

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

Le sujet du problème était l'obtention d'"estimations a priori" de la solution discrète donnée par un schéma aux différences finies pour un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). On pouvait en déduire la stabilité de ce schéma. Le système était hyperbolique semi-linéaire, c'est-à-dire constitué d'équations de transport

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i, \quad i \in \{1,2\},$$

couplées par l'intermédiaire du second membre :

$$f_1 = f_2 = u_1 u_2.$$

Les vitesses de propagation c_1 et c_2 étaient distinctes pour éviter de retomber sur un système d'équations différentielles trop élémentaire.

L'existence d'une solution $(u_1(x,t), u_2(x,t))$ pour le problème de Cauchy est une question d'analyse fonctionnelle, et découle d'estimations a priori intégrales. Sa transposition au cas d'une solution discrète est une question intéressante d'analyse numérique, et faisait l'objet du problème. Celui-ci consistait donc à établir les versions discrètes de ces estimations, sans aborder la question de la convergence. Il ne supposait pas de connaissance particulière, et les mathématiques utilisées ne dépassaient pas le niveau d'un DEUG A. Il fallait cependant avoir l'habitude des notions usuelles de l'analyse numérique des EDP pour avancer rapidement dans le problème. On ne saurait trop recommander à ce sujet aux candidats, de vraiment préparer l'épreuve de mathématiques appliquées ; on ne s'improvise pas numéricien le temps d'une épreuve écrite, même lorsqu'elle ne fait appel qu'à des mathématiques très élémentaires. Le savoir-faire, le "tour de main" jouent un plus grand rôle que la théorie dans les applications.

La première partie permettait de faire connaissance avec une seule équation de transport. Ce n'est rien d'autre qu'une équation différentielle ordinaire, et il est étonnant qu'elle ait pu dérouter certains candidats.

Une partie importante de l'analyse numérique concerne le traitement des EDP, et chaque candidat devrait connaître une liste des équations simples de la physique. Par exemple, l'équation des ondes en une dimension d'espace se découple en deux équations de transport. Cependant, la première question était indépendante du reste du problème et n'avait donc pas de conséquence pour les candidats. La question Q 3 permettait de vérifier le consistence du schéma proposée avec la propagation à vitesse finie. Les deux suivantes étaient classiques, mais certains candidats ont cru pouvoir utiliser deux fois la formule des accroissements finis plutôt que celle de Taylor à l'ordre deux. Cette première partie, correctement traitée, permettait d'avoir la moyenne dans cette épreuve.

La suivante était purement technique et préparait à l'étude de la corrélation entre solutions d'équations de transport à vitesses distinctes. Lors des changements d'ordre de sommation, il fallait se justifier en rappelant que les séries étaient soit à termes positifs, soit absolument convergentes selon l'étape. Cela a été rarement fait. On résolvait Q.7.8 en développant $(1-P(z))^{-1}$ en série de Laurent dans une couronne contenant le point $z = 1$ et limitée par les racines de $P(z)-1$. Encore fallait-il vérifier l'ordre entre 1 et les modules de ces racines.

La troisième partie était sans doute la plus facile, et la question Q.12 permettait de vérifier si le candidat avait compris la démarche.

La dernière partie abordait enfin le système couplé. La question Q.13 était classique. Mais Q.15.β ne pouvait être résolue qu'en supposant de plus que v_0 , ou w_0 , soit borné, afin que X_0 soit inférieur à $\frac{1}{4} |c_2 - c_1|$ pour Δx suffisamment petit. Finalement, Q.16 fournissait l'estimation a priori cherchée : dans $L^1(\mathbb{R})$, les normes de $v^{\Delta x}$ et $w^{\Delta x}$ sont majorées par une constante indépendante de $\Delta x \in]0, \delta[$.

En conclusion, bien que l'épreuve de Mathématiques Appliquées soit conçue pour rééquilibrer le concours au profit des techniques plutôt que de la théorie, il semble qu'une grande part des candidats ne soit pas en mesure d'en tirer parti. On est pourtant en droit d'attendre des futurs Professeurs des Lycées une bonne maîtrise.

Répartition des notes

$0 \leq N \leq 4$	132 copies
$5 \leq N \leq 9$	109 copies
$10 \leq N \leq 14$	57 copies
$15 \leq N \leq 19$	29 copies
$20 \leq N \leq 24$	15 copies
$25 \leq N \leq 29$	5 copies
$30 \leq N \leq 34$	2 copies
$35 \leq N \leq 40$	

349 copies