Analyse du sujet.

Le thème de ce problème était la comparaison des lois de deux processus gaussiens particuliers avec critères explicites d'équivalence ou d'étrangeté de ces lois. L'étude s'appuyait sur des travaux généraux de comparaison de mesures de N. SHIRAYEV. Les points fondamentaux du programme apparaissaient successivement : variables aléatoires gaussiennes dans $\mathbb{R}^n$ (très souvent mal connues des candidats), convergence p.s., théorèmes de convergence monotone et dominée dans la première partie, mesurabilité, loi et théorème de transfert, densité et enfin espérance conditionnelle dans la deuxième partie ; cette dernière notion était utilisée plus en profondeur dans la troisième partie. La quatrième partie utilisait la notion de loi et densité conditionnelle et donnait lieu à des calculs explicites classiques sur les densités gaussiennes.

Corrigé résumé.

Souvent le corrigé des questions sera suivi d'un commentaire noté (com).

1.a.α) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{X}_n$ est une fonction linéaire de $\underline{U}_n$. $\underline{U}_n$ ayant toutes ses composantes gaussiennes et indépendantes, $\underline{U}_n$ est gaussienne et donc aussi $\underline{X}_n$. σ_n étant non nul pour tout n, $\underline{U}_n$ admet une densité dans $\mathbb{R}^n$ par ailleurs la transformation linéaire donnant $\underline{X}_n$ en fonction de $\underline{U}_n$ est trivialement inversible et donc $\underline{X}_n$ admet une densité $\underline{Q}_n$ dont le rapport est $\mathbb{R}^n$ tout entier. Il en est de même pour $\underline{\tilde{X}}_n$.

(com) beaucoup de candidats ont une mauvaise connaissance des v.a. gaussiennes. Toute très répandue : "$\underline{X}_n$ a ses composantes gaussiennes <u>donc</u> $\underline{X}_n$ est une v.a. gaussienne" !

1.a.β) $\underline{V}_n$ étant un transformé linéaire de $\underline{X}_{n-1}$, est gaussien. On a $EV_n = \frac{1}{\sigma_n} EX_{n-1} = 0$ (se voit par itération, les U_n étant centrées) et donc $E\underline{V}_n = 0$.

(com) $V_1 = 0$ et par conséquent $\underline{V}_n$ n'admet pas de densité, contrairement à ce que beaucoup de candidats affirment.

1.a.γ) $\phi = R\mathcal{C}\underline{V}_n$ est encore gaussien centré ; sa matrice de covariance Λ_ϕ est donnée par : $\Lambda_\phi = R\mathcal{C}\Lambda(R\mathcal{C})^* = RDR$ soit $(\Lambda_\phi)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \text{ et } D_{ii}> \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(com) assez bien traité.

1.a.δ) C étant orthogonale et $D^{\frac{1}{2}}R$ étant un projecteur orthogonal :

$\|\underline{V}_n\|^2 = \|C\,\underline{V}_n\|^2 \geqslant \|D^{\frac{1}{2}}R)C\,\underline{V}_n\|^2 = \|D^{\frac{1}{2}}\phi\|^2$ d'où $\|\underline{V}_n\|^2 \geqslant \langle D\phi,\phi\rangle$.

Alors, les ϕ_i étant indépendantes de loi $N(0,1)$, si $D_{ii} > 0$:

$$E\,e^{-\|\underline{V}_n\|^2} \leqslant E\,e^{-\langle D\phi,\phi\rangle} = \prod_{i:D_{ii}>0} (E\,e^{-D_{ii}\phi_i^2}) = \prod_{i:D_{ii}>0} \frac{1}{\sqrt{1+2D_{ii}}}$$

(com) on voit souvent des calculs d'une page pour démontrer la première inégalité !

1.a.ε) $\underline{V}_n$ étant centré :

$$E\|\underline{V}_n\|^2 = \operatorname{tr}\Lambda = \operatorname{tr} D = \sum_{i:D_{ii}>0} D_{ii} \leqslant \prod_{i:D_{ii}>0} (1+2D_{ii})$$

d'où $$E\|\underline{V}_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\left[E\,e^{-\|\underline{V}_n\|^2}\right]^2}$$

(com) assez bien traité.

1.a.ζ) Puisque $\|\underline{V}_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} V_j^2$ et que $E\,e^{-V_1^2} = 1$, il résulte du théorème de convergence monotone pour les suites croissantes <u>et</u> décroissantes que :

$$(1.a.\zeta.1) \qquad E\Big(\sum_{j=1}^{\infty} V_j^2\Big) \leqslant \frac{1}{\left[E\,e^{-\sum_{j=1}^{\infty} V_j^2}\right]^2}.$$

Alors, si $\sum_{j=1}^{\infty} V_j^2 < \infty$ P-p.a., le membre de droite est fini et $E(\sum_{j=1}^{\infty} V_j^2) < \infty$.

La réciproque est trivialement vraie.

Pour la seconde équivalence, si $\sum_{n=1}^{\infty} E\,V_n^2 = +\infty$, il résulte de (1.a.ζ.1) que $E\,e^{-\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2} = 0$ et donc, $P[\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2 = +\infty] = 1$; la réciproque est triviale.

(com) ce passage à la limite dans l'inégalité 1.a.ε) aurait permis la clarté et la concision des solutions ; même les parties triviales (résultats élémentaires d'intégration) sont souvent l'objet d'erreurs grossières.

1.b.α) $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}$ (prendre $\bigcap_{j=1}^{n} \Pi_j^{-1}(A_j) = \bigcap_{j=1}^{n+1} \Pi_j^{-1}(A_j)$ avec $A_{n+1} = \mathbb{R}$).
Il en résulte que $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$. De plus $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_\infty$, d'où $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_\infty$.

1.b.β) $\mathcal{C}_\infty = \bigcup_n \mathcal{C}_n$ étant un système générateur de $\mathcal{B}_\infty$, il suffit de montrer que $\forall n$, $\forall A \in \mathcal{C}_n$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Or si $A = \bigcap_{j=1}^{n} \Pi_j^{-1}(A_j)$, on a :

$$X^{-1}(A) = \bigcap_{j=1}^{n} X^{-1}(\Pi_j^{-1}(A)) = \bigcap_{j=1}^{n} (\Pi_j \circ X)^{-1}(A_j)$$

d'où $X^{-1}(A) = \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}(A_j) \in \mathcal{A}$ car X_j, $j=1,\dots,n$, est une v.a.r..

(com) cette question a souvent été mal abordée ! Elle permettait pourtant de se familiariser avec les v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ avant d'étudier leur loi.

1.b.γ) $Q_n = \underline{Q}_n \circ (\Pi_1,\dots,\Pi_n)$. $(\Pi_1,\dots,\Pi_n)$ étant $(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$-mesurable, ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$), Q_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable comme composée d'applications mesurables.

(com) L'énoncé faisait nettement la distinction entre Q_n définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\underline{Q}_n$ sur $\mathbb{R}^n$; on trouve pourtant beaucoup de confusions entre ces tribus. La factorisation de Q_n est peu souvent vue.

2.a.α) $\mathcal{C}_n$ est un système générateur de $\mathcal{B}_n$ stable par intersection finie et engendre $\mathcal{B}_n$; la probabilité $\tilde{\mu}_n$ est alors entièrement déterminée par ses valeurs prises sur $\mathcal{C}_n$. Or, d'après 1.b.β), puisque $\tilde{\mu}_n = P_{\tilde{X}|\mathcal{B}_n}$:

$$\tilde{\mu}_n\left(\bigcap_{j=1}^{n} \Pi_j^{-1}(A_j)\right) = P\left[\bigcap_{j=1}^{n} (\tilde{X}_j^{-1}(A_j))\right]$$

$$= \int_{A_1\times\dots\times A_n} \tilde{\underline{Q}}_n \, d\, Z_n$$

car $\underline{Q}_n > 0$ partout $= \int_{A_1\times\dots\times A_n} \frac{\tilde{\underline{Q}}_n}{\underline{Q}_n} \underline{Q}_n \, d\, Z_n$

$$= \int_{A_1\times\dots\times A_n} \frac{\tilde{\underline{Q}}_n}{\underline{Q}_n} \, d\, P_{\underline{X}_n}$$

$$= \int \mathbb{1}_{A_1\times\ldots\times A_n} o(\Pi_1,\ldots,\Pi_n)\frac{\underline{\widetilde{Q}}_n\, o(\Pi_1,\ldots,\Pi_n)}{\underline{Q}_n\, o(\Pi_1,\ldots,\Pi_n)}\, d\, P_X$$

$$= \int_{\bigcap_{j=1}^{n} \Pi_j^{-1}(A_j)} Z_n\, d\, \mu_n .$$

(On a utilisé le fait que $\underline{X}_n = X\, o(\Pi_1,\ldots,\Pi_n)$ et le théorème de transfert). Il en résulte que $\widetilde{\mu}_n = Z_n.\mu_n$.

(com) si deux probabilités coïncident sur un système générateur stable par intersection finie, elles sont égales ; cette dernière propriété est souvent oubliée. Quant au théorème de transfert, peut pensent à l'utiliser. Cela provient sans doute d'un manque de prise de conscience de la nature des différents objets manipulés (en particulier sur quels espaces sont définis les v.a. et les mesures). Cette question a souvent été très mal traitée.

2.a.β) Z_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable puisque Q_n et $\widetilde{Q}_n$ le sont. Alors, puisque $Z_n \geqslant 0$: $E_\mu Z_n = \int Z_n\, d\,\mu_n = \widetilde{\mu}_n(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}) = 1$. Donc Z_n est μ-intégrable et $\sup E_\mu\, Z_n < +\infty$. De plus, $\forall A \in \mathcal{B}_n$, $\int_A Z_{n+1} d\mu = \int_A Z_{n+1} d\mu_{n+1} = \widetilde{\mu}_{n+1}(A)$ et $\int_A Z_n d\mu = \int_A d\mu_n = \widetilde{\mu}_n(A)$.

Mais $\mu_n = \mu_{n+1}|_{\mathcal{B}_n} = \mu|_{\mathcal{B}_n}$; il vient : $\int_A Z_{n+1} d\mu = \int_A Z_n d\mu$, $\forall A \in \mathcal{B}_N$ et, $\mathcal{B}_n$ étant $\mathcal{B}_n$-mesurable : $E_\mu^{\mathcal{B}_n} Z_{n+1} = Z_n$. $Z = (Z_n)$ est alors une martingale positive bornée dans $L^1(\mu)$. Elle converge dans $\mathbb{R}$ μ-p.s. (TH_1) vers Z_∞. Alors : $\mu(Z_\infty = +\infty) = 0$.

(com) cette question ne demandait que la connaissance de la définition de l'espérance conditionnelle, ce qu'un bon nombre de candidats n'ont pas l'air d'avoir ; assez bien traitée par ceux qui ont sû aller plus avant dans le problème.

2.a.γ) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \frac{2}{1+Z_n}$ et $\widetilde{Y}_n = Z_n Y_n$. Alors, d'après 2.a.α) : $v_n = \frac{1}{2}(1+Z_n).\mu_n = \frac{1}{Y_n}.\mu_n$; d'où, Y_n étant strictement positif, par le théorème d'intégration par rapport à une mesure à densité :

$$Y_n.v_n = Y_n.[\frac{1}{Y_n}.\mu_n] = \mu_n.$$

Ensuite : $\widetilde{\mu}_n = Z_n.\mu_n = Z_n.(Y_n.v_n) = (Z_n Y_n).v_n = \widetilde{Y}_n.v_n$.

(com) cette question a souvent été traitée très formellement par un calcul "algébrique" entre fonctions et mesures non justifié, et souvent non justifiable...!

2.a.δ) Y_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable puisque Z_n l'est. De plus $\forall A \in \mathcal{B}_n$, il résulte de 2.a.γ) que : $\int_A Y_{n+1} dv = \int_A Y_{n+1} dv_{n+1} = \mu_{n+1}(A)$ et de même $\int_A Y_n dv = \mu_n(A)$.

Puisque $\mu_{n+1}|\mathcal{B}_n = \mu_n$, il en résulte que : $E_v^{\mathcal{B}_n} Y_{n+1} = E_v^{\mathcal{B}_n} Y_n$, et que $\sup_n E_v Y_n = 1$.

Y est donc une martingale positive bornée dans $L^1(v)$. La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers Y_∞ v-p.s. (TH_1). La convergence a lieu aussi donc $L^1(v)$ par convergence dominée puisque, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq Y_n \leq 2$.

Il en est de même pour la suite (Y_n). Mais, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{Y}_n = Y_n . Z_n$. Il en résulte que, v-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$, la suite (Z_n) converge vers Z_∞ et que $\tilde{Y}_\infty = Y_\infty Z_\infty$ v-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$.

(com) : pour l'espérance conditionnelle, même remarque qu'en 2.a.β) ; par ailleurs le théorème de convergence dominée semble loin d'être acquis par bon nombre de candidats. Contrairement à ce qui était demandé, on a seulement $\tilde{Y}_\infty = Y_\infty Z_\infty$ v-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$ et non sur tout l'espace (sur $(Y_\infty = 0)$, Z_∞ est infini v-p.s.) ; il a été bien sûr tenu compte de cette erreur d'énoncé lors de la correction.

2.b.α) Soit $n_o \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq n_o$. $\forall A \in \mathcal{B}_{n_o}$ $(\subset \mathcal{B}_n)$, on a :

$$\mu(A) = \mu_n(A) = \int_A Y_n \, dv_n = \int_A Y_n \, dv.$$

La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant dans $L^1(v)$ vers Y_∞, il vient :

$$(*) \qquad (A) = \int_A Y_\infty dv \qquad \forall A \in \mathcal{B}_{n_o}, \quad \forall n_o \in \mathbb{N}^*.$$

(*) est encore vraie $\forall A \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{B}_n$, système générateur de $\mathcal{B}_\infty$ stable par intersection finie et donc $\mu = Y_\infty . v$ (de même $\tilde{\mu} = \tilde{Y}_\infty . v$).

2.b.β) On a, $\forall A \in \mathcal{B}_\infty$:

$$\tilde{\mu}(A) = \int_A \tilde{Y}_\infty dv = \int_A \frac{\tilde{Y}_\infty}{Y_\infty} Y_\infty \mathbb{1}_{(Y_\infty \neq 0)} dv + \int_A \tilde{Y}_\infty \mathbb{1}_{(Y_\infty = 0)} dv.$$

F_1 résulte alors de ce que : $\mu = Y_\infty . v$.

2.b.γ) On a vu en 2.a.δ) que $\tilde{Y}_\infty = Z_\infty Y_\infty$ v-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$; mais $\mu << v$; on a alors $Z_\infty = \frac{\tilde{Y}_\infty}{Y_\infty}$ μ-p.s. sur $(Y_\infty > 0)$. Comme de plus $\mu(Y_\infty = 0) = \int_{(Y = 0)} Y_\infty dv = 0$, il vient, $\forall A \in \mathcal{B}_\infty$:

$$\int_A \frac{\tilde{Y}_\infty}{Y_\infty} \mathbb{1}_{(Y \neq 0)} d\mu = \int_A Z_\infty \, d\mu.$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{2}{Y_n} - 1$. La suite (Z_n) est alors convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ v-p.s. et on a v-p.s. $(Y_\infty=0) = (Z_\infty=+\infty)$. D.L. résulte alors de F_1.

2.b.δ) La formule demandée est D.L. si $\phi = \mathbb{1}_A$ $(A \in \mathcal{B}_\infty)$. Par les procédés classiques d'intégration (fonctions étagées positives, limites croissantes de telles fonctions, décomposition en parties positive et négative), on obtient directement la formule pour toute v.a. ϕ $\mathcal{B}_\infty$-mesurable positive ou bornée.

2.b.ε) Puisque $\tilde{\mu}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}) = 1$, il résulte de D.L. les équivalences :

$$E_\mu Z_\infty = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty=\infty) = 0 \quad \text{et} \quad E_\mu Z_\infty = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty=\infty) = 1.$$

De D.L., il vient aussi que $\tilde{\mu}(Z_\infty=\infty) = 0 \Rightarrow \forall A \in \mathcal{B}_\infty$ $\tilde{\mu}(A) = \int_A Z_\infty d_\mu$ et donc $\tilde{\mu}(Z_\infty=\infty) = 0 \Rightarrow \tilde{\mu} \ll \mu$.

<u>Inversement</u>, si $\tilde{\mu} \ll \mu$, puisque d'après 2.a.β) $\mu(Z_\infty=\infty) = 0$, on a $\tilde{\mu}(Z_\infty=0) = 0$ et donc :

$$\tilde{\mu} \ll \mu \Rightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty<\infty) = 1$$

En réunissant ces trois résultats, on obtient F_2.

□ Si $\mu \perp \tilde{\mu}$, $\exists$ B $\in \mathcal{B}_\infty$ tel que $\mu(B) = 0$ et $\tilde{\mu}(B) = 1$ et donc, d'après D.L. : $1 = \tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(B \cap (Z_\infty=\infty))$ d'où $\mu \perp \tilde{\mu} \Rightarrow \tilde{\mu}(Z_\infty=\infty) = 1$.

<u>Inversement</u>, si $\tilde{\mu}(Z_\infty=\infty) = 1$, puisque $\mu(Z_\infty=\infty) = 0$, on a $\mu \perp \tilde{\mu}$; F_3 est établie.

(com) cette question a eu beaucoup de succès.

3.a.α) Z_∞ étant $\mathcal{B}_\infty$-mesurable, il résulte de D.L. que : $\tilde{\mu}(Z_\infty=0) = 0$, d'où : $\tilde{\mu}$-p.s. $(Z_\infty<\infty) = (0 < Z_\infty < \infty)$. Puisque $\tilde{\mu} \ll v$, il résulte de 2.b.γ que (Z_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ $\tilde{\mu}$-p.s. et donc $(Z_\infty<\infty) = (Z_n \longrightarrow)$ $\tilde{\mu}$-p.s..

(com) Cette question a été peu traitée.

3.a.β) Si $(a_n) \subset (\mathbb{R}^*)^+$, les suites de terme général $\sum_{k=1}^n \operatorname{Log} a_k$ et $\sum_{k=1}^n u(\operatorname{Log} a_k)$ convergent ou divergent dans $\mathbb{R}$ en même temps. Puisque $Z_n = e^{\sum_{k=1}^n \operatorname{Log} \alpha_k}$, il résulte de 3.a.α) que :

$\tilde{\mu}$-p.s. $\quad (Z_\infty < \infty) = (\sum_{k=1}^{n} \text{Log } \alpha_k \to) = (\sum_{k=1}^{n} u(\text{Log } \alpha_k) \to)$

(com) question très peu souvent traitée.

3.b.α) $\forall A \in \mathcal{B}_{n-1}$, $\forall\ \psi\ \mathcal{B}_n$-mesurable positive ou bornée, on a, utilisant 2.a.α) puis le fait que Z_{n-1} est strictement positif et $\mathcal{B}_{n-1}$-mesurable :

$$\int_A \psi\, d\tilde{\mu} = \int_A \psi\, d\tilde{\mu}_n = \int_A \psi\, Z_n\, d\mu_n = \int_A \psi\, \frac{Z_n}{Z_{n-1}}\, Z_{n-1} d\mu$$

$$= \int_A [E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi\alpha_n)] Z_{n-1}\, d\mu = \int_A [E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi\alpha_n)] Z_{n-1}] d\mu_{n-1}$$

$$= \int_A E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi\alpha_n) d\tilde{\mu}_{n-1} = \int_A E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi\alpha_n) d\tilde{\mu}.$$

Il en résulte que : $E_{\tilde{\mu}}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi) = E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\psi\alpha_n)$ $\tilde{\mu}$-p.s..

(com) outre le maniement des propriétés classiques de l'espérance conditionnelle, cette question exigeait un soin particulier dû à la présence des deux mesures μ et $\tilde{\mu}$.

3.b.β) En particulier, si $\psi = 1$, on obtient :

$$1 = E_{\tilde{\mu}}^{\mathcal{B}_{n-1}}(1) = E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\alpha_n) \ \tilde{\mu}\text{-p.s..}$$

3.b.γ) W_n est bien sûr $\mathcal{B}_n$-mesurable et $\tilde{\mu}$-intégrable. D'après 3.b.α), l'inégalité donnée et 3.b.β), on a, $\tilde{\mu}$-p.s. :

$$E_{\tilde{\mu}}^{\mathcal{B}_{n-1}}(W_n - W_{n-1}) = E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}[\alpha_n\ u(\text{Log } \alpha_n)] \geq E_\mu^{\mathcal{B}_{n-1}}(\alpha_n - 1) = 0.$$

(on a utilisé $\alpha_n > 0$).

W est alors une $\tilde{\mu}$-sous martingale.

(com) lorsqu'elle a été abordée, cette question a été bien traitée

3.b.δ) Alors, puisque $|W_n - W_{n-1}| \leq 1$, $\forall n \geq 2$, TH.2, 3.a.β), 3.b.α) et la double inégalité donnée permettent d'écrire :

$$\tilde{\mu}\text{-p.s.} \quad (Z_\infty < \infty) = (W_n \to) = (\sum_{k=1}^{\infty} E_{\tilde{\mu}}^{\mathcal{B}_{k-1}}[u(\text{Log } \alpha_k) + u^2(\text{Log } \alpha_k)] < \infty)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{\mu}^{\mathcal{B}_{k-1}}[\alpha_k\, u(\text{Log}\, \alpha_k) + \alpha_k\, u^2(\text{Log}\, \alpha_k)] < \infty\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{\mu}^{\mathcal{B}_{k-1}}(1-\sqrt{\alpha_k})^2 < \infty\right).$$

Développant le carré et tenant compte de 3.b.β) :

$$E_{\mu}^{\mathcal{B}_{k-1}}(1-\sqrt{\alpha_k})^2 = 2\, E_{\mu}^{\mathcal{B}_{k-1}}(1-\sqrt{\alpha_k})$$

d'où :

$$\tilde{\mu}\text{-p.s.}\quad (Z_{\infty} < \infty) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{\mu}^{\mathcal{B}_{k-1}}(1-\sqrt{\alpha_k}) < \infty\right).$$

De F_2 et F_3 résultent alors les équivalences : F_4 et F_5.

(com) même remarque qu'en 3.b.γ).

4.a.α) On a : $\alpha_n = \dfrac{\tilde{Q}_n}{Q_n}\dfrac{Q_{n-1}}{\tilde{Q}_{n-1}}$. Mais $\underline{X}_n = (\underline{X}_{n-1}, X_n)$; alors, $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$,

$\underline{Q}_n(\underline{x}_n) = \underline{Q}_{n-1}(\underline{x}_{n-1})\, f_{X_n}^{\underline{X}_{n-1}=\underline{x}_{n-1}}(x_n)$ où $f_{X_n}^{\underline{X}_{n-1}=\cdot}$ est une densité conditionnelle de X_n sachant $\underline{X}_{n-1}$, qui existe puisque $\underline{X}_n$ admet une densité. Il résulte de plus de l'équation de définition de X_n et de l'indépendance de $\underline{X}_{n-1}$ et U_n qu'une loi conditionnelle $P_{X_n}^{\underline{X}_{n-1}=\underline{x}_{n-1}}$ est égale à :

$$P_{\Theta x_{n-1}+U_n}^{\underline{X}_{n-1}=\underline{x}_{n-1}} = P_{\Theta x_{n-1}+U_n} = N(\Theta x_{n-1}, \sigma_n^2).$$

Alors :

$$\alpha_n(x) = \frac{f_{\tilde{X}_n}^{\tilde{\underline{X}}_{n-1}=\underline{x}_{n-1}}(x_n)}{f_{X_n}^{\underline{X}_{n-1}=\underline{x}_{n-1}}(x_n)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \quad \text{soit :}$$

$$\alpha_n(x) = e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_n-\tilde{\Theta}x_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 - \left(\frac{x_n-\Theta x_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2\right]}$$

(com) cette question, qui pouvait être traitée indépendamment des parties 2 et 3 n'a pas été abordée, à quelques exceptions près.

4.a.β) D'après 3.b.α) on a, en prenant $\psi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}$:

$$E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\sqrt{\alpha_n}) = E_{\tilde{\mu}}^{\mathcal{B}_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \quad \tilde{\mu}\text{-p.s. .}$$

$\forall A \in \mathcal{C}_{n-1}$ de la forme $A = \sum_{j=1}^{n-1} \Pi_j^{-1}(A_j)$, $A_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a, tenant compte de ce que : $\tilde{Q}_n(\underline{x}_n) = \tilde{Q}_{n-1}(\underline{x}_{n-1}) f_{\tilde{X}_n}^{\underline{X}_{n-1}=\underline{x}_{n-1}}(x_n)$:

$$\int_A E_{\tilde{\mu}}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) d\tilde{\mu} =$$

$$\int_{A_1\times\ldots\times A_{n-1}} e^{-\frac{1}{4}\left[-\left(\frac{x_n-\tilde{\Theta}x_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2+\left(\frac{x_n-\Theta x_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2\right]} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\tilde{\Theta}x_{n-1}}{\sigma_n}\right)}}{\sigma_n\sqrt{2\Pi}} \, Q_{n-1}(\underline{x}_{n-1})\, d\underline{x}_n$$

$$= \int 1_{A_1\times\ldots\times A_{n-1}}(\underline{x}_{n-1}) \left[\frac{}{\sigma_n\sqrt{2\Pi}} \int e^{-\frac{1}{4\sigma_n^2}\left[(x_n - x_{n-1})^2+(x_n - x_{n-1})^2\right]} dx_n\right] dP_{\tilde{\underline{X}}_{n-1}}(\underline{x}_{n-1})$$

la dernière égalité résultant du théorème de Fubini. Le crochet est égal à

$$\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\Pi}} \int e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(x_n - \frac{\Theta+\tilde{\Theta}}{2}x_{n-1}\right)^2 + x_{n-1}^2\left(\frac{\Theta-\tilde{\Theta}}{2}\right)^2} dx_n = e^{-\frac{x_{n-1}^2}{2}\left(\frac{\Theta-\tilde{\Theta}}{2\sigma_n}\right)^2} .$$

Alors, $\forall A \in \mathcal{C}_{n-1}$, et donc, toujours par le même argument, $\forall A \in \mathcal{B}_{n-1}$:

$$\int_A E_{\tilde{\mu}}^{\mathcal{B}_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) d\tilde{\mu} = \int_A e^{-\frac{x_{n-1}^2}{2}\left(\frac{\Theta-\tilde{\Theta}}{2\sigma_n}\right)^2} d\tilde{\mu}(x).$$

L'intégrant du membre de droite étant $\mathcal{B}_{n-1}$-mesurable, il vient :

$$E_{\mu}^{\mathcal{B}_{n-1}}(\sqrt{\alpha_n}) = E_{\tilde{\mu}}^{\mathcal{B}_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) = e^{-\frac{x_{n-1}^2}{2}\left(\frac{\Theta-\tilde{\Theta}}{2\sigma_n}\right)^2} \quad \tilde{\mu}\text{-p.s. .}$$

(com) traitée uniquement par quelques candidats, cette question ne nécessitait que des calculs simples sur les v.a. gaussiennes.

4.b.α) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est telle que $0 < u_n < 1$, les séries de terme général $|\mathrm{Log}\, u_n|$ et $1-u_n$ convergent ou divergent en même temps ; alors puisque $\Theta \neq \tilde{\Theta}$, il résulte de 4.a.β) que :

$$\tilde{\mu}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (1-E_{\mu}^{n-1}(\sqrt{\alpha_n})) < \infty\right] = P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{X}_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 < \infty\right]$$

F_4 et F_5 permettent de conclure.

4.b.β) Tenant compte de (1.a.ζ) et de l'équivalence analogue obtenue en changeant X en $\tilde{X}$, on obtient :

$$\mu \ll \tilde{\mu} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{\tilde{X}_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 < +\infty$$

$$\tilde{\mu} \ll \mu \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 < +\infty$$

$$\mu \perp \tilde{\mu} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{\tilde{X}_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 = +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{X_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 = +\infty$$

l'alternative est alors claire.

4.b.γ) En particulier si $\tilde{\Theta} = 0$, on a $\tilde{X}=U$ et $E\left(\frac{\tilde{X}_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n^2}$.

Alors : $$\mu \sim \tilde{\mu} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{n+1}^2} < +\infty$$

$$\mu \perp \tilde{\mu} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{n+1}^2} = +\infty.$$

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
143	79	43	37	31	11	12	5

nombre de copies (y compris les copies blanches) : 361.