MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Dans tout le problème, on fixe un entier n strictement positif, et on note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

On munit E de sa structure standard d'espace euclidien. Pour x et y dans E, on note $\|x\|$ la norme de x et $x \cdot y$ le produit scalaire de x et y; si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on a donc :

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \quad \|x\|^2 = x \cdot x.$$

On note O l'élément neutre de $(E, +)$.

On note $\mathfrak{I}_s$ le groupe des applications *affines* isométriques de E dans lui-même, $\mathfrak{O}$ le sous-groupe de $\mathfrak{I}_s$ formé des applications *linéaires* isométriques (le groupe orthogonal de E), $\mathfrak{T}$ le sous-groupe formé des translations; si x appartient à E, on note t_x la translation de vecteur x; si X est une partie de E, on note $\mathfrak{T}_X$ l'ensemble des translations dont les vecteurs sont dans X; on note I l'application identité de E, translation de vecteur nul.

On note $\mathfrak{L}$ l'algèbre End (E) des applications linéaires de E dans E. On munit $\mathfrak{L}$ de la norme des opérateurs : la norme d'un élément f de $\mathfrak{L}$ est

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| / \|x\| \mid x \in E, x \neq 0 \}.$$

On munit $\mathfrak{L}$ et ses sous-ensembles de la topologie induite par cette norme.

Si Γ est un groupe et α, β deux éléments de Γ, on note $[\alpha, \beta]$ le commutateur $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ de α et β. On rappelle qu'un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* (ou *normal*) si, quels que soient α dans Δ et β dans Γ, alors $\beta\alpha\beta^{-1}$ appartient à Δ.

Pour tout entier g strictement positif, on note $\mathbb{N}_g$ l'ensemble des entiers de 1 jusqu'à g.

Un sous-groupe G de $\mathfrak{I}_s$ est dit *cristallographique* s'il vérifie les deux conditions C1 et C2 suivantes :

C1. — Il existe un nombre réel d tel que, pour tout vecteur x de E, il existe un élément α de G vérifiant $\|\alpha(0) - x\| \leqslant d$.

C2. — Quel que soit le nombre réel T, il existe seulement un nombre fini d'éléments α de G vérifiant $\|\alpha(0)\| \leqslant T$.

Le but du problème est la démonstration du théorème suivant, dû à L. BIEBERBACH.

THÉORÈME : Tout sous-groupe cristallographique de $\mathfrak{I}_s$ contient n translations linéairement indépendantes.

I. PRÉLIMINAIRES

A. Décomposition des éléments de $\mathfrak{Is}$.

1. Soit α un élément de $\mathfrak{Is}$; montrer qu'il existe un et un seul élément (a, A) de $\mathrm{E} \times' \mathcal{O}$ tel que $\alpha = t_a \circ \mathrm{A}$.
   Notation : on pose $a = \tau(\alpha)$, $\mathrm{A} = \pi(\alpha)$, et on note π l'application $\alpha \longmapsto \pi(\alpha)$ de $\mathfrak{Is}$ dans $\mathcal{O}$, τ l'application $\alpha \to \tau(\alpha)$ de $\mathfrak{Is}$ dans E.

2. Prouver que π est un morphisme de groupes de $\mathfrak{Is}$ dans $\mathcal{O}$.
   Déterminer son image et son noyau.

3. Si G est un sous-groupe de $\mathfrak{Is}$, prouver que $\mathrm{G} \cap \mathcal{T}$ est un sous-groupe abélien distingué de G.
   Soit α un élément de $\mathfrak{Is}$. Posons $a = \tau(\alpha)$ et $\mathrm{A} = \pi(\alpha)$.

4. Soit x un vecteur de E; prouver qu'on a
$$\alpha \circ t_x \circ \alpha^{-1} = t_{\mathrm{A}(x)}.$$
   Soit β un autre élément de $\mathfrak{Is}$. Posons $b = \tau(\beta)$ et $\mathrm{B} = \pi(\beta)$.

5. Calculer $\tau(\alpha\beta)$ en fonction de a, A, b et B.

6. Calculer $\tau(\alpha^{-1})$ et $\pi(\alpha^{-1})$ en fonction de a et A.

7. Posons $\gamma = [\alpha, \beta]$. Prouver qu'on a
$$\pi(\gamma) = [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$$
$$\text{et } \tau(\gamma) = (\mathrm{A} - \mathrm{I})(b) + (\mathrm{I} - [\mathrm{A}, \mathrm{B}])(b) + \mathrm{A}\,(\mathrm{I} - \mathrm{B})\,\mathrm{A}^{-1}(a).$$

B. Étude de la norme d'opérateurs.

Si f est un élément de $\mathcal{L}$, on note f^* l'endomorphisme adjoint de f.

1. Montrer que l'application $f \longmapsto f^*f$ de $\mathcal{L}$ dans lui-même est continue. Prouver que $\mathcal{O}$ est compact et que les applications $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \longmapsto \mathrm{AB}$ de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ et $\mathrm{A} \longmapsto \mathrm{A}^{-1}$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ sont continues.

2. Soit f un élément de $\mathcal{L}$. Montrer que f^*f est diagonalisable dans une base orthonormale de E, que ses valeurs propres sont des nombres réels positifs et que $\|f\|^2$ est la plus grande valeur propre de f^*f.
   Pour tout élément f de $\mathcal{L}$, on note E_f l'ensemble des vecteurs x de E vérifiant $\|f(x)\| = \|f\| \cdot \|x\|$.

3. Soit f un élément de $\mathcal{L}$. Prouver que E_f est un sous-espace vectoriel de E, non réduit à $\{0\}$.

4. Quels sont les éléments f de $\mathcal{L}$ pour lesquels E_f est E tout entier ?

5. Soient f dans $\mathcal{L}$ et A dans $\mathcal{O}$. Prouver qu'on a
$$\|f\| = \|f\mathrm{A}\| = \|\mathrm{A}f\|.$$
   Pour tout élément A de $\mathcal{O}$, on pose $m(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A} - \mathrm{I}\|$ et on note $\mathrm{M_A}$ l'espace vectoriel $\mathrm{E_{A-I}}$, $\mathrm{M_A^\perp}$ son orthogonal dans E.

6. Soit A un élément de $\mathcal{O}$, prouver que $\mathrm{M_A}$ et $\mathrm{M_A^\perp}$ sont stables par A.

7. Soient A et B dans $\mathcal{O}$, prouver qu'on a
$$m([\mathrm{A}, \mathrm{B}]) = \|\mathrm{AB} - \mathrm{BA}\|$$
   et en déduire l'inégalité
$$m([\mathrm{A}, \mathrm{B}]) \leqslant 2\, m(\mathrm{A})\, m(\mathrm{B}).$$

Soit A dans $\mathcal{O}$; si $M_A^{\perp}$ est réduit à $\{0\}$ on pose $m^{\perp}(A) = 0$, sinon, on pose

$$m^{\perp}(A) = \sup \{ \| A(x) - x \| / \| x \| \mid x \in M_A^{\perp}, x \neq 0 \}.$$

8. Soit A dans $\mathcal{O}$; prouver qu'on a

$$0 \leqslant m(A) - m^{\perp}(A) \leqslant 2.$$

9. Quels sont les éléments A de $\mathcal{O}$ tels que $m(A) = m^{\perp}(A)$?

10. Quels sont ceux vérifiant $m(A) = m^{\perp}(A) + 2$?

II. ÉTUDE DES SOUS-GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES FORMÉS DE TRANSLATIONS

On dit qu'un sous-groupe de $(E, +)$ est un *réseau* s'il est engendré par les vecteurs d'une base de E. Dans cette partie II, on considère un sous-groupe L de $(E, +)$ et on note $\mathcal{C}_L$ le sous-groupe de $\mathcal{C}$ associé à L. On veut prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}_L$ soit cristallographique est que L soit un réseau.

A. On suppose d'abord que L est un réseau. Prouver que $\mathcal{C}_L$ est cristallographique.

B. Soit maintenant L un sous-groupe quelconque de $(E, +)$. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs de L.

1. Prouver que si F est distinct de E, $\mathcal{C}_L$ n'est pas cristallographique.

2. En déduire que si $\mathcal{C}_L$ est cristallographique, alors L contient n vecteurs de E linéairement indépendants.

C. Soient L un sous-groupe de $(E, +)$ tel que $\mathcal{C}_L$ est cristallographique et $w_1, \dots, w_n$ n vecteurs de E, linéairement indépendants, contenus dans L. On note $l_1, \dots, l_n$ les applications coordonnées dans la base $(w_1, \dots, w_n)$ de E.

Soient x et y deux éléments de E; nous dirons qu'on a $x \leqslant y$ si $x = y$ ou s'il existe k dans $\mathbb{N}_n$ tel qu'on ait $l_i(x) = l_i(y)$ pour tout i dans $\mathbb{N}_n$ strictement plus *grand* que k et $l_k(x) < l_k(y)$.

1. Prouver que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E et que tout sous-ensemble fini non vide de E admet un plus petit élément pour cet ordre.

   Soit V l'ensemble des vecteurs *non nuls* de L vérifiant $0 \leqslant l_i(x) \leqslant 1$ pour tout i dans $\mathbb{N}_n$.

2. Prouver que V est fini et qu'il existe une suite $v_1, \dots, v_n$ de vecteurs dans V, uniquement déterminée par les conditions (i) et (ii) suivantes :

   (i) v_1 est le plus petit élément de V;

   (ii) pour tout k dans $\mathbb{N}_{n-1}$, si on note F_k le sous-espace vectoriel de E engendré par $v_1, \dots, v_k$, alors v_{k+1} est le plus petit élément de V n'appartenant pas à F_k.

3. Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E et qu'on a

$$0 < l_j(v_j) \leqslant 1$$
$$\text{et} \qquad l_i(v_j) = 0$$

   pour tout j dans $\mathbb{N}_n$ et tout i dans $\mathbb{N}_n$ tels que $i > j$.

   On note L′ le réseau de E engendré par $v_1, \dots, v_n$.

4. Prouver que pour tout x dans L, il existe x' dans L′ tel que, pour tout j dans $\mathbb{N}_n$, on ait

$$0 \leqslant l_j(x - x') < l_j(v_j).$$

5. Montrer qu'on a $L = L'$.

III. RÉSEAUX ET GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

Pour tout sous-groupe L de (E, +), on note S_L le stabilisateur de L dans $\mathcal{O}$, Σ_L le stabilisateur de L dans $\mathfrak{I}s$:

$$S_L = \{ A \in \mathcal{O}, A(L) = L \}$$
$$\Sigma_L = \{ \alpha \in \mathfrak{I}_s, \alpha(L) = L \}.$$

A. Soit L un sous-groupe de (E, +).

1. Prouver qu'on a $\Sigma_L \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.

2. Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{I}s$ tel que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.
Montrer que $\pi(G)$ est inclus dans S_L.

3. Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{I}s$ tel que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.
Supposons en outre que G est inclus dans Σ_L.
Prouver que l'application (τ, π) de $\mathfrak{I}s$ dans $E \times \mathcal{O}$ induit une bijection de G dans $L \times \pi(G)$. Expliciter la loi de groupe sur $L \times \pi(G)$ transportée de celle de G par cette bijection.

B. Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de $\mathfrak{I}s$ tel que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.

1. Montrer que S_L est fini.

2. Montrer que $\mathfrak{T}_L$ est d'indice fini dans G.

3. Prouver que G est cristallographique.

C.1. Pour cette question seulement, supposons $n = 1$ et prenons pour L le réseau $\mathbb{Z}$ de $E = \mathbb{R}$. Décrire les sous-groupes G de $\mathfrak{I}s$ tels que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$.

2. Pour cette question seulement, supposons $n = 2$ et prenons pour L le réseau $\mathbb{Z}^2$ de $E = \mathbb{R}^2$. Calculer le cardinal de S_L.

D. Soient L un réseau de E et G un sous-groupe de $\mathfrak{I}s$ tel que $G \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_L$. Soit H un sous-groupe *abélien* de G, *distingué* dans G.

1. Pour x dans L et A dans $\pi(H)$ prouver qu'on a $(A - I)^2(x) = 0$ (on pourra utiliser le fait que si un élément x de G vérifie $A = \pi(\alpha)$, alors α commute à $t_x \alpha t_{-x}$).

2. Prouver qu'on a $H \subset \mathfrak{T}$.

3. Que peut-on dire si G est abélien ?

IV. PREUVE DU THÉORÈME

Dans cette partie IV du problème, on fixe un sous-groupe cristallographique G de $\mathfrak{I}s$ et on choisit un nombre réel $d > 0$ tel que la condition C1 soit vérifiée.

A. Soit u un vecteur unitaire de E.

1. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels $(k_q)_{q \in \mathbb{N}}$ et une suite $(\beta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telles que

   (i) pour tout entier naturel q, on ait $\| \tau(\beta_q) - k_q u \| \leqslant d$;

   (ii) la suite $(\pi(\beta_q))_{q \in \mathbb{N}}$ converge.

2. En déduire qu'il existe une suite $(\beta'_q)_{q\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que $\tau(\beta'_q)$ soit non nul à partir d'un certain rang, que $\pi(\beta'_q)$ converge vers Γ et que $\dfrac{u \cdot \tau(\beta'_q)}{\|\tau(\beta'_q)\|}$ converge vers 1.

(On pourra prendre β'_q de la forme $\beta_r \beta_q^{-1}$, où l'entier r est convenablement choisi.)

B. Pour toute partie non vide X de G, on pose $\delta(X) = \inf\limits_{\alpha \in X} \|\tau(\alpha)\|$.

1. Soit X une partie non vide de G. Prouver qu'il existe un élément α de X tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(X)$.

Dans la suite de cette partie IV.B, on note Y l'ensemble des éléments α de G tels que $0 < m(\pi(\alpha)) \leqslant 1/2$.

On désire prouver par l'absurde que Y est vide.

2. Jusqu'en IV.B.5, supposons que Y est non vide et choisissons α dans Y tel que $\|\tau(\alpha)\| = \delta(Y)$. Posons $A = \pi(\alpha)$, $a = \tau(\alpha)$ et notons p, q les projecteurs orthogonaux sur les espaces M_A et $M_A^\perp$ respectivement, sous-espaces de E associés à A en I.B.

Prouver qu'il existe un élément β de G tel que, posant $B = \pi(\beta)$ et $b = \tau(\beta)$, on ait

$$\|q(b)\| < \|p(b)\| \qquad \text{et} \qquad m(B) \leqslant \frac{1}{8}\left(m(A) - m^\perp(A)\right).$$

(On pourra choisir un vecteur unitaire u de E et utiliser II.A.)

Soit Z l'ensemble des éléments de G vérifiant ces conditions, et choisissons $\beta \in Z$ tel que $\|\tau(\beta)\| = \delta(Z)$.
Posons $B = \pi(\beta)$, $b = \tau(\beta)$, $\gamma = [\alpha, \beta]$. On pose $C = \pi(\gamma)$, $c = \tau(\gamma)$ (calculés en I.A.7) et $r = c - (A - I)b$.

3. Prouver qu'on a $m(C) \leqslant m(B)$.

4. Si β est une translation, vérifier qu'on a $r = 0$, $\|q(c)\| < \|p(c)\|$ et $\|c\| < \|b\|$.

5. Supposons que β n'est pas une translation; prouver successivement :

   (i) $\|a\| \leqslant \|b\|$

   (ii) $\|r\| \leqslant 2\, m(B)\, \|b\|$

   (iii) $\|r\| < \dfrac{1}{2}(m(A) - m^\perp(A))\, \|p(b)\|$

   (iv) $\|q(c)\| < \dfrac{1}{2}(m(A) + m^\perp(A))\, \|p(b)\| < \|p(c)\|$

   (v) $\|c\| < \|b\|$

6. Déduire de ce qui précède que Y est vide.

7. En choisissant une base de E formée de vecteurs unitaires, prouver qu'il existe une base $(w_1, \ldots, w_n)$ de E telle que tw_i soit dans G pour tout entier i dans $\mathbb{N}_n$.

8. Posant $L = \tau(G \cap \mathscr{T})$, prouver que L est un réseau de E.

RAPPORT SUR L'EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES GENERALES

Comme annoncé dans le préambule, ce problème avait pour but de démontrer un résultat dû à L. Bieberbach (1910), à savoir que tout sous-groupe cristallographique (i.e. discret à domaine fondamental compact) du groupe $\mathcal{I}s_n$ des isométries d'un espace affine euclidien E_n de dimension n, contient n translations linéairement indépendantes, les translations d'un réseau de E_n. La démonstration originale de L. Bieberbach [2] est assez difficile, mais Frobenius donna, dès 1911 [6], une preuve basée sur la considération de sous-groupes commutatifs du groupe unitaire ; cette démonstration de Frobenius est restée la preuve élémentaire standard. On peut cependant simplifier les arguments, si on utilise un peu de théorie des groupes de Lie [1,8]. Le problème présentait une preuve d'un type nouveau, due à M. Gromov et popularisée par P. Buser et H. Karcher [4]. Nous avons suivi d'assez près l'article élémentaire de P. Buser [3].

On peut compléter le résultat obtenu dans le problème par deux autres, également dus à L. Bieberbach [2] : les sous-groupes cristallographiques de $\mathcal{I}s_n$ forment un nombre fini de classes d'isomorphismes, cf. [3,7], et d'autre part un isomorphisme entre deux tels sous-groupes de $\mathcal{I}s_n$ peut être réalisé par la conjugaison par une bijection affine de E_n, cf. [7]. Pour l'intérêt actuel des résultats de Bieberbach, on peut consulter [5].

La démonstration de M. Gromov est basée sur la considération de commutateurs, qui permet de prouver que tout élément d'un sous-groupe cristallographique de $\mathcal{I}s_n$, dont la partie linéaire est suffisamment proche de l'identité de E_n, est en fait une translation. La première partie du problème, de nature préliminaire, examine quelques calculs relatifs aux commutateurs dans $\mathcal{I}s_n$, et quelques propriétés de la norme de $\mathcal{L}(E_n)$. La seconde partie traite le cas simple de sous-groupes de $\mathcal{I}s_n$ formés de translations : pour qu'un tel sous-groupe soit cristallographique, il est nécessaire et suffisant qu'il soit engendré par n translations indépendantes. La troisième partie examine les liens, élémentaires, entre un sous-groupe cristallographique G de $\mathcal{I}s_n$ et son sous-groupe T formé des translations appartenant à G. La dernière partie comporte la preuve du théorème.

Quelques erreurs typographiques mineures s'étaient glissées dans l'énoncé définitif, ce dont le jury s'excuse ; elles ne semblent pas avoir gêné les candidats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AUSLANDER.- An account of the theory of crystallographic groups, Proc. A.M.S. 16 (1956) 1230-1236.

[2] L. BIEBERBACH.- Über die Bewegrengsgruppen der Euklidischen Räume I, Math. Ann. 70 (1910) 297-336
II, Math. Ann. 72 (1912) 400-412

[3] P. BUSER.- A geometric proof of Bieberbach's theorems on crustallographic groups, l'Enseign. math 31 (1985) 137-145.

[4] P. BUSER & H. KARCHER.- The Bieberbach case in Gromov's almost flat manifold theorem in global differential geometry and global analysis (Berlin 1979), LN in Maths 838, Springer-Verlag (1981).

[5] R. CHARLAP.- Bieberbach groups and flat manifolds, Springer-Verlag Universitext (1987).

[6] C. FROBENIUS.- Über die unzerlegbaren diskreten Bewegrengsgruppen, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin 29 (1911) 654-665

[7] W. RINOW.- Die inner geometrie der metrischen Räume, Berlin, Springer Verlag grundl (1961).

[8] J. WOLF.- Spaces of constant curvature, Mc Graw-Hill, New York (1967).

REMARQUES GÉNÉRALES

Les trois premières parties ne faisaient appel qu'à des connaissances standard d'algèbre et de topologie, et les raisonnements étaient élémentaires ; en particulier, suivant P. Buser [4], nous avons pris une définition très simple de la notion de sous-groupe cristallographique. La quatrième partie ne nécessitait pas de conssaissances plus élaborées, mais les raisonnements étaient plus techniques. En fait, seules les parties I et II ont été abordées par la majorité des candidats.

Le problème a révélé que les candidats sont plus à l'aise dans des manipulations algébriques formelles que pour des considérations géométriques et topologiques simples.

Si l'on peut considérer que le niveau des candidats est globalement satisfaisant (voir en appendice la répartition des notes), on peut néanmoins relever des erreurs assez surprenantes à ce niveau : défauts de connaissance ou même fautes de logique ("l'image réciproque d'un espace compact par une application continue est compacte" ou "$A \leqslant T$ et $B \leqslant T$ impliquent $A \leqslant B$") ; légèreté dans l'énoncé des théorèmes utilisés et surtout dans la vérification de leurs hypothèses ; points importants d'un argument, passés sous silence ; manque d'intuition géométrique (en I.B. 10 ou III 7 par exemple) ; lacunes fréquentes en topologie (I B).

La rédaction pêche fréquemment par manque d'articulation : suites de calculs sans liens ni commentaires, résultats précédemment obtenus utilisés sans mention, défaut de conclusion ou manque de précision dans les raisonnements.

COMMENTAIRES SUR QUELQUES POINTS PARTICULIERS

I. La partie A ne présentait aucune difficulté et une grande majorité des candidats y a répondu avec succès. On pouvait, soit utiliser des connaissances de cours sur l'application $\mathcal{I}s \longrightarrow \mathcal{O}$ qui à toute isométrie associe sa partie linéaire (encore fallait-il exprimer clairement et précisément ces connaissances), soit effectuer des calculs directs. Cependant, certains croient que tout sous-groupe abélien d'un groupe est distingué ou que les translations commutent à toutes les isométries (même quand des calculs subséquents leur prouvent le contraire).

La partie B est sans doute celle qui a suscité le plus d'erreurs, ce qui souligne la faiblesse des candidats en topologie.

B 1 : La continuité de $f \longmapsto f^* f$ est facile si on utilise le fait que la composition des endomorphismes et le passage à l'adjoint sont des applications entre espaces vectoriels réels de dimension finie, qui sont bilinéaires ou linéaires, donc continues. Beaucoup trop de candidats se contentent de vérifier la continuité en 0 de $f \longmapsto f^* \circ f$. Certains utilisent l'égalité $\|f\| = \|f^*\|$ pour $f \in \mathcal{L}(E)$; les arguments invoqués pour prouver cette égalité sont souvent incomplets.

Certains candidats prétendent que l'image réciproque d'un espace compact par une application continue est compacte, d'autres que $\mathcal{O}$ est $\det^{-1}(\{\pm 1\})$. Signalons que l'application $(A,B) \longmapsto AB$ de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ n'est ni linéaire, ni bilinéaire, $\mathcal{O}$ n'étant pas un espace vectoriel.

B 2 : Malgré la présence de questions similaires ces dernières années lors des épreuves écrites de l'Agrégation, trop de candidats pensent encore qu'un endomorphisme autoadjoint a automatiquement ses valeurs propres réelles <u>et</u> positives. Pour prouver que E_f est un sous-espace vectoriel de E, on peut utiliser une base de vecteurs propres pour f^*f, ce qui montre immédiatement que E_f est le sous-espace propre pour f^*f attaché à la valeur propre $\|f\|^2$. On peut aussi prouver la stabilité de E_f par somme et différence en utilisant l'identité de la médiane, et la non-nullité en invoquant que l'application continue $x \longmapsto \|f(x)\|$ atteint son maximum sur la boule unité de E, qui est compacte.

B 5 : Il ne fallait pas se contenter de prouver des inégalités du genre $\|f\| \leqslant \|fA\|$, ou ne prouver qu'une seule des égalités demandées. Parfois les candidats pensent, implicitement ou explicitement, qu'on a $\|fg\| = \|f\| . \|g\|$ quels que soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

B 6 : Pour prouver que $M_A^{\perp}$ est stable par A, on est souvent amené à prouver que M_A est stable par A^{-1}.

B 7 : Référer à B 5.

B 9 : Si beaucoup de candidats trouvent que le seul élément possible est I, bien peu fournissent un raisonnement complet.

B 10 : Cette question simple a donné des résultats catastrophiques, ce qui atteste le manque de vision géométrique de nombreux candidats. On a forcément $m^{\perp}(A) = 0$ et $m(A) = 2$. Pour x dans $M_A^{\perp}$, on a donc $A(x) = x$; pour x dans M_A, on a $\|A(x) - x\| = 2\|x\|$ ce qui implique, par les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, qu'on a $A(x) = -x$. Ainsi A est la symétrie orthogonale par rapport à $M_A^{\perp}$. Inversement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel distinct de E convient.

II. Cette partie établissait qu'un sous-groupe cristallographique de $\mathcal{J}_s$ fermé de translations est formé des translations d'un réseau de E.

La partie A était plus facile si l'on se souvenait que toutes les normes sur espace vectoriel réel de dimension finie sont équivalentes. On rencontre plusieurs fois ici une faute surprenante, équivalant à dire "si $A \leqslant T$ et $B \leqslant T$, alors $A \leqslant B$!". Certains candidats supposent qu'une base d'une espace euclidien est forcément orthonormale.

En B 1, le raisonnement, simple, est souvent incomplet. Des locutions comme "il est clair que", "on voit que" ne sauraient constituer une démonstration.

C 1 : Assez peu de candidats voient que le point important à vérifier est que $V \setminus F_k$ est non vide pour $k \leqslant n-1$.

C 3 : Pour ce résultat, il est utile de constater que F_k est engendré par $\omega_1, \ldots, \omega_k$.

C 4 : Il ne fallait pas essayer, d'un seul coup, de réaliser les inégalités pour tout j, mais d'abord soustraire à x un multiple convenable de v_n pour obtenir les inégalités pour $j = n$, puis retrancher un multiple de v_{n-1}, etc.

III. Cette partie examinait quelques liens entre groupes cristallographiques et réseaux. De même que la partie II, elle aurait pu être placée après la démonstration du théorème. Mais les raisonnements sont moins techniques qu'en IV.

A 2 : Utiliser l'action de G sur $\mathcal{C}_L$ par conjugaison.

A 3 : Plusieurs points sont à vérifier : $\tau(G)$ est inclus dans L, l'application est injective, elle est surjective.

C 1 : Le résultat n'est pas si immédiat qu'on pense. On trouve le groupe $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ et pour chaque classe K de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le groupe formé des éléments de $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ et des symétries $x \longmapsto -x+\alpha$ où α parcourt K.

C 2 : S'il est "clair" (sur une figure en particulier, ce qui est très rare) que S_L est de cardinal 8, encore faut-il en donner une démonstration.

D 1 : Pour être sûr a priori que α commute à $t_x \alpha t_{-x}$, il faut prendre α dans H. Ce sera vrai a posteriori pour tout α dans G.

D 2 : Comme L contient une base de E, on a $(A-I)^2 = 0$ à cause de D 1 ; donc A a pour seule valeur propre 1 et, comme A est orthogonal, on a $A = I$.

IV. Cette partie n'a été abordée que par très peu de candidats.

RÉSULTATS

(sur 1043 Copies)

de 0 à 4	84 copies
de 5 à 9	94 copies
de 10 à 14	154 copies
de 15 à 19	186 copies
de 20 à 24	144 copies
de 25 à 29	123 copies
de 30 à 34	93 copies
de 35 à 39	65 copies
de 40 à 44	45 copies
de 45 à 49	36 copies
de 50 à 54	10 copies
de 55 à 60	9 copies