RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE .

Présentation du sujet .

Le but du problème de Mécanique générale était l'initiation aux séries de Lie, très utiles en théorie des perturbations .

PREMIERE PARTIE .

Si l'on recherche les intégrales premières du système différentiel (1) de m équations différentielles du premier ordre, mis sous forme normale, l'équation aux dérivées partielles de Jacobi introduit un opérateur $\mathcal{X}$ qui est une dérivation ; c'est pourquoi $\mathcal{X}^k(FG)$ est donné par la formule de Leibnitz .

L'opérateur $\mathcal{X}$, dans le problème du mouvement du solide de S. Kovalevskaya, appliqué à des fonctions convenablement choisies, permet de retrouver par des calculs, le fait que le module de $\vec{z}_1$ reste constant, l'intégrale première de l'énergie et l'intégrale du moment cinétique par rapport à l'axe Oz_1. De même, on met aisément en évidence l'intégrale propre au cas de S. Kovalevskaya ; on a en effet :

$$\mathcal{X}\left((p^2+q^2-\omega^2\alpha) + (2pq-\omega^2\beta)^2 \right) = 0 \ .$$

DEUXIEME PARTIE .

On démontre d'abord que l'espace des séries formelles entières en t , intégrales premières formelles de (1) est identique à l'ensemble des séries de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(F)$, F élément de l'anneau $\mathcal{A}$. Si la fonction F est, de plus, régulière, la somme de sa série de Lie est effectivement intégrale première de (1).

Les m fonctions coordonnées étant supposées régulières, les séries fondamentales de Lie gardent le long de la trajectoire $\mathcal{C}$ de (1) correspondant aux conditions initiales $x_i(0) = x_{i\circ}$, les valeurs $x_{i\circ}$ qu'elles prennent à $t = 0$; ceci établit la première formule de 1° d..

Le système (1) étant autonome, on peut (en effectuant une translation bien choisie sur t) faire décrire la trajectoire $\mathcal{C}$ à l'envers, en partant à l'instant initial du point $(x_i(t))$ et en arrivant à l'instant $-t$ au point $(x_{i\circ})$, d'où la deuxième formule de 1° d..

Ces deux formules montrent que les sommes des séries de Lie établissent une correspondance biunivoque entre les $x_{i\circ}$ définies arbitrairement dans une boule ouverte de R^m et les $x_i(t)$. Techniquement, ces formules montrent que les séries de Lie s'inversent simplement en changeant t en $-t$ et en échangeant les $x_i(t)$ et les $x_{i\circ}$.

Dans l'application du 2°, on retrouve à l'aide des séries de Lie la solution bien connue de (5) correspondant aux conditions initiales $x_i(0) = x_{i\circ}$.

L'application du 3° montre comment les séries de Lie permettent d'obtenir une solution approchée d'un problème. Dans 3° d., la série de Lie $\mathcal{L}(y)$ inversée, met en évidence la déviation vers l'Est :

$$y(t) = (\omega g \cos \lambda) \frac{t^3}{3}.$$

TROISIEME PARTIE.

La troisième partie est presque une question de cours sur les crochets de Poisson et l'effet d'une transformation canonique sur un système différentiel canonique hamiltonien. Elle contient des rappels utiles dans la suite du problème. La quatrième question est nécessaire pour aborder la quatrième partie. Si l'on écrit l'identité de Jacobi à l'aide de l'opérateur Λ , on obtient, pour $k = 1$, la formule :

$$\Lambda^k[F,G] = \sum_{j=0}^{j=k} C_k^j \, [\Lambda^j(F) \, , \, \Lambda^{k-j}(G)] \; ,$$

formule que l'on démontre ensuite par récurrence pour k entier naturel quelconque.

QUATRIEME PARTIE.

En posant $s_{n+1} = \tau$, $r_{n+1} = -W$ et en définissant la fonction $\mathcal{W}$ par

$$\mathcal{W}(r_1,\ldots,r_{n+1},s_1,\ldots,s_{n+1}) = W(r_1,\ldots,r_n,s_1,\ldots,s_{n+1}) + r_{n+1} \, ,$$

$\Delta_W(F)$ apparaît comme le crochet de Poisson à $2n+2$ variables des fonctions $\mathcal{W}$ et F. Donc Δ_W et Λ ont les mêmes propriétés.

L'opérateur Δ_W et ses puissances entières permettent de définir l'opérateur de Lie E_W. Les séries formelles $E_W(F)$ ont les mêmes propriétés que les séries de Lie de la deuxième partie. De plus, on démontre formellement que :

$$E_W[F\,,G] = [E_W(F)\,,E_W(G)] \,.$$

On en déduit que le changement de variables d'équations (10) définit une transformation canonique, les fonctions coordonnées étant supposées régulières. Cette transformation canonique est celle qui fait passer des valeurs des p_i, q_i à $\tau = 0$ aux valeurs des p_i, q_i à τ quelconque le long de la trajectoire du système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien W, trajectoire correspondant aux conditions initiales $p_i(0) = r_i$, $q_i(0) = s_i$.

Si W est l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique à n dimensions et si τ est le temps t, on peut appliquer l'opérateur E_W aux $2n$ fonctions coordonnées et retrouver ainsi les combinaisons linéaires des développements en séries des $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ qui constituent la solution du problème de l'oscillateur harmonique.

La deuxième application conduit à la théorie des perturbations de Hori utilisée en Mécanique céleste. La fonction W qui engendre la transformation canonique, est construite pas à pas sous forme d'un développement en série entière du petit paramètre ε, de façon à "éliminer" de l'hamiltonien toutes les variables d'une même série (lorsque cela est possible), ce qui revient à intégrer le système différentiel canonique engendré par l'hamiltonien H. On rejoint, sous forme approchée, la théorie des angles-actions. La supériorité de la méthode de Hori sur les autres méthodes de perturbations est de fournir directement, sans avoir de séries à inverser, les p_i, q_i en fonctions du temps et de constantes.

On démontre la formule de récurrence :

$$H_l^{(k)} = H_{l+1}^{(k-1)} + \sum_{j=0}^{l} C_l^j \, [W_{j+1}, H_{l-j}^{(k-1)}] , \qquad j,k,l \in N .$$

On trouve le schéma analogue au triangle de Pascal :

$$\begin{tikzcd}
H_o = H_o^{(o)} \arrow[d] & & \\
H_1 \arrow[r] \arrow[d] & H_o^{(1)} \arrow[d, dash] & \\
H_2 \arrow[r] \arrow[d] & H_1^{(1)} \arrow[r] \arrow[d] & H_o^{(2)} \arrow[d] \\
{} & {} & {}
\end{tikzcd}$$

L'hamiltonien H de 3° c. engendre un système canonique équivalent à l'équation differentielle du second ordre de Duffing : $\ddot{u} + u + \varepsilon(A u^3 - B \cos \omega t) = 0$.

On trouve :

$$H_o^{(o)} = r_1 + r_2$$

$$[H_o , W_1] = \left(\frac{dW_1}{dt}\right)_o$$

$$H_o^{(1)} = \frac{3}{8} A r_1^2$$

$$W_1(r_1, s_1, s_2) = \frac{A}{8} r_1^2 \left(\frac{\sin(4s_1)}{4} - 2 \sin(2s_1)\right) + B\sqrt{\frac{r_1}{2}} \left(\frac{\cos(s_1+s_2)}{1+\omega} + \frac{\cos(s_1-s_2)}{1-\omega}\right) .$$

Au k-ème ordre en ε , on cherchera à déterminer la fonction $H_o^{(k)} + (\frac{dW_k}{dt})_o$ en l'égalant à une fonction déterminée aux ordres précédents. On essaiera de trouver des solutions particulières de $H_o^{(k)}$ et $(\frac{dW_k}{dt})_o$ en procédant comme au premier ordre en ε .

Bibliographie.

A. DEPRIT , Canonical Transformations depending on a small Parameter - Celestial Mechanics 1,12 (1969).

A.J. DRAGT and J.M.FINN , Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps - Journal of Mathematical Physics, vol. 17, n°12 (1976).

E. LEIMANIS , The general Problem of the Motion of coupled rigid Bodies about a fixed Point (Springer, New York,1965).

Y. THIRY , Les fondements de la Mécanique céleste, Gordon and Breach, 1970.

Commentaires.

Malgré un énoncé allongé par des définitions et des rappels, le problème n'a pas rebuté les candidats. Une seule copie blanche sur cent-douze a été relevée. Tous les candidats, sauf deux, ont traité la première partie ; neuf et vingt-sept respectivement n'ont pas abordé les deuxième et troisième parties. Vingt-huit candidats ont abordé la quatrième partie. Il y avait huit très bonnes copies dont une excellente.

Il est toutefois regrettable que bien des candidats, qui ont pourtant choisi l'option Mécanique générale, sautent systématiquement les applications à la Mécanique traditionnelle. Par exemple, vingt-cinq candidats n'ont pas attaqué le problème de S. Kovalevskaya (I, 2°) ; trente-neuf uniquement en ont réussi la mise en équations ; parmi eux, vingt-six ont trouvé les trois intégrales premières classiques et seize l'intégrale propre à ce cas particulier. Il en va de même de l'application à la Mécanique terrestre de précision dans laquelle la mise en équations n'est faite correctement que par seize candidats. Beaucoup ne connaissent pas l'accélération complémentaire et certains ignorent que le poids contient la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre.

Répartition des notes.

Note			Nombre de copies
0	à	4	15
5	à	9	29
10	à	14	24
15	à	19	24
20	à	24	12
25	à	29	2
30	à	34	2
35	à	39	3
40			1
			112