MÉCANIQUE GÉNÉRALE

PREMIÈRE PARTIE

On considère un système différentiel de m équations du premier ordre, autonome et mis sous forme norm

(1)
$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Les fonctions $t \longmapsto x_i(t)$ sont les m fonctions inconnues de la variable indépendante réelle t; les $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$ leurs dérivées. Les m fonctions X_i, supposées indépendantes de t (système autonome) sont m fonctions données m variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_m$. On les supposera différentiables, de classe C^∞.

La solution $x_i(t)$ de (1), correspondant aux conditions initiales $x_i(0) = x_{i0}$, définit une trajectoire de (1).

1° *a*. Montrer que, pour qu'une fonction différentiable $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ soit intégrale première de (1), c'est-à- pour que F garde une valeur constante le long des trajectoires de (1), il faut et il suffit que F satisfass l'équation aux dérivées partielles de Jacobi :

(2)
$$\sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

b. L'équation (2) introduit l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et l'on remarquera que, pour les fonctions $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ne dépendant pas explicitement de t, l'équation (se réduit à $\mathcal{X}(F) = 0$.

Montrer que $\mathcal{X}$ est une dérivation sur l'anneau $\mathcal{A}$ des fonctions des x_i, définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$, c classe C^∞, c'est-à-dire que, quelles que soient F et G, éléments de $\mathcal{A}$, on a :

$$\mathcal{X}(F + G) = \mathcal{X}(F) + \mathcal{X}(G)$$
$$\mathcal{X}(F\,G) = F\,\mathcal{X}(G) + G\,\mathcal{X}(F).$$

c. De façon plus générale, on considère une fonction différentiable g de p variables réelles $z_1, z_2, \ldots, z_p$, p fonc tions F_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, éléments de $\mathcal{A}$ et la fonction composée $g(F_1, F_2, \ldots, F_p)$. Montrer que l'on a :

$$\mathcal{X}(g(F_1, F_2, \ldots, F_p)) = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathcal{X}(F_\alpha) \frac{\partial g}{\partial z_\alpha}(F_1, F_2, \ldots, F_p).$$

En déduire que toute fonction différentiable de p intégrales premières de (1) est une intégrale première de (1).

2° Un solide K, de masse M, est mobile autour d'un de ses points O maintenu fixe par une liaison sans frottement. K est placé dans le champ de la pesanteur de grandeur constante g.

On rapporte l'espace à un trièdre fixe orthonormé direct $O x_1 y_1 z_1$ ($O z_1$ verticale ascendante) et l'on considère le trièdre mobile orthonormé direct $Oxyz$ des axes principaux d'inertie de K en O. On suppose que K vérifie les hypothèses de S. Kovalevskaya : les moments principaux d'inertie de K en O sont A, A, $\frac{A}{2}$ et le centre d'inertie G de K se trouve dans le plan Oxy; aussi, on définit l'axe Ox par $\overrightarrow{OG} = \frac{\omega^2 A}{2 M g} \vec{x}$, $\frac{\omega^2 A}{2 M g}$ étant la distance de G à O avec ω constante réelle non nulle. On appelle $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantanée de K par rapport à $O x_1 y_1 z_1$ et l'on pose $\vec{\Omega} = p \vec{x} + q \vec{y} + r \vec{z}$ et $\vec{z}_1 = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}$.

a. Établir le système (Σ) des six équations différentielles du premier ordre aux six inconnues p, q, r, α, β, γ. Le système (Σ) traduit, d'une part, le théorème du moment cinétique appliqué à K en O et, d'autre part, le fait que la vitesse absolue de l'extrémité du vecteur d'origine O et équipollent à $\vec{z}_1$ est nulle.

b. Appliquer l'opérateur $\mathcal{X}$, attaché au système (Σ), mis sous forme normale, successivement à :

$$\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2,\ p^2,\ q^2,\ r^2,\ \omega^2 \alpha,\ \alpha p,\ \beta q,\ \gamma r,$$

puis, à l'aide de ces calculs, retrouver le fait que $\vec{z}_1$ est unitaire et les deux intégrales premières classiques de (Σ).

c. Calculer ensuite $\mathcal{X}(p^2 - q^2 - \omega^2\alpha)$, $\mathcal{X}(2\,pq - \omega^2\beta)$ et en déduire l'intégrale première de (Σ) propre au cas de S. Kovalevskaya.

3° On définit les puissances entières de l'opérateur $\mathcal{X}$ attaché au système (1) en posant, pour toute fonction F de l'anneau $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{X}^0(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$$
$$\mathcal{X}^k(\mathrm{F}) = \mathcal{X}(\mathcal{X}^{k-1}(\mathrm{F})) \quad , \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier naturel k, exprimer au moyen de $\mathcal{X}^l(\mathrm{F})$, $\mathcal{X}^l(\mathrm{G})$, $l = 0, 1, \ldots, k$: $\mathcal{X}^k(\mathrm{F} + \mathrm{G})$ et $\mathcal{X}^k(\mathrm{FG})$ où F et G sont deux éléments quelconques de $\mathcal{A}$.

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute la suite du problème, on appelle *série formelle* en t, à coefficients éléments de $\mathcal{A}$, une expression de la forme :

$$\mathrm{S} = \mathrm{A}_0 + t\,\mathrm{A}_1 + \frac{t^2}{2!}\mathrm{A}_2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}\mathrm{A}_k + \ldots \tag{3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathrm{A}_k$$

dans laquelle $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_k, \ldots$ sont des fonctions éléments de $\mathcal{A}$.

Sauf indication contraire, on ne fait pas d'hypothèse sur la convergence de la somme infinie figurant au second membre de (3).

On définit sur l'espace des séries formelles, l'opération d'addition de deux séries formelles S donnée en (3) et $\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathrm{B}_k$, en posant :

$$\mathrm{S} + \mathrm{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{A}_k + \mathrm{B}_k).$$

De même on définit le produit SU comme étant la série formelle :

$$\mathrm{SU} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k\,!} \left(\sum_{l=0}^{l=k} C_k^l A_l B_{k-l} \right)$$

où les C_k^l sont les coefficients du binôme.

On remarquera que S + U s'obtient en ajoutant terme à terme les séries formelles S et U et que SU en développant formellement le produit des séries formelles S et U et en regroupant les termes de même de

On définit encore la dérivée par rapport à t de la série formelle S comme étant la série formelle :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = A_1 + t\, A_2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)\,!} A_k + \dots$$

De plus, si $\mathcal{X}$ est un opérateur différentiel sur $\mathcal{A}$, on définit la série formelle :

$$\mathcal{X}(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k\,!} \mathcal{X}(A_k)\,.$$

On dira que la série formelle S est solution formelle de l'équation de Jacobi (2) et donc intégrale p formelle du système (1), si l'on a formellement :

$$\mathcal{X}(S) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,,$$

le membre de droite de cette égalité étant la série formelle nulle, série dont tous les coefficients sont nuls.

1° *a.* On considère alors la série formelle S donnée par (3), où l'on a posé $A_0 = F$, F élément de $\mathcal{A}$.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cette série formelle soit une solution f de (2) est :

$$A_k = (-1)^k\, \mathcal{X}^k (F), \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

b. On est ainsi amené à appeler *série de Lie* de la fonction F, relative à l'opérateur $\mathcal{X}$, la série formelle :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}} (F) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k\,!} \mathcal{X}^k (F)\,. \tag{4}$$

La formule (4) définit un opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ que l'on notera aussi exp $(-t\mathcal{X})$ par référence au développen série de Taylor de la fonction exponentielle. $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ applique l'anneau $\mathcal{A}$ dans l'espace des séries formell

Montrer que $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ est un opérateur linéaire de noyau nul, ayant pour image l'ensemble des séries forme sont solutions formelles de (2).

c. On dira qu'une fonction F est régulière si sa série de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ (F) converge pour tout t d'un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'origine et si la somme de cette série est une fonction différentiable de l'ensemble des va $x_1, x_2, \dots, x_m, t$ dont les dérivées sont sommes des séries de Lie correspondantes supposées elles aussi c gentes.

Montrer que si F est régulière, la somme de la série de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ (F) est une intégrale première de (1).

d. Soient φ_i les m fonctions coordonnées :

$$\varphi_i\,(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_i\,.$$

On suppose ces m fonctions régulières pour le système (1).

On appelle séries fondamentales de Lie du système (1), les m séries de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ (φ_i) et on $(\mathcal{L}_{\mathcal{X}} (\varphi_i))\,(x_1, \dots, x_m, t)$ les sommes de ces séries.

Soit $t \longmapsto x_i(t)$ la solution de (1) pour les données de Cauchy : $x_i(0) = x_{i0}$. Montrer que :

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\varphi_i))\,(x_1(t), \ldots, x_m(t), t) = x_{i0}$$
$$(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\varphi_i))\,(x_{10}, \ldots, x_{m0}, -t) = x_i(t)\,.$$

En déduire que les m séries fondamentales de Lie sont indépendantes et permettent, lorsqu'elles sont convergentes, de résoudre effectivement le système (1).

2° On considère le système différentiel linéaire à coefficients constants de m équations différentielles du premier ordre :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Former les m séries fondamentales de Lie du système (5). En déduire la solution de (5) correspondant aux conditions initiales : $x_i(0) = x_{i0}$.

3° Soit $Oxyz$ un trièdre orthonormé direct lié à la Terre : O est un point de la surface terrestre, Oz est dirigé suivant la verticale ascendante, Ox vers le Sud (l'axe Ox' directement opposé vers le Nord) et l'axe Oy vers l'Est. Le vecteur rotation de la Terre par rapport à un repère absolu (lié à des étoiles fixes) est le vecteur $\vec{\Omega}$ dont le support est une droite passant par O et située dans le plan méridien xOz; on pose $(Ox', \vec{\Omega}) = \lambda$, λ constante réelle, $\lambda \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. La longueur ω (constante absolue) de $\vec{\Omega}$ est petite devant la longueur g (constante absolue) du vecteur champ de la pesanteur; aussi *on négligera* ω^2 *dans toute cette question.*

a. En observateurs relatifs (liés à $Oxyz$), écrire le système (Σ') des équations du mouvement d'une particule matérielle P, de masse unité, libre dans l'espace, soumise à son poids et à la seule force d'inertie complémentaire, les variables étant les coordonnées cartésiennes x, y, z de P dans $Oxyz$ et les composantes X, Y, Z de la vitesse de P par rapport à $Oxyz$.

b. Écrire l'opérateur $\mathcal{X}$ attaché au système (Σ') et retrouver, en appliquant $\mathcal{X}$ à une fonction convenablement choisie, l'intégrale première de l'énergie.

c. Former les six séries fondamentales de Lie du système (Σ'). Ces séries s'arrêtent puisque l'on néglige ω^2. On admettra qu'elles fournissent une solution approchée de (Σ') correspondant aux conditions initiales : $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$, $Z(0) = Z_0$, pour des valeurs de t appartenant à un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'origine et assez petit. Donner cette solution approchée.

d. Interpréter les résultats obtenus, dans le cas particulier où P est lâchée de O sans vitesse initiale.

e. Retrouver les résultats connus lorsque l'on estime ω négligeable devant g.

TROISIÈME PARTIE

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions de $2n$ variables u_i, v_i ; $i = 1, 2, \ldots, n$ dépendant en outre éventuellement d'un paramètre réel τ, fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et de classe C^∞ par rapport à l'ensemble des arguments u_i, v_i, τ.

Dans la suite du problème, les variables u_i, v_i s'appelleront tantôt p_i, q_i, tantôt r_i, s_i, et τ sera parfois le temps t, parfois un petit paramètre ε en théorie des perturbations.

On définit le crochet de Poisson de deux fonctions quelconques F_1 et F_2 de $\mathcal{E}$ par :

$$[F_1, F_2]_{(u,v)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_i}\frac{\partial F_2}{\partial v_i} - \frac{\partial F_1}{\partial v_i}\frac{\partial F_2}{\partial u_i}\right). \tag{6}$$

1° Montrer rapidement que les crochets de Poisson possèdent un caractère bilinéaire alterné et qu'ils ont de p les propriétés :

$$[F_1, F_2 F_3]_{(u,v)} = F_2 [F_1, F_3]_{(u,v)} + F_3 [F_1, F_2]_{(u,v)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [F_1, F_2]_{(u,v)} = \left[\frac{\partial F_1}{\partial y}, F_2\right]_{(u,v)} + \left[F_1, \frac{\partial F_2}{\partial y}\right]_{(u,v)}$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions quelconques de $\mathcal{E}$ et y étant l'un quelconque des $2n + 1$ arguments u_i, v_i,

On admettra d'autre part l'identité de Jacobi :

$$[F_1, [F_2, F_3]]_{(u,v)} + [F_2, [F_3, F_1]]_{(u,v)} + [F_3, [F_1, F_2]]_{(u,v)} = 0,$$

pour trois fonctions quelconques de $\mathcal{E}$.

2° On dit qu'un changement des $2n$ variables p_i, q_i en $2n$ variables r_i, s_i, dépendant éventuellement du temps d'équations :

$$(7) \qquad \begin{cases} p_i = f_i(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t) \\ q_i = g_i(r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t) \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

définit une transformation canonique si et seulement si l'on a :

$$(8) \qquad \begin{cases} [f_i, f_j]_{(r,s)} = 0 \\ [f_i, g_j]_{(r,s)} = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \dots, n\,; \\ [g_i, g_j]_{(r,s)} = 0 \end{cases}$$

les $2n$ fonctions f_i, g_i sont éléments de $\mathcal{E}$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et nul si i est diffé rent de j.

a. On introduit la matrice jacobienne J des $2n$ fonctions f_i, g_i des $2n$ variables r_i, s_i et la matrice carrée $2n \times 2n$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \; I_n \text{ matrice unité } n \times n.$$

Montrer que les conditions (8) peuvent s'écrire sous la forme $J\,E\,{}^{T}J = E$ où ${}^{T}J$ est la matrice transposée de J.

b. Soit la fonction $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \longmapsto H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ élément de $\mathcal{E}$. Par définition, le système différentiel canonique engendré par H est le système différentiel :

$$(9) \qquad \begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = +\dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

et l'on dit que H est l'hamiltonien du système (9).

Écrire sous forme matricielle le système (9) à l'aide de la matrice colonne $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ à $2n$ éléments : les variables p_i, q_i, et de la matrice colonne $\begin{pmatrix} H'_p \\ H'_q \end{pmatrix}$ à $2n$ éléments : les dérivées partielles de H par rapport aux $2n$ variables p_i, q_i.

c. Montrer que le système (9) se transforme, sous la transformation canonique (7), (8) en un système différentiel canonique engendré par un hamiltonien K, fonction des $2n + 1$ variables r_i, s_i, t, que l'on déterminera lorsque le changement de variables (7) ne dépend pas de t, puis lorsqu'il en dépend.

3° *a.* On note Λ l'opérateur $\mathcal{X}$ attaché au système (9) de $m = 2n$ équations différentielles du premier ordre. Montrer que $\Lambda(\mathrm{F}) = [\mathrm{H}, \mathrm{F}]_{(p, q)}$.

b. Retrouver l'intégrale de l'énergie à l'aide de Λ.

c. Démontrer le théorème de Poisson : si F et G, éléments de $\mathcal{E}$, fonctions des $2n + 1$ variables p_i, q_i, t sont deux intégrales premières de (9), $[\mathrm{F}, \mathrm{G}]_{(p, q)}$ est aussi intégrale première de (9).

4° Pour tout entier naturel k, montrer que $\Lambda^k [\mathrm{F}, \mathrm{G}]_{(u, v)}$ où F et G sont deux éléments quelconques de $\mathcal{E}$, fonctions des $2n + 1$ variables u_i, v_i, τ, s'exprime au moyen des crochets $[\Lambda^l(\mathrm{F}), \Lambda^{k-l}(\mathrm{G})]_{(u, v)}$, $l = 0, 1, \ldots, k$.

QUATRIÈME PARTIE

1° *a.* On se donne une fonction W, élément de $\mathcal{E}$, fonction des $2n + 1$ variables r_i, s_i, τ et l'on définit l'opérateur Δ_{W} par :

$$\Delta_{\mathrm{W}}(\mathrm{F}) = [\mathrm{W}, \mathrm{F}]_{(r, s)} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \tau}$$

où F est une fonction des $2n + 1$ variables r_i, s_i, τ, élément quelconque de $\mathcal{E}$.

On définit les puissances entières Δ_{W}^k de l'opérateur Δ_{W} comme on a défini celles de l'opérateur $\mathcal{X}$ en première partie, 3°.

Montrer que, pour tout entier naturel k, les expressions de $\Delta_{\mathrm{W}}^k(\mathrm{F} + \mathrm{G})$, $\Delta_{\mathrm{W}}^k(\mathrm{FG})$ et $\Delta_{\mathrm{W}}^k([\mathrm{F}, \mathrm{G}]_{(r, s)})$ au moyen de $\Delta_{\mathrm{W}}^l(\mathrm{F})$, $\Delta_{\mathrm{W}}^l(\mathrm{G})$ pour $l = 0, 1, \ldots, k$, sont les mêmes que celles de $\Lambda^k(\mathrm{F} + \mathrm{G})$, $\Lambda^k(\mathrm{FG})$ et $\Lambda^k([\mathrm{F}, \mathrm{G}])$ au moyen des $\Lambda^l(\mathrm{F})$, $\Lambda^l(\mathrm{G})$.

b. Pour tout entier naturel k, on pose :

$$\mathrm{F}_0^{(k)}(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n) = \left(\Delta_{\mathrm{W}}^k(\mathrm{F}(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n, \tau))\right)_{\tau = 0}$$

et l'on considère la série formelle en τ :

$$\mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\mathrm{F}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \mathrm{F}_0^{(k)};$$

E_{W} est appelé *opérateur de Lie* engendré par la fonction W.

Exprimer de façon formelle les séries formelles $\mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\mathrm{F} + \mathrm{G})$, $\mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\mathrm{FG})$ et $\mathrm{E}_{\mathrm{W}}([\mathrm{F}, \mathrm{G}]_{(r, s)})$ au moyen des séries formelles $\mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\mathrm{G})$.

c. On considère les $2n$ fonctions coordonnées ρ_i, σ_i :

$$\rho_i(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n) = r_i, \qquad \sigma_i(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n) = s_i; \qquad i = 1, \ldots, n$$

et le changement de variables d'équations :

$$(10) \qquad \begin{cases} p_i = (\mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\rho_i))(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n, \tau) \\ q_i = (\mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\sigma_i))(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n, \tau) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Montrer que, si toutes les fonctions coordonnées sont régulières au sens du 1°, *c* de la deuxième partie, le changement de variables d'équations (10) définit une transformation canonique dépendant de τ.

d. Montrer qu'alors les seconds membres de (10) constituent les développements en série de Taylor au voisinage de $\tau = 0$ de la solution du système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, \tau) \longmapsto \mathrm{W}(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, \tau)$, τ étant la variable indépendante, solution correspondant aux conditions initiales : $p_i(0) = r_i$, $q_i(0) = s_i$; $i = 1, \ldots, n$.

e. Déduire de ce qui précède que, pour toute fonction F élément de $\mathcal{E}$, des $2n + 1$ variables p_i, q_i, τ, on peut écrire :

$$\mathrm{F}(\mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\rho_1), \ldots, \mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\rho_n), \mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\sigma_1), \ldots, \mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\sigma_n), \tau) = \mathrm{E}_{\mathrm{W}}(\mathrm{F}).$$

2° *Première application de la question (quatrième partie, 1°).*

$\mathcal{E}$ est ici l'ensemble des fonctions de $2n$ variables r_i, s_i, définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, de classe C^∞. W est l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique à n dimensions :

$$W(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (r_i^2 + \omega^2 s_i^2)$$

où ω est une constante réelle strictement positive. τ est le temps t.

a. Définir l'opérateur Δ_W, les fonctions $F_0^{(k)}$ et l'opérateur de Lie E_W pour F élément quelconque de $\mathcal{E}$.

b. Appliquer E_W aux $2n$ fonctions coordonnées ρ_i, σ_i.

c. En déduire la solution du système canonique engendré par $W(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ correspondant aux conditions initiales : $p_i(0) = p_{i0}$, $q_i(0) = q_{i0}$.

d. Écrire le système différentiel canonique engendré par $W(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ et trouver directement la solution de ce système obtenue au *c.*

3° *Deuxième application de la question (quatrième partie, 1°).*

Les fonctions de $\mathcal{E}$ considérées ici sont des fonctions de $2n + 1$ variables, définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Le paramètre τ du 1° de la quatrième partie est maintenant le petit paramètre ε de la théorie des perturbations. Ces fonctions sont de plus supposées développables en séries de puissances entières de ε, à coefficients indépendants de ε et éléments de $\mathcal{E}$. Les sommes de toutes ces séries sont supposées différentiables terme à terme.

a. On considère la fonction W :

$$W(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} W_{k+1}(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n)$$

et l'on se propose d'effectuer la transformation canonique d'équations (10) à l'aide de cette fonction W. On remarquera que, ε étant un petit paramètre, cette transformation canonique est voisine de l'identité.

Montrer que le système différentiel canonique (9), engendré par l'hamiltonien H :

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} H_k(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$$

la variable indépendante étant le temps t, se transforme sous la transformation canonique que l'on vient de décrire, en le système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien $E_W(H)$.

b. Pour expliciter $E_W(H)$, on pose, pour tout entier naturel k :

$$(\Delta_W^k(H))(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^l}{l!} H_l^{(k)}(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n).$$

● Établir une relation de récurrence entre la fonction $H_l^{(k)}$, les fonctions $H_j^{(k-1)}$, $j = 0, 1, \ldots, l+1$ et les fonctions W_{m+1} $(m = 0, 1, \ldots, l)$.

● ● En déduire que l'on obtient les $H_0^{(k)}$ par un schéma analogue à celui de Pascal.

● ● ● Donner explicitement $H_0^{(1)}$, $H_1^{(1)}$ et $H_0^{(2)}$.

c. On considère en particulier l'hamiltonien H :

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2, q_1, q_2) &= p_1 + \omega p_2 + \varepsilon (A p_1^2 \sin^4 q_1 - B \sqrt{2 p_1} \sin q_1 \cos q_2) \\ &= H_0(p_1, p_2) + \varepsilon H_1(p_1, /, q_1, q_2) \end{aligned}$$

où A, B et ω sont des constantes réelles non nulles; ω n'est pas un rationnel.

● Donner la solution $p_1^0(t)$, $p_2^0(t)$, $q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$ du système différentiel canonique, dit système principal, engendré par H_0, solution correspondant aux conditions initiales :

$$p_1^0(0) = \alpha_1 , \; p_2^0(0) = \alpha_2 , \; q_1^0(0) = \beta_1 , \; q_2^0(0) = \beta_2 .$$

● ● On se propose de déterminer W de telle sorte que l'hamiltonien $E_W(H)$ ne dépende que de r_1, r_2, ε. Montrer que cela revient à intégrer le système différentiel canonique engendré par H.

● ● ● À l'ordre zéro en ε, la fonction W n'intervient pas et ce problème est résolu. Écrire $H_0^{(0)}$.

● ● ● ● Montrer qu'au premier ordre en ε, la fonction inconnue est :

(11) $$H_0^{(1)} + \left(\frac{d\,W_1}{dt}\right)_0$$

où $\left(\frac{d\,W_1}{dt}\right)_0$ désigne la dérivée par rapport au temps de W_1 le long des trajectoires du système principal.

Montrer que la fonction inconnue (11) est égale à la somme d'une fonction de la seule variable r_1 et d'une fonction des variables r_1, s_1, s_2.

Trouver à l'aide de ce qui précède une solution particulière, pour le premier ordre en ε, du problème que l'on vient de se poser au point ● ●. On donnera explicitement $H_0^{(1)}$ et W_1.

● ● ● ● ● Peut-on opérer de façon similaire aux ordres suivants en ε ?