que

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

PRÉLIMINAIRES

On indique ici les notations et conventions utilisées, ainsi que quelques résultats que les candidats pourront employer pour la résolution du problème, sans avoir à les démontrer.

1. Une application $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ d'un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^m$, est dite *différentiable de classe* C^∞, si elle est la restriction à $[a, b]$ d'une application (pas nécessairement unique) $\tilde{\gamma}$, différentiable de classe C^∞, définie sur un intervalle ouvert contenant $[a, b]$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, la dérivée d'ordre k de $\tilde{\gamma}$ au point a (resp. au point b), ne dépend que de γ, et non du choix de $\tilde{\gamma}$: c'est la dérivée d'ordre k *à droite* (resp. *à gauche*) de γ en a (resp. en b); (par convention, on l'appellera simplement dérivée d'ordre k de γ en a (resp. en b)).

2. Dans toute la suite, « différentiable » sous-entendra toujours « de classe C^∞ ».

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$ (coordonnées $(x, \dot{x}) = (x^1, \dots, x^m, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^m)$), et $\mathcal{L} : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable, qu'on notera $\mathcal{L}(x, \dot{x})$, ou $\mathcal{L}(x^1, \dots, x^m, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^m)$.

On désigne par Γ_U l'ensemble des applications différentiables $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, définies sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, telles que pour tout $t \in [a, b]$, $\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$ soit élément de U. À tout élément γ de Γ_U on associe l'intégrale :

$$I(\gamma) = \int_a^b \mathcal{L}\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\right) dt .$$

On dit que cette formule définit une fonctionnelle I sur Γ_U.

4. On aura à considérer dans la suite des familles, dépendant différentiablement d'un paramètre réel s, d'applications différentiables $\gamma_s : [a_s, b_s] \to \mathbb{R}^m$, éléments de Γ_U, l'intervalle $[a_s, b_s]$ pouvant lui-même dépendre de s. Une telle famille d'applications sera toujours supposée définie par les données suivantes :

— deux applications différentiables $s \longmapsto a(s) = a_s$, $s \longmapsto b(s) = b_s$, définies sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant pour tout $s \in J$, $a(s) \leqslant b(s)$;

— une application différentiable $\hat{\gamma} : W \to \mathbb{R}^m$, définie sur un ouvert W de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, notée $(s, t) \longmapsto \hat{\gamma}(s, t)$, telle que pour tout $s \in J$ et tout $t \in [a_s, b_s]$, (s, t) soit élément de W, et que l'on ait :

$$\hat{\gamma}(s, t) = \gamma_s(t) .$$

On a donc, en dérivant par rapport à t :

$$\dot{\gamma}_s(t) = \frac{d\gamma_s}{dt}(t) = \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t}(s, t) .$$

5. Avec les notations précisées ci-dessus, l'application de J dans $\mathbb{R}$: $s \longmapsto \mathrm{I}(\gamma_s)$ est différentiable, et sa dérivé est donnée par l'expression

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{I}(\gamma_s) = \left[\mathcal{L}\left(\gamma_s(b_s), \dot{\gamma}_s(b_s)\right) - \sum_{i=1}^{m} \dot{\gamma}_s^i(b_s)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(b_s), \dot{\gamma}_s(b_s)\right)\right]\frac{\mathrm{d}b_s}{\mathrm{d}s}$$

$$- \left[\mathcal{L}\left(\gamma_s(a_s), \dot{\gamma}_s(a_s)\right) - \sum_{i=1}^{m} \dot{\gamma}_s^i(a_s)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(a_s), \dot{\gamma}_s(a_s)\right)\right]\frac{\mathrm{d}a_s}{\mathrm{d}s}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(b_s), \dot{\gamma}_s(b_s)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma_s^i(b_s)\right)$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(a_s), \dot{\gamma}_s(a_s)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma_s^i(a_s)\right)$$

$$+ \int_{a(s)}^{b(s)} \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right)\right)\right)\frac{\partial \widehat{\gamma}^i}{\partial s}(s, t)\right]\mathrm{d}t.$$

Dans l'expression ci-dessus, on a noté $\gamma_s^i(t)$, $\widehat{\gamma}^i(s, t)$, $\dot{\gamma}_s^i(t)$, $(1 \leqslant i \leqslant m)$ les composantes, respectivement, de $\gamma_s(t)$, $\widehat{\gamma}(s, t)$, $\dot{\gamma}_s(t) = \dfrac{\mathrm{d}\gamma_s}{\mathrm{d}t}(t)$.

Les symboles $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ désignent les dérivées totales, respectivement par rapport à s et à t. Ainsi par exemple :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma_s^i(b_s)\right) = \frac{\partial \widehat{\gamma}^i}{\partial s}(s, b_s) + \frac{\partial \widehat{\gamma}^i}{\partial t}(s, b_s)\frac{\mathrm{d}b_s}{\mathrm{d}s};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right)\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^j \partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right)\dot{\gamma}_s^j(t) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i}\left(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\right)\ddot{\gamma}_s^j(t)\right),$$

avec :

$$\ddot{\gamma}_s^j(t) = \frac{\mathrm{d}^2 \gamma_s^j(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2 \widehat{\gamma}^j}{\partial t^2}(s, t).$$

6. Soit A un sous-ensemble de Γ_{U}. On dit qu'un élément γ de A est une *extrémale* de la fonctionnelle I *sur l'ensemble d'applications A* si, pour toute famille d'éléments γ_s de A dépendant différentiablement d'un paramètre réel s (au sens précisé au point 4 ci-dessus), et vérifiant $\gamma_{s_0} = \gamma$ (s_0 étant un élément particulier de l'intervalle de définition de s), on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{I}(\gamma_s)\right|_{s=s_0} = 0.$$

On remarquera que la propriété de γ, d'être une extrémale de I sur A, *dépend du choix de A.*

7. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On suppose que pour toute fonction différentiable $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, vérifiant $\varphi(a) = \varphi(b)$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b)$, l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

est nulle. Alors f est identiquement nulle.

On considère un système mécanique dont l'*état cinétique* (ensemble des positions et des vitesses des constituants du système) est repéré par un point $(q, p) = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$. L'ensemble des états cinétiques possibles, appelé *espace des phases* du système, est un ouvert P de $\mathbb{R}^{2n}$. Les coordonnées $q^1, \ldots, q^n$, appelées *variables de position*, décrivent la position du système, et les coordonnées $p_1, \ldots, p_n$, appelées *variables d'impulsion*, décrivent les vitesses des constituants du système (pour une position donnée, la répartition des masses des constituants du système étant supposée donnée).

Les propriétés dynamiques du système sont déterminées par la donnée d'une fonction différentiable $\mathrm{H} : \mathrm{P} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, appelée *hamiltonien* du système. Les équations du mouvement, appelées équations de Hamilton, ou équations canoniques, s'écrivent :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, \\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q^i}, \end{aligned} \right. \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

la variable t désignant le temps. Un *mouvement* du système est une courbe intégrale $t \longmapsto \big(q(t), p(t)\big)$ des équations canoniques (1), définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Un mouvement du système est dit périodique de période T (avec T réel, $\mathrm{T} > 0$), s'il est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et vérifie :

$$q^i(t + \mathrm{T}) = q^i(t)\ ; \quad p_i(t + \mathrm{T}) = p_i(t)\ ; \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

PREMIÈRE PARTIE

Pour toute application différentiable $\gamma : [a, b] \to \mathrm{P}$ d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ dans P, on pose :

$$(2) \qquad \mathrm{I}(\gamma) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n p_i(t) \frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t} - \mathrm{H}\big(\gamma(t)\big) \right] \mathrm{d}t,$$

$$(3) \qquad \mathrm{J}(\gamma) = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(p_i(t) \frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t} - q^i(t) \frac{\mathrm{d}p_i(t)}{\mathrm{d}t} \right) - \mathrm{H}\big(\gamma(t)\big) \right] \mathrm{d}t,$$

où on a écrit $p_i(t)$ pour $p_i\big(\gamma(t)\big)$, et $q^i(t)$ pour $q^i\big(\gamma(t)\big)$, afin d'alléger les notations.

1° Montrer qu'on a :

$$\mathrm{I}(\gamma) - \mathrm{J}(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \big(p_i(b)\, q^i(b) - p_i(a)\, q^i(a)\big).$$

2° Soit un réel $T > 0$. Dans la présente question, le sous-ensemble A de Γ_U considéré au point 6 des Préliminaires est l'ensemble des applications différentiables de $[0, T]$ dans P, qui vérifient :

$$\gamma(0) = \gamma(T), \qquad \frac{d^k \gamma(0)}{d t^k} = \frac{d^k \gamma(T)}{d t^k} \quad \text{pour tout entier } k \geqslant 1 .$$

Montrer que A s'identifie à l'ensemble des applications différentiables γ de $\mathbb{R}$ entier dans P, périodiques de période T, c'est-à-dire vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t + T) = \gamma(t)$.

Montrer qu'une application différentiable $\gamma : \mathbb{R} \to P$, périodique de période T, est un mouvement du système mécanique étudié (c'est-à-dire est une courbe intégrale des équations canoniques (1)), si et seulement si sa restriction à $[0, T]$ est une extrémale de I (ou de J), sur l'ensemble d'applications A, au sens précisé au point 6 des Préliminaires.

3° On va appliquer le résultat ci-dessus au cas où le système mécanique considéré est un oscillateur harmonique à une dimension (point matériel M de masse $m > 0$, mobile sur une droite fixe, attiré par un point fixe O situé sur cette droite, la force attractive étant proportionnelle à la distance $|\overrightarrow{OM}|$). L'espace des phases est donc $\mathbb{R}^2$ (coordonnées q, p), et le hamiltonien H a pour expression :

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + k q^2 \qquad (k \text{ étant une constante } > 0).$$

a. Soit un réel $T > 0$, et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application différentiable, périodique de période T, de la forme :

$$q(t) = Q \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right), \qquad p(t) = P \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \beta\right),$$

où P, Q, α et β sont des constantes.

Calculer $I(\gamma)$ (l'intervalle $[a, b]$ étant, dans le cas présent, $[0, T]$).

b. En prenant P, Q, α et β pour paramètres, montrer que si γ est un mouvement du système, on a nécessairement :

— ou bien $P = 0$, $Q = 0$, T quelconque;

— ou bien $PQ \neq 0$, $T = \pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$, et $p(t) = m \dfrac{d q(t)}{d t}$.

c. Vérifier que les conditions nécessaires pour que γ soit un mouvement du système, trouvées en *b* ci-dessus, sont aussi suffisantes.

DEUXIÈME PARTIE

On va appliquer le résultat de la question 2° de la première partie à la recherche de certaines solutions stationnaires du problème plan des trois corps. Le système mécanique considéré est constitué de trois points matériels M_1, M_2, M_3, de masses respectives m_1, m_2, m_3 strictement positives, librement mobiles dans le plan $\mathbb{R}^2$, s'attirant deux à deux suivant la loi de Newton $\left(\text{force exercée par } M_j \text{ sur } M_i \text{ parallèle au vecteur } \overrightarrow{M_iM_j}\text{, de même sens, proportionnelle à } \dfrac{m_i m_j}{|\overrightarrow{M_iM_j}|^2}\right)$.

On note $\vec{q}_i = \overrightarrow{OM_i}$, et $\vec{p}_i$ le vecteur impulsion du point matériel M_i.

L'espace des phases P est l'ouvert de $\mathbb{R}^{12}$:

$$P = \left\{ (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \mid \vec{q}_i \in \mathbb{R}^2, \vec{p}_i \in \mathbb{R}^2, \vec{q}_i \neq \vec{q}_j \text{ si } i \neq j, \ 1 \leqslant i, j \leqslant 3 \right\}.$$

Le hamiltonien H du système a pour expression (K étant une constante > 0) :

$$\mathrm{H}\left(\vec{q}_i, \vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{|\vec{p}_i|^2}{2\, m_i} - \mathrm{K}\left(\frac{m_1 m_2}{|\vec{q}_1 - \vec{q}_2|} + \frac{m_2 m_3}{|\vec{q}_2 - \vec{q}_3|} + \frac{m_3 m_1}{|\vec{q}_3 - \vec{q}_1|}\right).$$

On recherche les mouvements du système pour lesquels les vecteurs $\vec{q}_i$, $\vec{p}_i$, $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ sont de module constant, et tournent, dans le plan $\mathbb{R}^2$, à une vitesse angulaire constante ω (la même pour ces six vecteurs).

Pour effectuer les calculs, il pourra être commode d'identifier $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$, en associant à chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'élément $x + iy$ de $\mathbb{C}$. Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de module constant, qui tourne à la vitesse angulaire ω constante, est alors représenté par une famille de complexes, dépendant du temps t, de la forme $(x_0 + iy_0)\, e^{i\omega t}$.

1° En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ comme indiqué ci-dessus, on fait correspondre aux vecteurs $\vec{q}_k$ et $\vec{p}_k$ de $\mathbb{R}^2$, des éléments de $\mathbb{C}$, notés respectivement z_k et ξ_k, $(k = 1, 2, 3)$.

a. Exprimer le hamiltonien H au moyen des z_k, ξ_k, $(k = 1, 2, 3)$.

b. Exprimer la fonctionnelle $\mathrm{I}(\gamma)$ définie par la formule (2) au moyen des fonctions $t \longmapsto z_k(t)$, $t \longmapsto \xi_k(t)$, $(t \in [a, b]$, $k = 1, 2, 3)$.

2° Soit un réel $\mathrm{T} > 0$, et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{P}$ une application différentiable périodique de période T, définie par les formules :

(4) $$z_k(t) = \mathrm{Q}_k\, e^{i\omega t}\ ; \quad \xi_k(t) = \mathrm{P}_k(t)\, e^{i\omega t},$$

avec Q_k et $\mathrm{P}_k \in \mathbb{C}$, constantes $(k = 1, 2, 3)$, et $\omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$.

Calculer $\mathrm{I}(\gamma)$, l'intervalle $[a, b]$ étant, dans le cas présent, $[0, \mathrm{T}]$.

Dans les questions 3° à 6° ci-dessous, on suppose que l'application γ, définie par les formules (4), est un mouvement du système mécanique étudié. En utilisant le résultat obtenu dans la première partie, question 2°, on va établir diverses relations que doivent nécessairement vérifier Q_k et P_k $(k = 1, 2, 3)$.

3° Montrer qu'on a nécessairement :

(5) $$\mathrm{P}_k = i m_k\, \omega\, \mathrm{Q}_k, \qquad (k = 1, 2, 3);$$

(6) $$m_1\, \mathrm{Q}_1 + m_2\, \mathrm{Q}_2 + m_3\, \mathrm{Q}_3 = 0.$$

[Pour établir chacune de ces relations, on pourra supposer que les P_k et Q_k sont des fonctions différentiables d'un paramètre réel s, d'une forme que l'on précisera ; on pourra alors considérer γ comme dépendant différentiablement du paramètre s, et utiliser le résultat de la question 2° de la première partie.]

Quelles sont les significations mécaniques des relations (5) et (6) ?

4° On pose :

$$\mathrm{Q}_k = r_k\, e^{i\theta_k}, \quad r_k \geqslant 0, \qquad (k = 1, 2, 3);$$

$$|\mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_2| = r_{12}\ ; \quad |\mathrm{Q}_2 - \mathrm{Q}_3| = r_{23}\ ; \quad |\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1| = r_{31}.$$

a. Montrer qu'on a :

$$r_1\left(\frac{m_2 r_2}{r_{12}^3} \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_3 r_3}{r_{31}^3} \sin(\theta_1 - \theta_3)\right) = 0,$$

ainsi que deux relations analogues, obtenues à partir de celle-ci par permutation circulaire des indices 1, 2 et 3. [On pourra considérer successivement chaque θ_k comme un paramètre dont dépend γ.]

b. Montrer qu'on a :

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{K}\,(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2)\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}}\right)^{-1}.$$

[On pourra remplacer r_k par λr_k, $(k = 1, 2, 3)$, avec $\lambda > 0$, et considérer λ comme un paramètre dont dépend γ.]

5° On suppose les trois points matériels M_1, M_2, M_3 non alignés. Montrer que le triangle $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral, c'est-à-dire qu'on a :

$$r_{12} = r_{23} = r_{31}.$$

On pose $r = r_{12} = r_{23} = r_{31}$. Exprimer la période T au moyen de K, r et $(m_1 + m_2 + m_3)$.

6° On suppose les trois points matériels M_1, M_2, M_3 alignés, et, par exemple, M_2 situé entre M_1 et M_3.

a. Montrer que l'origine O est située sur le segment de droite M_1M_3 (extrémités non comprises).

Dans la suite de cette question, on oriente la droite M_1M_3 de M_1 vers M_3, et on note x_1, x_2, x_3 les abscisses des points M_1, M_2, M_3 (à partir de l'origine O). On remarquera qu'avec les conventions faites, on a $x_1 < 0 < x_3$ et $x_1 < x_2 < x_3$.

b. Montrer qu'on a la double égalité :

$$\frac{4\,\pi^2 a^3}{KT^2(m_1 + m_2 + m_3)} = \left(\frac{m_2}{\lambda^2} + m_3\right)(m_2\lambda + m_3)^{-1} = \left(m_1 + \frac{m_2}{(1-\lambda)^2}\right)\left(m_1 + m_2(1-\lambda)\right)^{-1},$$

où on a posé :

$$x_3 - x_1 = a, \qquad x_2 - x_1 = \lambda a.$$

c. Les masses m_1, m_2, m_3, strictement positives, étant données, montrer qu'il existe un élément unique λ de l'intervalle ouvert $]0,\ 1[$ tel que la seconde égalité ci-dessus soit vérifiée.

7° On a établi ci-dessus (question 5° lorsque les trois points matériels ne sont pas alignés, et question 6° lorsque ces trois points sont alignés) des conditions nécessaires pour que γ soit un mouvement du système mécanique étudié. Vérifier que ces conditions sont suffisantes.

TROISIÈME PARTIE

On revient à l'étude d'un système mécanique général, dont l'évolution est régie par les équations de Hamilton (1). On considère une famille de mouvements périodiques γ_s du système, dépendant différentiablement du paramètre réel s ($s \in J$, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$), au sens indiqué au point 4 des Préliminaires. La période $T(s) = b_s - a_s$ du mouvement périodique γ_s est une fonction différentiable de s. On rappelle que le hamiltonien H du système garde une valeur constante au cours de chaque mouvement (intégrale première de l'énergie); on notera $h(s)$ la valeur de H au cours du mouvement γ_s. On notera $I(\gamma_s)$ la valeur de la fonctionnelle I, donnée par la formule (2), pour $\gamma = \gamma_s$, $a = a_s$, $b = b_s$.

1° Soient s_1 et s_2 deux éléments de l'intervalle J, et Ω la partie du plan $\mathbb{R}^2$ (coordonnées s, t) définie par :

$$\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s_1 \leqslant s \leqslant s_2,\ a_s \leqslant t \leqslant b_s\}.$$

En utilisant la formule de Stokes pour transformer une intégrale calculée sur le contour de Ω, en intégrale double dans Ω, montrer qu'on a :

$$I(\gamma_{s_2}) - I(\gamma_{s_1}) = -\int_{s_1}^{s_2} h(s)\,\frac{d\,T(s)}{d\,s}\,d\,s.$$

2° Retrouver ce résultat en utilisant la formule indiquée au point 5 des Préliminaires.

3° En déduire que si les mouvements périodiques γ_s ont tous même énergie (c'est-à-dire si $h(s)$ ne dépend pas de s), la valeur de la fonctionnelle :

$$\mathrm{K}(\gamma_s) = \int_{a_s}^{b_s} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\left(\gamma_s(t)\right) \frac{\mathrm{d}\,q^k}{\mathrm{d}\,t}\left(\gamma_s(t)\right) \right) \mathrm{d}\,t \quad ,$$

$$= \mathrm{I}(\gamma_s) + h(s)\,\mathrm{T}(s)$$

ne dépend pas de s.

4° On suppose que tous les mouvements du système mécanique étudié sont périodiques, et qu'il existe une fonction différentiable T, appelée *fonction période*, définie sur l'espace des phases P et à valeurs strictement positives, telle que pour tout point (q_0, p_0) de P, $\mathrm{T}(q_0, p_0)$ soit une période du mouvement périodique défini par la donnée de Cauchy :

(7) $$(q, p) = (q_0, p_0) \qquad \text{pour } t = 0.$$

On définit sur P une fonction K en posant :

$$\mathrm{K}(q_0, p_0) = \int_0^{\mathrm{T}(q_0, p_0)} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k(t)\, \frac{\mathrm{d}\,q^k(t)}{\mathrm{d}\,t} \right) \mathrm{d}\,t,$$

où $t \longmapsto \left(q(t), p(t)\right)$ est le mouvement périodique du système défini par la donnée de Cauchy (7).

a. Soit $s \longmapsto (q_{s0}, p_{s0})$ une application différentiable d'un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ dans P. Pour tout $s \in \mathrm{J}$, on note $t \longmapsto \gamma_s(t) = \left(q_s(t), p_s(t)\right)$ le mouvement du système qui vérifie la donnée de Cauchy :

$$(q_s, p_s) = (q_{s0}, p_{s0}) \qquad \text{pour } t = 0.$$

On admettra que l'application de $\mathrm{J} \times \mathbb{R}$ dans P : $(s, t) \longmapsto \gamma_s(t)$, est différentiable.
En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que la fonction $s \longmapsto \mathrm{K}(q_{s0}, p_{s0})$ est différentiable et a pour dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{K}}{\mathrm{d}\,s}(q_{s0}, p_{s0}) = \mathrm{T}(q_{s0}, p_{s0})\,\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{H}}{\mathrm{d}\,s}(q_{s0}, p_{s0}).$$

b. En déduire que K est différentiable, et que sa différentielle vérifie :

$$\mathrm{d}\,\mathrm{K} = \mathrm{T}\,\mathrm{d}\,\mathrm{H}$$

c. On admettra que la relation ci-dessus implique que tout point de P où d H est non nulle possède un voisinage U sur lequel la fonction K peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathrm{K} = \tilde{\mathrm{K}} \circ \mathrm{H},$$

où $\tilde{\mathrm{K}}$ est une fonction différentiable, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$. En d'autres termes, la valeur prise par K en un point de U n'est fonction que de la valeur h prise par H en ce point, et si on note $\tilde{\mathrm{K}}(h)$ cette valeur prise par K, la fonction $h \longmapsto \tilde{\mathrm{K}}(h)$ est différentiable. Montrer qu'on a sur U :

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{d}\,\tilde{\mathrm{K}}}{\mathrm{d}\,h} \circ \mathrm{H},$$

donc que la valeur prise par T en un point de U, n'est fonction que de la valeur prise par H en ce point.

5° Le système mécanique étudié dans cette question est l'oscillateur harmonique, considéré dans la première partie, question 3°. Vérifier que tous les mouvements sont périodiques. Déterminer les fonctions K et T, et vérifier les conclusions de la question 4°.

6° Traiter, comme dans la question précédente, le cas où le système mécanique considéré est le système de Képler (point matériel soumis à une force attractive dirigée vers l'origine, inversement proportionnelle au carré de la distance à l'origine). On restreindra l'espace des phases afin que tous les mouvements soient périodiques.