ANALYSE NUMÉRIQUE

AVERTISSEMENT. — *La deuxième partie est indépendante de la première. On pourra admettre les résultats demandés par l'énoncé pour poursuivre l'étude des questions, à condition de l'indiquer clairement.*

NOTATIONS

Pour toute fonction intégrable $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on note :

$$\| g \| = \int_{-\infty}^{+\infty} | g(x) | \, \mathrm{d}x .$$

On utilisera un pas d'espace Δx ; c'est un nombre réel > 0, destiné à tendre vers 0. On se donne un nombre réel $\rho > 0$, fixe ; le pas de temps sera toujours défini par $\Delta t = \rho \, \Delta x$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathrm{I}_n = n + 2\,\mathbb{Z} = \{ j \in \mathbb{Z} \, ; \, j - n \text{ est pair} \}$. Pour $j \in \mathrm{I}_n$, on définit le pavé de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\prod\nolimits_j^n = [n \, \Delta t , \, (n+1) \, \Delta t[\times [(j-1) \, \Delta x , \, (j+1) \, \Delta x[.$$

Si $h(t, x)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on pose $h_j^n = h(n \, \Delta t, j \, \Delta x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$.

On rappelle enfin la notation :

$$\binom{n}{p} = \mathrm{C}_n^p = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!} .$$

PREMIÈRE PARTIE

45 Soit c un nombre réel, $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, et $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que les dérivées premières et secondes de a et f sont bornées.

53 On cherche une fonction $u(t, x)$, définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, solution du système suivant :

59

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c \, \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) , & \forall \, (t, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = a(x) \quad , & \forall \, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

66

Q.1. Montrer que le système (P) admet une et une seule solution de classe $\mathscr{C}^2$, qu'on explicitera (pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pourra considérer les applications :

$$t \longmapsto g_y(t) = u(t, y + ct)) .$$

On désire approcher numériquement la solution $u(t, x)$ par des fonctions :

$$(t, x) \longrightarrow \mathrm{U}^{\Delta x}(t, x) = \mathrm{U}(t, x \, ; \, \Delta x) .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $j \in I_n$, la valeur de $U(\cdot, \cdot ; \Delta x)$ sera constante sur Π_j^n, et notée $u^{n,j}$

On approchera le système (P) par :

$$(P_{\Delta x}) \begin{cases} \dfrac{u^{n+1,j} - \frac{1}{2}(u^{n,j+1} + u^{n,j-1})}{\Delta t} + c\, \dfrac{u^{n,j+1} - u^{n,j-1}}{2\,\Delta x} \\ \qquad = f_j^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in I_{n+1} \\ u^{0,j} = a(j\,\Delta x) \qquad \text{pour } j \text{ pair.} \end{cases}$$

Q.2. Montrer que $\left\{ \Pi_j^n ;\ n \in \mathbb{N},\ j \in I_n \right\}$ est une partition de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Prouver ensuite, p récurrence soignée, que les relations ci-dessus définissent la fonction $U^{\Delta x}$ de manière unique.

Q.3. On suppose dans cette question que $f \equiv 0$, et que $a(x) = 0$ si $|x| \geqslant 1$, $a(x) > 0$ si $|x$

α. Montrer que $u^{n,j} = 0$ pour $|j| \geqslant n + \dfrac{1}{\Delta x}$.

β. Calculer $U(t, 1 + \lambda t ; \Delta x)$ et $U(t, -1 - \lambda t ; \Delta x)$ pour $t > 0, \lambda >$
$\Delta t \leqslant t\left(1 - \dfrac{1}{\lambda \rho}\right)$.

γ. En déduire qu'une condition nécessaire pour que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} U(t, x ; \Delta x) = u(t, x)$ sur $\mathbb{R}^+ \times$
que $\rho\,|c| \leqslant 1$.

On supposera jusqu'à la fin de la première partie que $\rho\,|c| \leqslant 1$.

Q.4. α. Montrer que :

$$\left| u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \right| \leqslant \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left\{ \rho^2 \operatorname*{Sup}_{\Pi_j^n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| + \operatorname*{Sup}_{\Pi_j^n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \right.$$

β. De même, majorer l'expression :

$$\left| u_{j+1}^n - u_{j-1}^n - 2\,\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n \right|$$

à l'aide des dérivées secondes de u.

Q.5. On pose $\varepsilon_j^n = u_j^n - u^{n,j}$, $\varepsilon^n = \operatorname*{Sup}_{j \in I_n} |\varepsilon_j^n|$, $\alpha = \dfrac{1}{2}(1 + \rho c)$, $\beta = \dfrac{1}{2}(1 - \rho c)$;

α. À l'aide de Q.4, majorer l'expression :

$$|\varepsilon_j^{n+1} - \alpha\,\varepsilon_{j-1}^n - \beta\,\varepsilon_{j+1}^n|, \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N},\ j \in I_{n+1};$$

β. Montrer ensuite que :

$$\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n \leqslant \operatorname*{Sup}_{j \in I_{n+1}} |\varepsilon_j^{n+1} - \alpha\,\varepsilon_{j-1}^n - \beta\,\varepsilon_{j+1}^n|.$$

γ. En déduire que $\varepsilon^n \leqslant M_1 n (\Delta x)^2$, où M_1 est un nombre réel qui ne dépend que de ρ et des valeurs des dérivées secondes de u dans la bande $(t, x) \in [0, n \Delta t] \times \mathbb{R}$. On donnera une majoration explicite de M_1 en fonction de c, ρ, et des dérivées premières et secondes de a et f.

δ. En déduire que pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} U(t, x; \Delta x) = u(x, t).$$

La convergence est-elle uniforme par rapport à t ou à x ?

Q.6. Cas général. Montrer que :

$$u^{n,j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} u^{0, n+j-2k} + \Delta t \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \alpha^k \beta^{l-k} f_{j+l-2k}^{n-l-1}.$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, α_1 et α_2 sont deux nombres réels distincts de $[0, 1]$, et $\beta_i = 1 - \alpha_i$. Pour $k_0 \in \mathbb{Z}$, on définit $A(k_0)$ comme étant la somme (éventuellement infinie) de la série à termes positifs :

$$\sum_{n,k}' \binom{n}{k} \binom{n}{k+k_0} \alpha_1^k \beta_1^{n-k} \alpha_2^{k+k_0} \beta_2^{n-k-k_0},$$

où la notation $\sum\limits_{n,k}'$ signifie que la sommation est étendue aux couples d'entiers (n, k) tels que k, $n - k$, $k + k_0$, $n - k - k_0$ soient $\geqslant 0$; on rappelle que $A(k_0)$ ne dépend pas de l'ordre de la sommation.

Q.7. α. Montrer que pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0) z^{k_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} (P(z))^n$$

où $P(X)$ est la fraction rationnelle $(\beta_2 + \alpha_2 X) \left(\dfrac{\alpha_1}{X} + \beta_1\right)$.

β. Étudier la couronne de convergence de la série de Laurent $\sum\limits_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0) X^{k_0}$, et calculer sa somme $S(X)$ dans cette couronne. On décomposera S en éléments simples.

γ. En déduire une expression simple des coefficients $A(k_0)$, et la majoration :

$$A(k_0) \leqslant \frac{1}{|\alpha_2 - \alpha_1|}.$$

Maintenant, pour $k_0, r, s \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$A(k_0, r, s) = \sum_{n,k}'' \binom{n-r}{k} \binom{n-s}{k+k_0} \alpha_1^k \beta_1^{n-r-k} \alpha_2^{k+k_0} \beta_2^{n-s-k-k_0},$$

où la somme $\sum\limits_{n,k}''$ concerne les couples (n, k) d'entiers relatifs tels que k, $n - r - k$, $k + k_0$ et $n - s - k - k_0$ soient $\geqslant 0$.

Q.8. α. Calculer $\sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0, r, s)\, z^{k_0}$, pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$, en fonction de $\frac{\alpha_1}{z} + \beta_1$ et $\alpha_2 z + \beta_2$.

β. Étudier la couronne de convergence de la série de Laurent $\sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} A(k_0, r, s)\, X^{k_0}$, et exprime somme dans cette couronne à l'aide de S (X).

γ. En déduire la majoration :

$$A(k_0, r, s) \leqslant \frac{1}{|\alpha_2 - \alpha_1|}$$

(on pourra utiliser Q.7.γ).

TROISIÈME PARTIE

On considère maintenant un système non couplé de deux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + c_1 \dfrac{\partial v}{\partial x} = f & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad v(0, x) = v_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t} + c_2 \dfrac{\partial w}{\partial x} = g & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad w(0, x) = w_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les vitesses de propagation c_1 et c_2 sont supposées distinctes.

On approche chacune des équations de ce système comme dans la première partie par :

$$\frac{1}{2\,\Delta t}(2\,v^{n+1,j} - v^{n,j-1} - v^{n,j+1}) + \frac{c_1}{2\,\Delta x}(v^{n,j+1} - v^{n,j-1}) = f^{n,j},$$

$$\frac{1}{2\,\Delta t}(2\,w^{n+1,j} - w^{n,j-1} - w^{n,j+1}) + \frac{c_2}{2\,\Delta x}(w^{n,j+1} - w^{n,j-1}) = g^{n,j},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in I_{n+1}$.

ATTENTION. — *Les valeurs* $v^{0,j}$, $w^{0,j}$, $f^{n,j}$, $g^{n,j}$ *sont données, mais ne sont pas nécessaireme égales à* $v_0(j\,\Delta x)$, $w_0(j\,\Delta x)$, f_j^n *ou* g_j^n. *Leurs choix n'ont pas d'importance dans cette partie.*

On fait les hypothèses suivantes :

(H 1) $\rho\,|c_1| \leqslant 1$ et $\rho\,|c_2| \leqslant 1$.

(H 2) $\sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}| < +\infty, \quad \sum_{j \text{ pair}} |w^{0,j}| < +\infty.$

(H 3) $\sum_{j \in I_{n+1}} (|f^{n,j}| + |g^{n,j}|) < +\infty, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Q.9. On commence par l'étude du cas :

$$f^{n,j} = 0, \quad g^{n,j} = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, j \in I_{n+1}.$$

α. À l'aide de Q.6, exprimer le produit $v^{n,j}\, w^{n,j}$ pour $j \in I_n$, en fonction des produits $v^{0,l}\, w^{0,m}$, l et m pairs.

β. Montrer que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in I_n} |v^{n,j}\, w^{n,j}| \leqslant \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} A(k_0) \sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}\, w^{0,j-2k_0}|.$$

γ. En déduire que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in I_n} |v^{n,j}\, w^{n,j}| \leqslant \frac{1}{|\alpha_2 - \alpha_1|} \left(\sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}| \right) \left(\sum_{l \text{ pair}} |w^{0,l}| \right).$$

Q.10. Deuxième cas $w^{0,j} = 0$ pour j pair, $f^{n,j} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, $j \in I_{n+1}$.

α. Exprimer le produit $v^{n,j}\, w^{n,j}$ en fonction des produits $v^{0,l}\, g^{m,p}$ pour l pair et $m + p$ impair.

β. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in I_n} |v^{n,j}\, w^{n,j}| \leqslant \Delta t \sum_{s=1}^{N} \sum_{k_0 \in \mathbb{Z}} A(k_0, 0, s) \sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}\, g^{s-1,j-s-2k_0}|.$$

γ. En déduire la majoration :

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in I_n} |v^{n,j}\, w^{n,j}| \leqslant \frac{\Delta t}{|\alpha_2 - \alpha_1|} \left(\sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}| \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^{N} \sum_{l \in I_s} |g^{s-1,l}| \right).$$

Q.11. Troisième cas, $v^{0,j} = w^{0,j} = 0$ pour j pair. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in I_n} |v^{n,j}\, w^{n,j}| \leqslant \frac{\Delta t^2}{|\alpha_2 - \alpha_1|} \left(\sum_{r=1}^{N} \sum_{j \in I_r} |f^{r-1,j}| \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^{N} \sum_{l \in I_s} |g^{s-1,l}| \right).$$

Q.12. De quelle majoration dispose-t-on dans le cas général ?

QUATRIÈME PARTIE

On désire approcher une solution du système couplé de deux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + c_1 \dfrac{\partial v}{\partial x} = v\,w & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad v(0, x) = v_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t} + c_2 \dfrac{\partial w}{\partial x} = v\,w & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad w(0, x) = w_0(x) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les nombres réels c_1, c_2 sont donnés, avec $c_1 \neq c_2$. Les conditions initiales v_0 et w_0 sont des for de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrables.

ATTENTION. — *La nature de la solution (v, w) du système ci-dessus et le sens à donner à ces équations pas d'importance ici. Nous ne considérerons que des solutions approchées.*

On construit donc deux fonctions :

$$V^{\Delta x}(t, x) = V(t, x\,;\, \Delta x) \quad \text{et} \quad W^{\Delta x}(t, x) = W(t, x\,;\, \Delta x),$$

constantes sur chaque pavé $\prod_j^n$ $(n \in \mathbb{N},\ j \in I_n)$, et valant respectivement $v^{n,j}$ et $w^{n,j}$.

On utilise les formules étudiées dans la troisième partie pour calculer les nombres $v^{n,j}$ et $w^{n,j}$ choisissant :

$$f^{n,j} = g^{n,j} = \frac{1}{2}\left(v^{n,j+1}\,w^{n,j+1} + v^{n,j-1}\,w^{n,j-1}\right),$$

et

$$v^{0,j} = \frac{1}{2\,\Delta x}\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} v_0(y)\,\mathrm{d}y, \qquad w^{0,j} = \frac{1}{2\,\Delta x}\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} w_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

Q.13. Vérifier que les sommes $2\,\Delta x \sum_{j \text{ pair}} |v^{0,j}|$ et $2\,\Delta x \sum_{j \text{ pair}} |w^{0,j}|$ sont majorées par nombres indépendants de Δx.

Q.14. On pose $X_N = 2\,\Delta x\,\Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in I_n} |v^{n,j}\,w^{n,j}|$.

Montrer que pour $N \geqslant 1$,

$$X_N \leqslant \frac{1}{|c_2 - c_1|}\left(\|v_0\| + X_{N-1}\right)\left(\|w_0\| + X_{N-1}\right).$$

On supposera jusqu'à la fin du problème que :

$$\|v_0\| + \|w_0\| < \frac{|c_2 - c_1|}{2}.$$

Q.15. α. Montrer l'implication :

$$X_{N-1} \leqslant \frac{1}{4} \, | c_2 - c_1 | \qquad \Rightarrow X_N \leqslant \frac{1}{4} \, | c_2 - c_1 | .$$

β. En déduire l'existence d'un nombre réel $\delta > 0$ tel que, si $\Delta x \in]0, \delta[$, alors :

$$X_N \leqslant \frac{1}{4} \, | c_2 - c_1 | , \qquad \forall \, N \in \mathbb{N} .$$

Q.16. On pose $V_N = 2 \, \Delta \times \sum_{j \in I_N} |v^{N,j}|$ et $W_N = 2 \, \Delta \times \sum_{j \in I_N} |w^{N,j}|$.

Montrer que $\forall \, N \in \mathbb{N}$,

$$V_N \leqslant \| v_0 \| + \frac{1}{4} \, | c_2 - c_1 | , \quad W_N \leqslant \| w_0 \| + \frac{1}{4} \, | c_2 - c_1 | .$$