.L. :

(D.L.) $$\forall\, A \in \mathcal{B}_\infty, \quad \tilde{\mu}(A) = \int_A Z_\infty \, d\mu + \tilde{\mu}\left[A \cap (Z_\infty = +\infty)\right].$$

2. *b*. δ. Démontrer brièvement la formule :

$$\int \varphi \, d\tilde{\mu} = \int \varphi \, Z_\infty \, d\mu + \int \mathbf{1}_{(Z_\infty = +\infty)} \, \varphi \, d\tilde{\mu}$$

pour toute v.a.n. φ définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}_\infty)$ positive ou bornée.

2. *b*. ε. Démontrer à l'aide de (D.L.) les équivalences suivantes :

(F 2) $$\tilde{\mu} \ll \mu \Leftrightarrow E_\mu Z_\infty = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty < +\infty) = 1$$

(F 3) $$\tilde{\mu} \perp \mu \Leftrightarrow E_\mu Z_\infty = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty < +\infty) = 0$$

3. ● *On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_n = \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}}$ avec $Z_0 = 1$.

$\mathcal{B}_0$ *est la tribu triviale* $\{ \varnothing , \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \}$. *On se propose d'établir les équivalences suivantes :*

$$\text{(F 4)} \qquad \tilde{\mu} \ll \mu \Leftrightarrow \tilde{\mu}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}} \sqrt{\alpha_n}\right) < +\infty\right] = 1$$

$$\text{(F 5)} \qquad \tilde{\mu} \perp \mu \Leftrightarrow \tilde{\mu}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}} \sqrt{\alpha_n}\right) = +\infty\right] = 1$$

3. *a.* α Démontrer que, $\tilde{\mu}$-p.s. :

$$(Z_\infty < +\infty) = (0 < Z_\infty < +\infty) = (Z_n \to)$$

— *Soit* u *la fonction réelle définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ \text{signe }(x) & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

3. *a.* β. Vérifier que $\tilde{\mu}$-p.s. $(Z_\infty < \infty) = \left(\sum_{k=1}^{n} u(\operatorname{Log} \alpha_k) \to\right)$.

3. *b.* α. Démontrer que si ψ est une v.a.r. $\mathcal{B}_n$ - mesurable positive ou bornée définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on a :

$$E_{\tilde{\mu}}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi) = E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi\, \alpha_n) \quad \tilde{\mu}\text{-p.s.}$$

3. *b.* β. En déduire $E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\alpha_n)$ $\tilde{\mu}$-p.s.

3. *b.* γ. Soit, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} u(\operatorname{Log} \alpha_k)$.

Démontrer que $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une $\tilde{\mu}$- sous-martingale $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ - adaptée. *(On admettra l'inégalité :* $x u(\operatorname{Log} x) \geqslant x - 1 \quad \forall\, x > 0$.*)*

3. *b.* δ. Établir (F 4) et (F 5) en utilisant la propriété TH 2 et la double inégalité *(que l'on ne demande pas de démontrer)* : il existe A, B tels que $0 < A < B < +\infty$ et, $\forall\, x > 0$:

$$A\,(1 - \sqrt{x})^2 \leqslant x\, u(\operatorname{Log} x) + x\, u^2(\operatorname{Log} x) + 1 - x \leqslant B\,(1 - \sqrt{x})^2.$$

4. *a.* α. Calculer explicitement α_n.

4. *a.* β. Utiliser alors 3.b.α. pour donner une expression analytique de $E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\sqrt{\alpha_n})$ $\tilde{\mu}$-p.s..

4. *b*. α. En déduire alors les équivalences :

$$\mu \ll \tilde{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mathrm{X}}_{n-1}^2}{\sigma_n^2} < +\infty\right] = 1$$

$$\mu \perp \tilde{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mathrm{X}}_{n-1}^2}{\sigma_n^2} = +\infty\right] = 1$$

4. *b*. β. Démontrer que l'on a l'alternative :

$$\mu \sim \tilde{\mu} \quad \text{ou} \quad \mu \perp \tilde{\mu} \qquad \textit{(utiliser 1. a. } \zeta.\textit{)}.$$

4. *b*. γ. En particulier, si $\tilde{\theta} = 0$, $\tilde{\mathrm{X}} = (\mathrm{U}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Caractériser alors l'alternative en terme de la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.