COMPOSITION D'ANALYSE

Durée : 6 heures

Notations

On note $x = (x_1, x_2)$ un point du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, avec le produit scalaire canonique $x . x' = x_1 x'_1 + x_2 x$
et la norme euclidienne $\| x \|$. On désigne par D (x, r), respectivement C (x, r), le disque fermé, respectivement
cercle, de centre x et de rayon $r \geqq 0$; on écrira D (0, 1) = D et C (0, 1) = C pour abréger. On dit que C $(x',$
entoure D (x, r) si D (x, r) est contenu dans l'intérieur de D (x', r'), c'est-à-dire si $\| x' - x \| < r' - r$. On note
pour θ réel, la rotation d'angle θ autour de l'origine.

Toutes les fonctions considérées sont *à valeurs réelles.* On note supp f le *support* d'une fonction
adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) \neq 0$. On note $dx = dx_1\, dx_2$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$. U
fonction f sur $\mathbb{R}^2$ est dite *radiale* si $f(\mathrm{R}_\theta x) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit L la droite affine de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x . u_\alpha = p$, avec $p, \alpha \in \mathbb{R}$, et $u_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in$ C. Si f est u
fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note f_{L}, ou $\widehat{f}(p, \alpha)$, l'intégrale :

$$f_{\mathrm{L}} = \widehat{f}(p, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f\left(p u_\alpha + t u_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(p u_\alpha + t u_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right) dt,$$

lorsque cela a un sens. De manière analogue, pour $\Gamma = \mathrm{C}(a, r)$, on pose :

$$f_\Gamma = \int_0^{2\pi} f(a + r u_\theta)\, d\theta,$$

avec $a \in \mathbb{R}^2$, $r \geqq 0$.

On rappelle la *formule de Green-Riemann :* si γ est une courbe C^1 par morceaux constituant le bord orient
d'un compact K du plan, et P_1, P_2 deux fonctions numériques de classe C^1 au voisinage de K, on a :

$$\iint_{\mathrm{K}} \left(\frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 = \int_\gamma \mathrm{P}_1(x_1, x_2)\, dx_1 + \mathrm{P}_2(x_1, x_2)\, dx_2 .$$

On rappelle enfin le résultat suivant de *convergence dominée* :

Soit $(x, t) \longmapsto f(x, t)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$; si $| f(x, t) | \leqq g(t)$ pour tous x, t, avec
intégrable sur $\mathbb{R}^p$, la fonction

$$x \longmapsto \mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, t)\, dt$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$; si de plus f est de classe C^k en x, et si toutes ses dérivées partielles d'ordre k au plus en x son
continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et vérifient la majoration ci-dessus, alors F est C^k sur $\mathbb{R}^n$, et ses dérivées partielles s
calculent par dérivation sous le signe somme.

But du problème : retrouver certaines propriétés d'une fonction f à partir des nombres f_{L}.

La partie I établit les résultats préliminaires, les parties II et III aboutissent à des théorèmes de support; ce
trois parties utilisent du calcul différentiel et intégral dans le plan.

La partie IV, *indépendante des trois premières*, étudie la reconstruction approchée de f à partir d'un nombr
fini des f_{L}, par des méthodes purement hilbertiennes.

I

Dans toute cette partie, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, qui vérifie la propriété

(A) *pour tout entier* $n \geqq 0$, *la fonction* $\| x \|^n | f(x) |$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^2$.

Dans les questions 1° et 2° on suppose de plus $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

1° *a*. Établir une inégalité de la forme :

$$\left| f\left(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right) \right| \leqq \frac{C}{1 + p^2 + t^2},$$

avec C indépendant de p, t, α, et montrer que $\hat{f}$ est une fonction continue de (p, α) sur $\mathbb{R}^2$.

b. Si f et toutes ses dérivées partielles vérifient (A), montrer que $\hat{f}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

c. Sous l'hypothèse de *b*, établir les égalités :

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(p, \alpha) = \cos \alpha \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial p}, \qquad \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_2}}(p, \alpha) = \sin \alpha \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial p}$$

$\left(\right.$on pourra calculer d'abord $\left(\cos \alpha \dfrac{\partial}{\partial p} - \sin \alpha \dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(f\left(pu_\alpha + tu_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right)\right)$ au moyen de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)$.

2° On donne $R > 0$ et on suppose que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifie (A) et

(B) *pour tout cercle* Γ *qui entoure* $D(0, R)$, *on a* $f_\Gamma = 0$.

a. Soient $R' > R$, et V l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $\| v \| < R' - R$. En calculant $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx$ en coordonnées polaires d'origine v, déduire de (B) que la fonction $g(v) = \iint_{D(v, R')} f(x)\, dx$ est constante pour $v \in V$ et que, pour $v \in V$, $i = 1, 2$, on a :

$$\iint_{D(0, R')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(v + x)\, dx = 0.$$

b. Montrer par la formule de Green-Riemann que $(h_i)_\Gamma = 0$ quand Γ est le cercle $C(0, R')$ et $h_i(x) = x_i . f(v + x)$, et que $(x_i f)_\Gamma = 0$ pour tout cercle Γ qui entoure $D(0, R)$.

c. En déduire, au moyen du théorème de Stone-Weierstrass, que $\operatorname{supp} f \subset D(0, R)$.

3° On suppose seulement que f est continue, et vérifie (A) et (B). On rappelle que, pour $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, positive, radiale, à support dans $D(0, \varepsilon)$, et telle que $\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$.

a. Montrer que la fonction $f_\varepsilon(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)\, \varphi_\varepsilon(x - y)\, dy$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que f_ε vérifie (A) et (B), avec $R + \varepsilon$ au lieu de R.

c. En déduire que l'on a encore $\operatorname{supp} f \subset D(0, R)$.

II

Dans cette partie, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, possédant la propriété (A) de I, et telle que :

(B′) *pour toute droite affine* L *qui ne rencontre pas* D (0, R), *on a* $f_L = 0$.

4° On suppose de plus $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et f *radiale.*

a. Montrer qu'il existe F, continûment dérivable sur $[0, +\infty[$, telle que :

$$f(x) = F(\|x\|^2) \qquad \text{et} \qquad \hat{f}(p, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(p^2 + t^2)\,dt \qquad \text{pour } (p, \alpha) \in \mathbb{R}^2.$$

b. Soit $G(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(q + t^2)\,dt$ pour $q > 0$. Vérifier que :

$$F(q) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dq}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(q + s^2)\,ds\right).$$

c. En déduire que $\operatorname{supp} f \subset D(0, R)$.

5° On ne suppose plus que f est C^∞. En s'inspirant de 3°, montrer que la conclusion de 4° *c* reste valable si f est continue, radiale, et vérifie (A), (B′).

6° On ne suppose plus f radiale, mais seulement f continue et (A), (B′). Pour $a, x \in \mathbb{R}^2$, soit :

$$f^a(x) = \int_0^{2\pi} f(a + R_\theta x)\,d\theta.$$

a. Montrer que f^a est continue, radiale, vérifie (A) et (B′) avec $R + \|a\|$ au lieu de R.

b. En utilisant 3° *c*, montrer que $\operatorname{supp} f \subset D(0, R)$.

III

Dans cette partie, on développe quelques applications de la question 6°. Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$.

7° *a.* Montrer que K est l'intersection de la famille des disques fermés qui le contiennent.

b. Soit $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$, vérifiant (A). Établir que $\operatorname{supp} g \subset K$ si et seulement si $g_L = 0$ pour toute droite affine L disjointe de K.

8° Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, solution de l'équation différentielle à coefficients constants :

$$\varphi^{(n)} + a_1\varphi^{(n-1)} + \dots + a_n\varphi = 0$$

sur l'intervalle $I =]t_0, +\infty[$. On suppose $\varphi(t) = 0$ pour tout $t > t_1$, avec $t_1 \in I$. Montrer que φ est identiquement nulle sur I.

9° Soient $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et $Pg = \sum_{j+k \leq m} a_{jk} \dfrac{\partial^{j+k} g}{\partial x_1^j \partial x_2^k}$, où les a_{jk} sont des constantes réelles, avec $a_{00} \neq 0$.

On suppose $\operatorname{supp} g$ compact et $\operatorname{supp} Pg \subset K$. En utilisant 1° *c* et 8°, montrer que $\operatorname{supp} g \subset K$.

10° Soient $h \in C^0(\mathbb{R}^2)$ et $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. On suppose que supp h est compact et que $\widehat{h}(p, \alpha) = 0$ pour tout p réel et tout α tel que $|\alpha| \leqq \varepsilon$. Montrer que h est identiquement nulle (on pourra raisonner sur un losange dont un des angles est 2ε, et contenant supp h).

11° *a.* Construire une fonction $j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $j(x_1, x_2) = z^{-2}$ si $z = x_1 + ix_2$, $|z| \geqq 1$, et montrer que $j_L = 0$ si la droite L est disjointe du disque unité D.

b. Montrer que $j_\Gamma = 0$ si le cercle Γ entoure D.

c. Que peut-on déduire de cet exemple?

IV

Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ son produit scalaire, $\|\ \|$ sa norme. On note $\bar{A}$, respectivement $A^\perp$, l'adhérence, respectivement l'orthogonal, d'une partie A de H.

On se donne k sous-espaces vectoriels fermés $N_1, \ldots, N_k$ de H, et on note $N_0 = N_1 \cap \ldots \cap N_k$. Soient I l'identité de H et, pour $f \in H$ *fixé*, P_j le projecteur orthogonal de H sur le sous-espace affine $f + N_j$ de H, avec $0 \leqq j \leqq k$; on pose $Q = P_k P_{k-1} \ldots P_2 P_1$.

On se propose de montrer d'abord que, pour tout $g \in H$,

(1) $$Q^n g \longrightarrow P_0 g \textit{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Dans les questions 12° à 16° on suppose de plus que $f = 0$; les P_j et Q sont alors des applications *linéaires* de H dans H.

12° *a.* Si P est un projecteur orthogonal de H sur un sous-espace vectoriel fermé N, montrer que l'égalité $\|Pg\| = \|g\|$ équivaut à $g \in N$.

b. En déduire que Ker $(I - Q) = N_0$ (si $g \in$ Ker $(I - Q)$, on observera que $\|g\| \leqq \|P_1 g\| \ldots$).

c. En déduire que Ker $(I - Q^*) = N_0$, où Q^* est l'opérateur adjoint de Q.

13° Soit $E = \mathrm{Im}(I - Q)$. Montrer que $H = \bar{E} \oplus N_0$, et qu'il suffit d'établir (1) pour $g \in E$.

14° Montrer par récurrence sur k que, pour toute suite (f_n) de la boule unité de H, la propriété « $\|Qf_n\| \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ » implique que « $(I - Q) f_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ ».

15° *a.* Soit $g = (I - Q) h \in E$. Établir que $Q^n g \longrightarrow 0$; on pourra considérer $a = \lim\limits_{n+\infty} \|Q^n h\|$ et, si $a > 0$, appliquer 14° à $f_n = Q^n h / \|Q^n h\|$.

b. En déduire (1).

16° Pour préciser la convergence (1), on suppose $k = 2$, et on note $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'angle de N_1 et N_2, défini par :

$$\cos\theta = \sup \frac{(g_1 \mid g_2)}{\|g_1\| \cdot \|g_2\|},$$

le sup étant pris pour $g_1 \in N_1 \cap N_0^\perp$, $g_2 \in N_2 \cap N_0^\perp$, non nuls.

a. Établir l'inégalité $\|Qg\| \leqq \cos\theta \, . \, \|g\|$, pour $g \in N_0^\perp$.

b. En déduire que, pour tout $g \in H$ et tout entier $n \geqq 0$, on a :

(2) $$\|Q^n g - P_0 g\| \leqq \cos^n\theta \, . \, \|g - P_0 g\|.$$

17° Montrer que (1) et (2) restent valables lorsque f est fixé quelconque dans H.

Désormais on prend pour H l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^2$, nulles hors du disque unité D, avec $(f|g) = \iint_D f(x)\, g(x)\, dx$. Soient $u_1, \ldots, u_k$ k vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$, $v_j = R_{\frac{\pi}{2}} u_j$, et

$$(A_j g)(p) = \int_{\mathbb{R}} g(pu_j + tv_j)\, dt\ ,\ 1 \leq j \leq k\ ,$$

pour $g \in H$, $p \in \mathbb{R}$. On prend pour N_j le noyau de l'opérateur A_j.

18° Montrer que $A_j : H \longrightarrow L^1(\mathbb{R})$ est continu, et que N_j est un sous-espace fermé de H.

19° Vérifier que, pour $g \in H$, $x \in \mathbb{R}^2$,

$$(P_j g)(x) = g(x) + \varphi(x) \frac{(A_j(f - g))(u_j \cdot x)}{(A_j \varphi)(u_j \cdot x)},$$

où φ est la fonction caractéristique de D.

20° Déduire de ce qui précède (avec $g = 0$ par exemple) une méthode de reconstruction approchée modulo N_0 d'une fonction $f \in H$ à partir des fonctions $A_1 f, \ldots, A_k f$.

21° Montrer que N_0 n'est pas réduit à $\{0\}$: pour $k = 1$ d'abord, on cherchera $f \in N_0$ comme dérivée convenable d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, à support dans D.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

I. LE SUJET

Ce problème étudie quelques propriétés de la transformation de Radon dans le plan qui, à une fonction f , associe la famille de ses intégrales sur toutes les droites. Si les premiers résultats sur le sujet remontent à Johann RADON (1917), cette question n'en connaît pas moins un important regain d'intérêt, en liaison notamment avec la théorie mathématique de la tomographie aux rayons X [3], ou grâce à ses généralisations aux espaces homogènes de groupes de Lie.

Les parties II et III proposent une démonstration et quelques applications d'une propriété de support (question 7°b), due à Sigurdur HELGASON (1965), en passant par l'inversion de l'équation intégrale d'Abel (cf. 4°b).

Laissant de côté la recherche d'une formule explicite exacte pour inverser la transformation (dont on trouvera plusieurs formes dans la bibliographie), la partie IV aborde le problème un peu plus réaliste d'une reconstruction approchée de f , par des méthodes purement hilbertiennes, à partir d'un nombre fini de ses "radiographies" $A_j f$ (cf. 20°). Le résultat (1) sur les projecteurs est dû à I. HALPERIN (1962).

Bien qu'elle ne soit pas utilisée ici, la transformation de Fourier est aussi un outil précieux pour étudier ces questions : voir [1],[2] ci-dessous, ou même le problème d'Analyse de la session 1982 ...

REFERENCES

[1] HELGASON, S. "The Radon transform", Birkhäuser 1980 (que l'énoncé suit d'assez près)

[2] HELGASON, S. "Groups and geometric analysis", Academic Press 1984

[3] SHEPP, L.A. et J.B. KRUSKAL "Computerized tomography : the new medical X-ray technology", Amer. Math. Monthly, June 1978.

II. REMARQUES GENERALES

Les deux premières parties du problème ne font appel qu'à des connaissances très classiques d'analyse; compte tenu des rappels inclus dans l'énoncé le niveau du premier cycle universitaire suffit pour traiter la quasi-totalité des questions 1° à 6° . Elles ont donc été largement abordées par les candidat mais n'ont pas manqué de révéler, dans certains cas, des lacunes graves :

- manipulation maladroite, ou incorrecte, des inégalités (1°a, 3°b, 6°a)
- confusions dans l'usage des dérivées partielles (1°b, 1°c, 2°a)
- méconnaissance des difficultés liées aux coordonnées polaires, au voisinage de l'origine (4°a)

sont parmi les plus fréquentes.

D'autre part, le contexte "géométrique" du sujet a visiblement gêné de nombreux candidats, et explique en partie la désaffection de la partie III au profit de IV. Le recours à un croquis aurait pourtant suffi, dans la plupart des cas, à dissiper cette gêne. Ce qui devrait être un réflexe normal chez tout (futur) enseignant reste encore l'exception, et cela mène au paradoxe que la grande majorité d'entre eux semble plus à l'aise dans un espace hilbertien, en dimension infinie, qu'en présence d'un losange du plan.

La dernière partie a souvent été abordée de façon satisfaisante. Ici les lacunes principales apparaissent surtout en 12°a (certains semblent redécouvri le théorème de Pythagore, parfois même incorrectement énoncé ... et orthographié), et en 13° (décomposition en sous-espaces orthogonaux).

L'impression d'ensemble laissée par les copies est finalement assez conve nable. La rédaction reste cependant un point faible, même chez des candidats aux connaissances par ailleurs solides. S'il n'existe guère de critère objecti d'une bonne rédaction, on peut simplement rappeler, une fois encore, qu'il fau s'attacher à mettre en lumière, sans verbiage, chaque articulation importante d'un raisonnement ou d'un calcul : intervention d'une hypothèse du problème, d'un résultat précédent, d'un théorème connu (dont on doit vérifier explicitement les hypothèses), etc.

III. REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS

1°a) Ajouter les majorations de (A) pour $n = 0$ et 2 conduit immédiatement à l'inégalité. La continuité de $\hat{f}$ s'obtient tout aussi vite par convergence dominée, à condition de majorer par une fonction intégrable indépendante des paramètres (ici p et α). Le théorème utile, pourtant rappelé dans l'énoncé, a bien souvent été incorrectement appliqué.

1°b) Lorsqu'on dérive en p et α, les dérivées de f (en x_1 et x_2) se trouvent multipliées par des coefficients polynomiaux en p , t , $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Le résultat peut cependant être majoré par $C/1+t^2$, grâce à la condition (A).

1°c) Certains se débarassent d'un terme gênant en écrivant :
" $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(p,t)\, dt = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} f(p,t)\, dt = 0$, car la dernière intégrale ne dépend pas de t " ...

2°a) Ne pas oublier de justifier les calculs faits, grâce à l'intégrabilité de f dans le plan. Le jury se voit ici contraint de rappeler que la fonction $1/1+x^2+y^2$ n'est pas intégrable en (x,y) sur $\mathbb{R}^2$ (pour la mesure de Lebesgue), et encore moins la fonction $1/x^2+y^2$, cette erreur ayant été commise un très grand nombre de fois.

2°b) Comme $(x_i f)(v+x) = v_i . f(v+x) + x_i . f(v+x)$, il y a deux termes à considérer pour montrer la nullité de $(x_i f)_\Gamma$.

2°c) Cette question n'a été que rarement traitée, malgré l'indication fournie par l'énoncé.

3°a) L'énoncé invite à donner une démonstration complète. On peut aussi considérer le résultat comme classique; encore faut-il citer correctement un énoncé précis, sans se contenter d'un vague "on régularise en convolant". Enfin on lit encore trop souvent l'égalité $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \phi(x-y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\, \phi(z)\, dz$, fausse évidemment, y compris pour $n = 1$!

3°b) La majoration qui donne (A) a rarement été faite avec soin.

3°c) Plutôt que de tenter de "passer à la limite" sur les supports, il est préférable d'utliser la convergence simple de f_ε vers f .

4°a) Cette question très élémentaire n'a été bien traitée que par moins de des copies !

4°b) Veiller à justifier les calculs, en majorant F grâce à (A). Le calcul formel est facile, en passant en coordonnées polaires dans le plan des varia (s,t), d'où l'apparition du facteur π .

7°a) Cette question, de rédaction un peu délicate, a donné lieu à quelques nes solutions. On trouvera en annexe une démonstration possible, dont le déb établit l'énoncé "de Hahn-Banach géométrique" utile ici; on rappelle à cette occasion que, dans tout espace hilbertisable (en particulier en dimension fi cette preuve ne nécessite pas de recourir à l'axiome du choix.

8°) Encore une question très simple qui n'a guère été correctement traitée le théorème d'unicité globale pour les équations différentielles linéaires semble mal connu.

9°) Pour chaque α fixé, on peut appliquer le résultat de 8° à la fonction $\hat{g}$

Les questions 10° et 11° n'ont presque pas été abordées.

12°a) et b) Correct le plus souvent.

13°) De nombreuses copies considèrent Q comme un projecteur, ce qu'il n'est p en général (voir l'exemple de $H = \mathbb{R}^2$ avec deux droites N_1, N_2). D'autre part, le noyau et l'image d'un endomorphisme ne sont pas toujours supplémentaires, même en dimension finie ! La décomposition de H s'obtient ici en observant que E et $\overline{E}$ ont même orthogonal, et que l'orthogonal de l'image d'un opérateur est le noyau de son adjoint.

La propriété (1) est claire pour g dans N_0 ; elle s'étend par densité de à $\overline{E}$ (à justifier avec soin); par linéarité elle est alors vraie pour tout g de

15°a) Ne pas oublier d'établir, en deux mots, l'existence de la limite a .

16°a) Pour introduire cos θ dans une majoration, s'assurer que les vecteurs g_1 et g_2 choisis sont bien dans les sous-espaces voulus. Il en va de même lorsqu'on veut itérer, en 16°b, l'inégalité de 16°a.

Les autres questions n'ont pratiquement pas été abordées.

ANNEXE I : Répartition des notes des 995 copies .

de 0 à 4	289	de 20 à 24	54	de 40 à 44	22
de 5 à 9	111	de 25 à 29	140	de 45 à 49	21
de 10 à 14	80	de 30 à 34	78	de 50 à 54	18
de 15 à 19	102	de 35 à 39	55	de 55 à 60	25

ANNEXE II

On trouvera ci-dessous un corrigé succinct du problème. Ce document de travail n'est publié ici qu'à titre d'information, et ne saurait évidemment être considéré comme une "copie modèle".

1°a) Appliquer (A) avec n = 0 et 2 donne en ajoutant $(1+\|x\|^2)|f(x)| \leq C$, d'où $|f(\dots)| \leq C/1+p^2+t^2 \leq C/1+t^2 = g(t)$, et continuité par convergence dominée.

1°b) Par récurrence sur i+j , chaque dérivée $\partial_p^i\partial_\alpha^j(f(p\cos\alpha - t\sin\alpha , p\sin\alpha + t\cos\alpha))$ est somme finie de termes de la forme $P_{k\ell}^{ij}(\cos\alpha,\sin\alpha,p,t)\,\partial_1^k\,\partial_2^\ell\, f(\dots)$ où $P_{k\ell}^{ij}$ est un polynôme. D'après (A) pour les dérivées de f , son module est majoré par $C_{ij}/1+t^2$, d'où $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et les dérivées se calculent sous le signe somme.

1°c) On vérifie $(\cos\alpha.\partial_p - \sin\alpha.\partial_t)(f(\dots)) = (\partial_1 f)(\dots)$, d'où en intégrant:

$$\widehat{\partial_1 f}\,(p,\alpha) = \cos\alpha.\partial_p\,\hat{f} - \sin\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t(f(\dots))\,dt ,$$

d'après 1°b); le deuxième terme est nul d'après (A). De même $(\sin\alpha.\partial_p + \cos\alpha.\partial_t)(f(\dots)) = (\partial_2 f)(\dots)$ donne l'autre égalité.

2°a) On a, pour v dans V ,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f = \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} f(v+ru_\theta)\,d\theta \quad \text{(convergence par (A) avec n = 3)}$$

$= \int_0^\infty f_{C(v,r)} . r \, dr = \int_0^{R'} \ldots$ (par (B), car $C(v,r)$ entoure $D(0,R)$ si $r > R$)
$= g(v)$, calculé en polaires d'origine v . Donc g est constante sur V
comme $g(v) = \iint_{D(0,R')} f(v+x) \, dx$ on a, par dérivation (élémentaire) sous $\iint$

$$\frac{\partial g}{\partial v_i}(v) = \iint_{D(0,R')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(v+x) \, dx = 0 .$$

2°b) Sur le cercle $\Gamma_o = C(0,R')$ on a $dx_1 = - x_2 d\theta$, $dx_2 = x_1 d\theta$, d'où par 2 et Green-Riemann : $(h_i)_{\Gamma_o} = 0$. D'autre part $(v_i f(v+x))_{\Gamma_o} = 0$ par (B), d'où ajoutant $((v_i+x_i)f(v+x))_{C(0,R')} = 0$, i.e. $(x_i f)_{C(v,R')} = 0$ si $v \in V$. Or tout cercle entourant $D(0,R)$ est un $C(v,R')$, avec $R' > R$ et $v \in V$, q.e.d.

2°c) Ainsi $x_i f$ vérifie-t-elle encore (A) et (B), d'où en itérant $P(x_1,x_2) f$ aussi, pour tout $P \in \mathbb{R}[x_1,x_2]$. Par Stone-Weierstrass, les restrictions au compact Γ de ces polynômes sont denses dans $C^\circ(\Gamma)$, d'où $f = 0$ sur Γ , ceci pour tout cercle Γ entourant $D(0,R)$.

3°a) Les majorations $|f(y) \, \partial_x^\alpha \phi_\varepsilon (x-y)| \leq C_{\alpha,\varepsilon} |f(y)|$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $x,y \in \mathbb{R}^2$, permettent de dériver sous l'intégrale.

3°b) Pour montrer (A) on écrit, avec ε et n fixés,

$$\|x\|^n |f_\varepsilon(x)| \leq \iint_{\|y\| \leq \varepsilon} \|x\|^n |f(x-y)| . \phi_\varepsilon(y) \, dy \leq$$
$$\leq \iint_{\|y\| \leq \varepsilon} (\|x-y\| + \varepsilon)^n |f(x-y)| \, \phi_\varepsilon(y) \, dy \leq C \iint_{\mathbb{R}^2} \phi_\varepsilon = C$$, par (A) pour

Pour (B), soit $\Gamma = C(v,R')$ un cercle qui entoure $D(0,R+\varepsilon)$; alors, pour $\|y\| \leq$ $C(v-y,R')$ entoure $D(0,R)$, et :

$$(f_\varepsilon)_\Gamma = \int_0^{2\pi} f_\varepsilon(v+R'u_\theta) \, d\theta = \iint_{\|y\| \leq \varepsilon} \phi_\varepsilon(y) \, dy \int_0^{2\pi} f(v-y+R'u_\theta) \, d\theta$$

par Fubini élémentaire; la dernière intégrale est $f_{C(v-y,R')} = 0$ par (B) pour
D'où $(f_\varepsilon)_\Gamma = 0$, q.e.d.

3°c) Par 2°c) on a $f_\varepsilon(x) = 0$ si $\|x\| > R+\varepsilon$. Comme

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \iint_{\|y\| \leq \varepsilon} (f(x-y) - f(x)) \, \phi_\varepsilon(y) \, dy ,$$

la continuité de f donne la convergence simple sur $\mathbb{R}^2$ de f_ε vers f quand $\varepsilon \longrightarrow$
d'où $f(x) = 0$ si $\|x\| > R$.

4°a) Soit $g(t) = f(t,0)$, $t \in \mathbb{R}$; g est C^∞ sur $\mathbb{R}$, paire, et $f(x_1,x_2) = g(\|x\|)$

Soit enfin $F(t) = g(\sqrt{t})$, $t \geq 0$; F est C^∞ sur $]0,\infty[$, continue en 0 . Pour $t > 0$ on a

$$F'(t) = \frac{g'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \frac{g'(0) + \sqrt{t}\,(g''(0)+\varepsilon(t))}{2\sqrt{t}} = \tfrac{1}{2}\,(g''(0)+\varepsilon(t))$$

d'où l'existence de $F'(0) = \frac{1}{2}\, g''(0) = \frac{1}{4}\,\Delta f(0)$, et $F \in C^1([0,\infty[)$.

La formule pour $\hat{f}(p,\alpha)$ est claire.

<u>4°b)</u> Par (A) avec $n = 0$ et 4 on a $|F(u)| \leq C/1+u^2$, d'où existence et continuité de G pour $q > 0$ (l'inégalité $|F(q+t^2)| \leq C/1+t^4$ donne la convergence dominée). De plus la fonction $(t,s) \longrightarrow F(q+t^2+s^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, d'où

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} G(q+s^2)\, ds &= \iint_{\mathbb{R}^2} F(q+t^2+s^2)\, dt\,ds && \text{(Fubini)}\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty F(q+r^2)\, r\,dr && \text{(en polaires)}\\
&= \pi \int_q^\infty F(u)\, du && \text{(changement } u = q+r^2\text{)} .
\end{aligned}$$

D'où la dérivabilité en q des deux membres, et la formule.

<u>4°c)</u> D'après (B') on a $\hat{f}(p,\alpha) = G(p^2) = 0$ si $p^2 > R^2$. Par 4°b) on en déduit $F(q) = 0$ si $q > R^2$, i.e. $\operatorname{supp} f \subset D(0,R)$.

<u>5°)</u> Comme en 3°), f_ε est C^∞ et vérifie (A). De plus

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon(R_\theta x) &= \iint f(R_\theta x - R_\theta y)\, \phi_\varepsilon(R_\theta y)\, dy && \text{(jacobien de } R_\theta = 1\text{)}\\
&= \iint f(x-y)\, \phi_\varepsilon(y)\, dy = f_\varepsilon(x) && \text{(} f \text{ et } \phi_\varepsilon \text{ radiales) ,}
\end{aligned}$$

donc f_ε est radiale. Elle vérifie (B') avec $R+\varepsilon$, d'où etc.

<u>6°a)</u> Changer θ en $\theta+\omega$ donne $f^a(R_\omega x) = f^a(x)$. De plus f^a est continue, et

$$\begin{aligned}
\|x\|^n\, |f^a(x)| &\leq \int_0^{2\pi} \|R_\theta x + a - a\|^n\, |f(a+R_\theta x)|\, d\theta\\
&\leq \int_0^{2\pi} (\|R_\theta x + a\| + \|a\|)^n\, |f(\ldots)|\, d\theta
\end{aligned}$$

est borné d'après (A) pour f ; d'où (A) pour f^a . Puis

$$\begin{aligned}
(f^a)_L &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathbb{R}} f(a+pu_{\theta+\alpha} + tu_{\theta+\alpha+\pi/2})\, dt && \text{(Fubini)}\\
&= \int_0^{2\pi} f_{a+R_\theta L}\, d\theta \quad ;
\end{aligned}$$

si L ne rencontre pas $D(0,R+\|a\|)$, alors $a+R_\theta L$ ne rencontre pas $D(0,R)$, donc $(f^a)_L = 0$ d'après (B') pour f , d'où (B') pour f^a, avec $R+\|a\|$ au lieu de R.

$\underline{6°b)}$ Par 6°a) et 5°) on a $f^a(x) = 0$ dés que $\|x\| > R+\|a\|$; c'est dire que f lorsque le cercle $\Gamma = C(a,\|x\|)$ entoure $D(0,R)$. Par 3°c) il vient supp $f \subset$

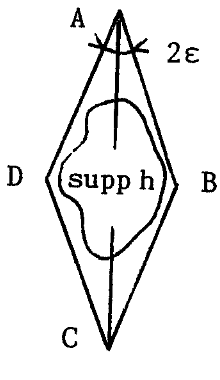
$\underline{7°a)}$ Soient x hors de K , y sa projection orthogonale sur le convexe ferm (si K est non vide ...), et L la médiatrice de xy . Par convexité, K est c dans le demi-plan ouvert défini par L qui ne contient pas x . Ce demi-plan réunion croissante des disques ouverts tangents à L au milieu de xy . Par cité, K est contenu dans l'un d'eux, d'où un disque (fermé) contenant K et x , q.e.d.

$\underline{7°b)}$ Une partie est triviale. Pour l'autre : soit Δ un disque fermé conten K ; comme $g_L = 0$ lorsque $L \cap \Delta = \emptyset$, on a supp $g \subset \Delta$ d'après 6°b) (après tran lation). D'où supp $g \subset K$ par 7°a).

$\underline{8°)}$ Clair par théorème d'unicité pour cette équation, avec condition initi $\phi(t_1) = \dots = \phi^{(n-1)}(t_1) = 0$.

$\underline{9°)}$ D'après 1°), $\widehat{Pg}(p,\alpha) = \sum a_{jk} \cos^j \alpha \, . \, \sin^k \alpha \, . \, \partial_p^{j+k} \, \hat{g}(p,\alpha)$. Pour chaq fixé, l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ tels que la droite $L_{p,\alpha}$ rencontre K est un segmen $[p'_o, p_o]$ (projection de K sur la droite $\mathbb{R}u_\alpha$). Comme supp $Pg \subset K$, on a $\widehat{Pg}(p,\alpha) = 0$ pour $p > p_o$; la fonction $p \longrightarrow \hat{g}(p,\alpha)$ est donc solution d'une éc tion différentielle non triviale ($a_{oo} \neq 0$), homogène à coefficients constant et s'annule pour p grand, puisque supp g est compact; par 8°) elle est nulle sur $]p_o, \infty[$. De même sur $]-\infty, p'_o[$, d'où $g_L = 0$ si $L \cap K = \emptyset$, et la conclusio par 7°b).

$\underline{10°)}$



Prendre un losange comme indiqué, avec AC vertical. Alor $h_L = 0$ pour toute droite L qui ne rencontre pas le compa convexe K = segment AC (si $L = L_{p,\alpha}$ avec $|\alpha| \geq \varepsilon$, L est di jointe de supp h ; si $|\alpha| \leq \varepsilon$, c'est l'hypothèse). D'où supp $h \subset AC$ par 7°b); donc supp h est sans point intérieu d'où h = 0 par continuité de h . Noter que le résultat se rait faux si $\varepsilon = 0$ (prendre h impaire en x_2).

$\underline{11°a)}$ Prendre $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, avec $\phi(t) = 0$ si $|t| \leq \frac{1}{2}$, $\phi(t) = 1$ si $|t| \geq 1$, et $j(x) = \phi(x_1^2+x_2^2).(x_1+ix_2)^{-2}$. Si L est définie par p et α , avec $|p| \geq 1$, on a

$$j_L = \int_{\mathbb{R}} j(pe^{i\alpha} + ite^{i\alpha}) \, dt = e^{-2i\alpha} \int_{\mathbb{R}} (p + it)^{-2} \, dt = 0 \, .$$

11°b) De même $j_\Gamma = \int_0^{2\pi} j(z_o+re^{i\theta})\,d\theta$ si $\Gamma = C(z_o,r)$ entoure D , i.e.

$$j_\Gamma = \int_\Gamma j(z)\frac{dz}{i(z-z_o)} = -i\int_\Gamma \frac{dz}{z^2(z-z_o)} = 0 ,$$

car l'intégrale est indépendante de r par Cauchy, et tend vers 0 si r tend vers l'infini.

11°c) Mais la fonction j (ou sa partie réelle) n'est pas à support dans D ... L'hypothèse de décroissance (A) est donc utile, en 6°) et en 3°).

12°a) Pythagore donne $\|Pg-g\|^2 = \|g\|^2-\|Pg\|^2$, nuls ssi $Pg = g$, i.e. $g\in N$.

12°b) $N_o\subset \mathrm{Ker}(I-Q)$ évidemment (si $g\in N_o$, alors $P_jg = g$ et $Qg = g$).
$\mathrm{Ker}(I-Q)\subset N_o$: car $g = Qg$ entraîne $\|g\| = \|P_k\ldots P_1g\|\leq\|P_1g\|\leq\|g\|$, les P_j étant de norme 1, d'où $g\in N_1$ et $P_1g = g$ par 12°a); par récurrence finie, on obtient $g\in N_2,\ldots,\ g\in N_k$, q.e.d.

12°c) Un projecteur orthogonal est auto-adjoint, d'où $Q^* = P_1\ldots P_k$, et il suffit de changer l'ordre des projecteurs dans 12°b).

13°) . $\overline{E}^\perp = E^\perp = (\mathrm{Im}(I-Q))^\perp = \mathrm{Ker}(I-Q^*) = N_o$ d'après 12°), donc $H = \overline{E} + N_o$ (somme directe orthogonale).
. Pour $g\in N_o$, on a $Q^ng = g = P_og$, et (1) est trivial. Par linéarité de (1), il suffit de l'établir pour $g\in\overline{E}$.
. Soient $g\in\overline{E}$, $\varepsilon>0$, et $g_o\in E$ tel que $\|g-g_o\|\leq\varepsilon$. Comme

$$\|Q^ng-P_og\|\leq\|Q^n(g-g_o)\| + \|P_o(g-g_o)\| + \|Q^ng_o-P_og_o\|\leq 2\varepsilon + \|Q^ng_o-P_og_o\| ,$$

il suffit d'établir (1) pour les points de E (noter que $P_og_o = 0$).

14°) Comme $\|Qf_n\|\leq\|f_n\|\leq 1$, l'hypothèse donne $\|f_n\|\longrightarrow 1$.
. Si k = 1 , Q est un projecteur orthogonal, d'où :

$$\|(I-Q)f_n\|^2 = \|f_n\|^2 - \|Qf_n\|^2 \longrightarrow 1-1 = 0 .$$

. De k-1 à k : soit $Q = P_kQ'$, la propriété étant vraie pour Q' . D'après le cas k = 1 , l'hypothèse $\|Qf_n\| = \|P_kQ'f_n\|\longrightarrow 1$ (portant sur la suite $(Q'f_n)$ de la boule unité) entraîne $(I-P_k)Q'f_n \longrightarrow 0$; donc $\|Q'f_n\|$ a même limite que $\|P_kQ'f_n\|$, soit 1 . L'hypothèse de récurrence donne alors $(I-Q')f_n \longrightarrow 0$, d'où

$$(I-Q)f_n = (I-Q')f_n + (I-P_k)Q'f_n \longrightarrow 0 ,\quad \text{q.e.d.}$$

15°a) Les $\|Q^n h\|$ forment une suite décroissante positive, car $\|Q\| \leq 1$, d'où l'existence de $a \geq 0$.

. Si $a = 0$, alors $Q^n h \longrightarrow 0$, et $Q^n g = Q^n h - Q^{n+1} h \longrightarrow 0$, q.e.d.

. Si $a > 0$, alors $\|Q^n h\| \geq a > 0$, d'où l'existence des f_n , de norme 1 . Comm $Qf_n = Q^{n+1}h/\|Q^n h\|$, on a $\|Qf_n\| \longrightarrow a/a = 1$, d'où $(I-Q)f_n \longrightarrow 0$ par 14°), $(I-Q)Q^n h = Q^n g \longrightarrow 0$, q.e.d.

15°b) Pour $g \in E$ on a $P_o g = 0$ par 13°). Par 15°a) et 13°) on a donc (1) si f

16°a) P_1 et P_2 laissent stable N_o , donc aussi son orthogonal; donc $P_1 g \in N_1$ et $P_2 P_1 g = Qg \in N_2 \cap N_o^{\perp}$ quand $g \in N_o^{\perp}$. Par suite

$$(P_1 g | P_2 P_1 g) \leq \cos\theta \|P_1 g\| \, \|Qg\| \leq \cos\theta \|g\| \, \|Qg\| ;$$

mais le premier membre n'est autre que $\|Qg\|^2$, d'où le résultat.

16°b) Comme $N_o^{\perp}$ est stable par Q , on obtient $\|Q^n g\| \leq \cos^n\theta \, \|g\|$ pour $g \in N_o^{\perp}$, e itérant 16°a). La décomposition $H = N_o + N_o^{\perp}$, avec $P_o = I = Q$ sur N_o , donne alors (2) par linéarité.

17°) Soient T_f la translation $g \longrightarrow g+f$ dans H , et P_j° , Q° les opérateurs Q du cas $f = 0$. Par invariance de la distance par translation on a, pour $0 \leq j$ $T_f P^\circ{}_j T_f^{-1} = P_j$, d'où $T_f (Q^\circ)^n T_f^{-1} = Q^n$, ce qui ramène le cas général au cas f

18°) Par Cauchy-Schwarz on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |g(pu_j + tv_j)| \, dpdt = \iint_D |g| \leq \left(\iint_D 1 \, . \iint_D g^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \, \|g\|_H < \infty .$$

D'après Fubini, $A_j g$ est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (définie presque p tout), et $\|A_j g\|_1 \leq \sqrt{\pi} \|g\|_H$, d'où la continuité de A_j .

19°) Par translation, on peut supposer $f = 0$ (cf. 17°); par rotation dans $\mathbb{R}^2$ on peut se ramener à $u_j = (1,0)$, $v_j = (0,1)$, et oublier l'indice j pour simp lifier. Alors

$$(Ag)(x_1) = \int_{\mathbb{R}} g(x_1,x_2) \, dx_2 \ . \ \text{Soit } h(x_1,x_2) = g(x_1,x_2) - \phi(x_1,x_2) \frac{Ag(x_1)}{A\phi(x_1)}$$

La propriété voulue $h = Pg$ résulte des trois faits suivants :

. $\underline{h \in H}$: en effet $g = \phi^{\frac{1}{2}} . \, g$, d'où par Cauchy-Schwarz

$$(Ag(x_1))^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1,x_2) \, dx_2 \int_{\mathbb{R}} g(x_1,x_2)^2 \, dx_2 = A\phi(x_1) \int_{\mathbb{R}} g(x_1,x_2)^2 \, dx_2$$

D'autre part, pour toute fonction F mesurable positive, on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \phi(x_1,x_2)F(x_1)\,dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}} F(x_1)\,dx_1 \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1,x_2)\,dx_2 = \int_{-1}^{+1} A\phi(x_1)F(x_1)dx_1$$

Finalement :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left(\phi(x_1,x_2)\frac{Ag(x_1)}{A\phi(x_1)}\right)^2 dx_1dx_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{Ag(x_1)^2}{A\phi(x_1)}\,dx_1 \leq \iint_{\mathbb{R}^2} g(x_1,x_2)^2\,dx_1dx_2 < \infty \,,$$

d'où $h \in H$ (noter que $A\phi(x_1) = 2\sqrt{1-x_1^2}$ sur $[-1,1]$).

. <u>$h \in \mathrm{Ker}\, A$</u> , car $Ah = Ag - A\phi.\frac{Ag}{A\phi} = 0$, les fonctions Ag et $A\phi$ étant constantes sur les verticales.

. <u>$g-h \perp \mathrm{Ker}\, A$</u> , car pour $u \in \mathrm{Ker}\, A$ on a $A(\phi u) = Au = 0$ et

$$(g-h|u) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{Ag(x_1)}{A\phi(x_1)}\,\phi u(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{Ag(x_1)}{A\phi(x_1)}\,A(\phi u)(x_1)\,dx_1 = 0\,.$$

<u>20°)</u> $A_1f,\ldots, A_kf$ (et $u_1,\ldots,u_k$) étant connus, les opérateurs P_j sont donnés explicitement par 19°), d'où Q . Par (1), Q^n0 tend vers P_o0 , projection orthogonale de 0 sur $f+N_o$, i.e. fonction de norme minimale égale à f modulo N_o .

<u>21°)</u> Si $v \in \mathbb{R}^2$, soit ∂_v la dérivation dans la direction de v :

$$\partial_v f(x) = \frac{d}{dt}\,f(x+tv)_{t=0}\,.$$

. <u>$k = 1$</u> . Soit $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, avec $\mathrm{supp}\, g = D$. Prendre $f = \partial_{v_1} g$ donne $A_1f = 0$, i.e. $f \in \mathrm{Ker}\, A_1 = N_1 = N_o$; de plus f n'est pas identiquement nulle, sinon g serait constante sur les parallèles à v_1 , donc identiquement nulle.

. <u>k général</u> : $f = \partial_{v_1}\partial_{v_2}\ldots\partial_{v_k} g$ donne $A_1f = \ldots = A_kf = 0$, et $f \not\equiv 0$.

<u>Conclusion</u> : f n'est pas entièrement déterminée par la connaissance d'un nombre fini de radiographies $A_1f,\ldots,A_kf$. Mais on peut montrer (par Fourier) qu'une infinité la déterminerait; cf. le résultat (plus faible) de 10°).